MỘT SỐ TÍNH CHẤT CỦA ĐỒ THỊ LŨY ĐẲNG TRÊN VÀNH $\mathbb{Z}_{2^n}$

Lê Văn An
Hoàng Quang Huy
Nguyễn Vân Trang
Trần Nguyễn Minh Khuê
Trường Đại học Hà Tĩnh
Email: an.levan@htu.edu.vn

Ngày nhận bài (received): 03/10/2025
Ngày nhận bài sửa (revised): 22/11/2025
Ngày nhận đăng (accepted): 22/11/2025

Tóm tắt

Bài báo này giới thiệu khái niệm đồ thị lũy đẳng trên vành $\mathbb{Z}_{2^n}$, trong đó n là số nguyên dương và khảo sát một số tính chất cơ bản của đồ thị này. Cụ thể, chúng tôi xác định số khuyên, số đỉnh, số cạnh và số thành phần liên thông của đồ thị lũy đẳng trên vành $\mathbb{Z}_{2^n}$.

Từ khóa: Phần tử lũy đẳng, đồ thị, đồ thị lũy đẳng.

Some properties of the idempotent graph on the ring $\mathbb{Z}_{2^n}$

Abstract

This paper introduces the concept of the idempotent graph over the ring $\mathbb{Z}_{2^n}$, where n is a positive integer, and investigates several properties of this graph. Specifically, we determine the number of loops, vertices, edges, and connected components of the idempotent graph over the ring $\mathbb{Z}_{2^n}$.

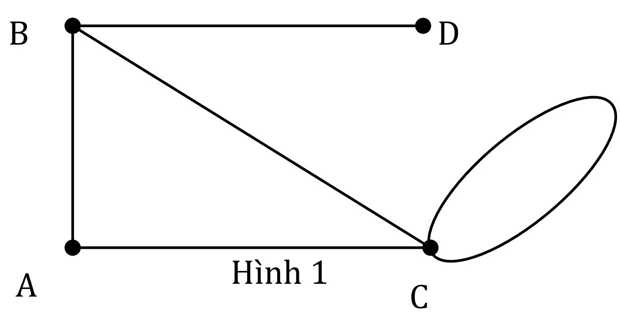
Keywords: Idempotent elements, graphs, idempotent graph.

1. Đặt vấn đề

Trong bài báo này, chúng tôi xét các vành *R* hữu hạn, giao hoán và có đơn vị. Ký hiệu $\mathbb{Z}_n$ để chỉ vành các lớp thặng dư *Mod(n)*. Cho tập hợp hữu hạn *X*, ký hiệu *card(X)* là số phần tử của nó. Cho số thực *x*, khi đó *[x]* là ký hiệu *phần nguyên* của *x*, tức là số nguyên lớn nhất không vượt quá *x*. Cho hai số nguyên dương *a*, *b* ký hiệu ước chung lớn nhất của chúng là *gcd(a, b).* Với số tự nhiên n, phi hàm Euler của n là $\varphi(n) = card\left(\left\{i \in \mathbb{N}^* \middle| i \le n-1, \gcd(i,n) = 1\right\}\right)$ để chỉ số phần tử trong tập hợp {1, 2, … , n} và nguyên tố cùng nhau với n điều này tương đương với $\varphi(n)$ là số phần tử khả nghịch của vành $\mathbb{Z}_n$. Nếu *n* có sự phân tích tiêu chuẩn $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_k^{\alpha_k}$ trong đó $p_1, p_2, \dots, p_k$ là các ước số nguyên tố phân biệt của n và $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ là các số nguyên dương thì $\varphi(n) = n\left(1 - \dfrac{1}{p_1}\right)...\left(1 - \dfrac{1}{p_k}\right)$ và do đó $\varphi(2^n) = 2^{n-1}$. Cho vành *R*, phần tử *e* của *R* được gọi là *lũy đẳng* (*idempotent*) của nó nếu $e^2 = e$. Như vậy, với vành có đơn vị bất kỳ các phần tử 0 và phần tử đơn vị là các lũy đẳng của nó. Trên vành $\mathbb{Z}_{2^n}$ với n là số nguyên dương chỉ có các phần tử lũy đẳng là $\bar{0}$ và $\bar{1}$ (xem chứng minh Bổ đề 1). Chúng ta ký hiệu *Id(R)* là tập các phần tử lũy đẳng của vành *R*. Các khái niệm và tính chất của phần tử lũy đẳng có thể tìm thấy trong tài liệu tham khảo [R. Wisbauer, FMR, 1991].

Một đồ thị vô hướng *(graph)* là một bộ gồm 2 thành phần $G = G(V, E)$, trong đó V là tập các đỉnh và E là tập các cạnh. Ở đây cạnh $AB \in E$ nghĩa là cạnh nối điểm A với điểm B (hay điểm B nối với điểm A). Trong trường hợp cạnh nối điểm A với chính nó được gọi là *khuyên* (*loop*). Tập hợp các khuyên của đồ thị G, được ký hiệu là $loop(G)$. Một đồ thị G không có khuyên, trong đó hai đỉnh được nối với nhau nhiều nhất là 1 cạnh được gọi là *đồ thị đơn* (*simple graph*). Cho đồ thị $G = G(V, E)$, xét một đỉnh v của đồ thị G, ta nói *bậc* (*deg*) của v bằng k và ký hiệu $deg(v) = k$, nếu v là đầu mút của đúng k cạnh (tính cả khuyên). Cho hai điểm A, B của đồ thị G, một tập hợp các đỉnh $A_1A_2...A_t$ trong đó $A = A_1$, $B = A_t$ sao cho A_1 nối với A_2, A_2 nối với A_3, …, A_{t-1} nối với A_t được gọi là một *đường* (*path*) từ A đến B. Đường mà điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là một *chu trình* (*cycle*). Khuyên là một ví dụ về *chu trình tầm thường* (*trivial cycle*), nếu chu trình không phải là khuyên được gọi là *chu trình không tầm thường* (*non-trivial*). Đồ thị G được gọi là *liên thông* (*connected*) nếu hai đỉnh bất kỳ A, B của G có đường đi từ A tới B. Cho $G = G(V, E)$ là một đồ thị, đồ thị $G' = G'(V', E')$ trong đó V' là tập con của V, E' là tập con của E được gọi là *đồ thị con* (*subgraph*) của G. Đồ thị con liên thông tối đại của G (tức là đồ thị con đó là đồ thị liên thông và không thể nhận thêm bất kì một đỉnh nào mà vẫn duy trì tính chất liên thông) được gọi là một *thành phần liên thông* (*connected component*) của G. Nếu G là đồ thị liên thông thì nó có đúng một thành phần liên thông (chính là toàn bộ đồ thị). Nếu G là đồ thị không liên thông sẽ được chia nhỏ thành các đồ thị liên thông mà mỗi đồ thị con là một thành phần liên thông của G. Các khái niệm và tính chất của Lý thuyết đồ thị có thể tìm thấy trong tài liệu tham khảo [R. Diestel, GT, 1997] và [I. Reaburn, GA, 2005]. Sau đây là một số ví dụ về graph.

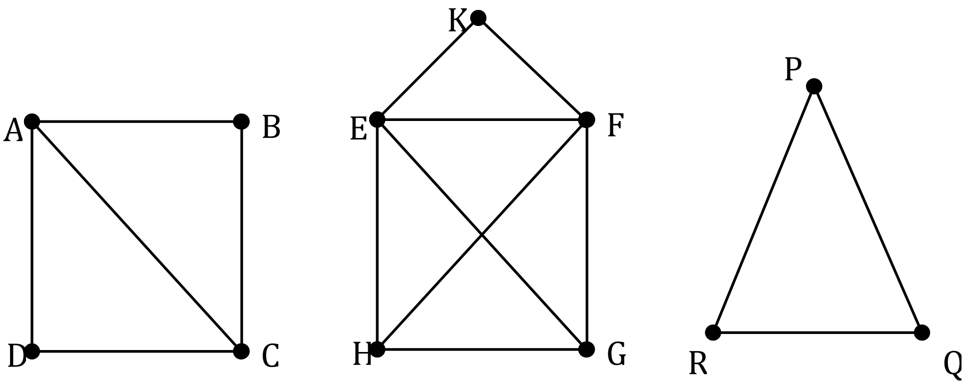
Ví dụ 1.



Hình 1

Đồ thị có 1 khuyên, *ABC* là 1 chu trình. Đồ thị *G* liên thông.

Ví dụ 2.



Hình 2

Đồ thị có 3 thành phần liên thông. Mỗi thành phần liên thông là 1 graph đơn.

Hiện nay, nghiên cứu mối liên hệ giữa các cấu trúc đại số và Lý thuyết đồ thị là vấn đề thời sự được nhiều nhà toán học quan tâm (xem [I. Reaburn, GA, 2005]). Một số lớp đồ thị được xây dựng từ các phần tử ước không, phần tử lũy linh, phần tử lũy đẳng đã được các tác giả quan tâm nghiên cứu. Chẳng hạn có thể xem [D. F. Anderson, P. S. Livingston, TZDGCM, 1999], [D. K. Basnet, A. Sharma and R. Dutta, NG, 2021] hoặc [P. Sharma, S. Dutta, IGR, 2023]. Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu khái niệm đồ thị lũy đẳng khác với của [P. Sharma, S. Dutta, IGR, 2023] và chúng tôi cũng đưa ra một số tính chất của đồ thị này trên lớp vành các lớp thặng dư môđulô 2^n. Cụ thể, chúng tôi sẽ giới thiệu một số ví dụ cho đồ thị lũy đẳng, công thức tính số khuyên, số đỉnh, số cạnh và số thành phần liên thông phụ thuộc vào *n* của lớp vành $\mathbb{Z}_{2^n}$.

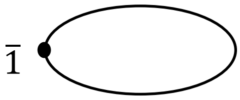
2. Một số ví dụ về đồ thị lũy đẳng

Cho *R* là một vành giao hoán có đơn vị, tập các phần tử khác không của vành *R* ký hiệu là *R**. Một *đồ thị lũy đẳng* (*idempotent graph*) trên vành *R*, ký hiệu bởi *G(R)*, là đồ thị với các đỉnh thuộc *R** và với $x, y \in R^*$ không nhất thiết phân biệt, các đỉnh *x* và *y* được nối với nhau bằng một cạnh khi và chỉ khi $xy \in Id(\mathrm{R})$. Nếu $x = y$ thì cạnh nối giữa *x* và *y* chính là khuyên của nó.

Để minh họa cho khái niệm đồ thị lũy đẳng trên vành $\mathbb{Z}_n$, chúng tôi xem xét cấu trúc đồ thị ứng với một số giá trị của *n*. Các ví dụ sau đây, chúng tôi sẽ xây dựng đồ thị lũy đẳng của vành $\mathbb{Z}_{2^n}$ với n = 1, 2, 3, 4.

Ví dụ 3. Đồ thị lũy đẳng trên vành $\mathbb{Z}_2$:

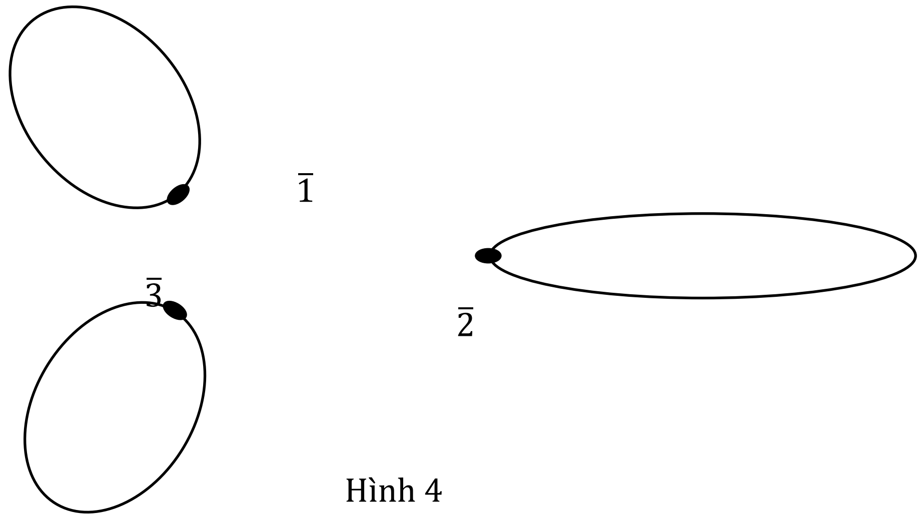
Với $Id(\mathbb{Z}_2)=\{\bar{0};\bar{1}\}$ và $\mathbb{Z}_2^*=\{\bar{1}\}$ thì đồ thị lũy đẳng trên vành $\mathbb{Z}_2$ có 1 đỉnh và 1 khuyên.



Hình 3

Ví dụ 4. Đồ thị lũy đẳng trên vành $\mathbb{Z}_4$:

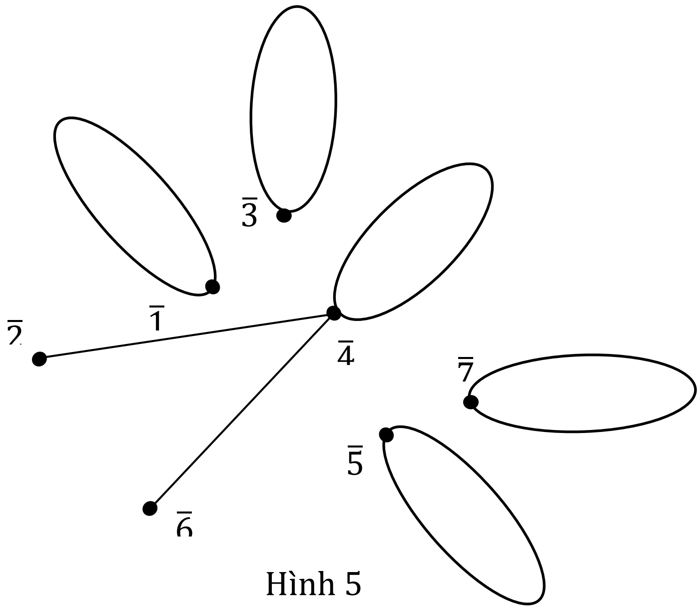
Với $Id(\mathbb{Z}_4)=\{\bar{0};\bar{1}\}$ và $\mathbb{Z}_4^*=\{\bar{1};\bar{2};\bar{3}\}$ thì đồ thị lũy đẳng trên vành $\mathbb{Z}_4$ có 3 đỉnh và 3 khuyên tương ứng. Tuy nhiên, trong đồ thị này không tồn tại cạnh nào nối giữa hai đỉnh phân biệt.



Hình 4

Ví dụ 5. Đồ thị lũy đẳng trên vành $\mathbb{Z}_8$:

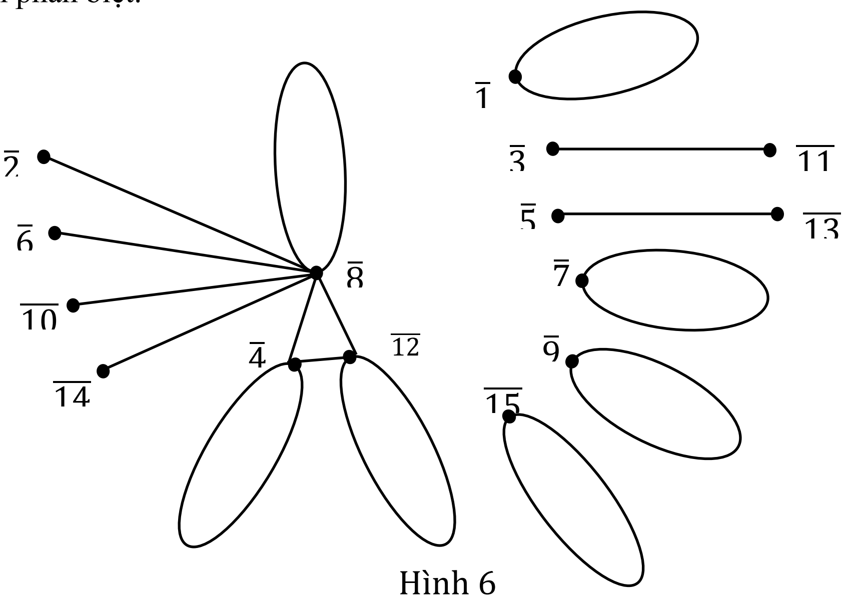
Với $Id(\mathbb{Z}_8)=\{\bar{0};\bar{1}\}$ và $\mathbb{Z}_8^*=\{\bar{1};\bar{2};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{6};\bar{7}\}$ thì đồ thị lũy đẳng trên vành $\mathbb{Z}_8$ có 7 đỉnh, xuất hiện 5 khuyên $loop(\mathrm{G}(\mathbb{Z}_8))=\{\bar{1};\bar{3};\bar{4};\bar{5};\bar{7}\}$ và 2 cạnh duy nhất nối các cặp đỉnh $\{\bar{2};\bar{4}\}$ và $\{\bar{4};\bar{6}\}$. Không có cạnh nào nối hai đỉnh lẻ phân biệt.



Hình 5

Ví dụ 6. Đồ thị lũy đẳng trên vành $\mathbb{Z}_{16}$:

Với $Id(\mathbb{Z}_{16})=\{\overline{0};\overline{1}\}$ và $\mathbb{Z}_{16}^{*}=\{\overline{1};\overline{2};\overline{3};\overline{4};\overline{5};\overline{6};\overline{7};\overline{8};\overline{9};\overline{10};\overline{11};\overline{12};\overline{13};\overline{14};\overline{15}\}$ thì đồ thị lũy đẳng trên vành $\mathbb{Z}_{16}$ có 15 đỉnh, xuất hiện 7 khuyên $loop(\mathrm{G}(\mathbb{Z}_{16}))=\{\overline{1};\overline{4};\overline{7};\overline{8};\overline{9};\overline{12};\overline{15}\}$ và 9 cạnh nối 2 đỉnh phân biệt.



Hình 6

3. Tính chất đồ thị ước không trên vành $\mathbb{Z}_{2^n}$

Với vành $\mathbb{Z}_{2^n}$ chúng ta có các nhận xét quan trọng sau đây:

Bổ đề 1. *Trên vành* $\mathbb{Z}_{2^n}$ *chỉ có hai phần tử lũy đẳng là* $\bar{0}$ *và* $\bar{1}$.

Chứng minh. Gọi e là phần tử lũy đẳng của vành $\mathbb{Z}_{2^n}$, khi đó từ tính chất $e^2 = e$ chúng ta suy ra $e^2 - e = e\left(e-\bar{1}\right) \equiv 0\left(\bmod 2^n\right)$. Mặt khác, e và $e-1$ khác tính chẵn lẻ suy ra e chỉ có thể là $\bar{0}$ hoặc $\bar{1}$.

Bổ đề 2. *Trên vành* $R = \mathbb{Z}_n$ *với n là số nguyên dương. Nếu a là phần tử khả nghịch của R, thì phần tử nghịch đảo của a là duy nhất.*

Chứng minh. Gọi b và c là các phần tử nghịch đảo khác nhau của a. Khi đó ta có: $ab = ac = 1$.

Do đó $a(b - c) = 0$. Vì a là phần tử khả nghịch của vành R, nên $gcd(a, n) = 1$. Điều này dẫn đến $b - c$ là bội của n. Điều này không xảy ra vì b, c là các phần tử của tập hợp $A = \{0, 1, ..., n - 1\}$.

Mệnh đề 3. *Gọi G là đồ thị lũy đẳng trên vành* $\mathbb{Z}_{2^n}$. *Ký hiệu* $loop\left(G\right) =$ *{tập các khuyên của đồ thị G (V, E)}. Khi đó:*

$$card\left(loop\left(G\right)\right) = \begin{cases} 1, \ n = 1 \\ 3, \ n = 2 \\ 2^{\left[\frac{n}{2}\right]} + 3, n \geq 2 \end{cases}.$$

Chứng minh.

- Với $n = 1$, $n = 2$ chứng minh là tầm thường.
- Với $n > 2$, chúng ta chứng minh có đúng 4 phần tử của vành $\mathbb{Z}_{2^n}$ sao cho $a^2 = 1$.

Khi đó $\left(a-1\right)\left(a+1\right) = 0$. Vì a là số nguyên dương lẻ nên $a - 1$ và $a + 1$ là các số nguyên chẵn. Trong đó có đúng một số chia hết cho 2 nhưng không chia hết cho 4. Do đó, số còn lại phải chia hết cho 2^{n-1}. Điều này chỉ xảy ra với các giá trị:

$$a = \bar{1},\ a = \overline{2^{n-1} - 1},\ a = \overline{2^{n-1} + 1},\ a = \overline{2^n - 1}.$$

Điều này dẫn đến có 4 khuyên ứng với phương trình $a^2 = 1$. Tiếp theo, chúng ta tính các khuyên ứng với phương trình $a^2 = 0$.

Trường hợp 1: $n = 2k$, với k là số nguyên dương không bé hơn 2.

Đặt $A_i = \left\{2^i x \middle| x \in \left\{1, ..., 2^{2k-i}\right\}\right.$ và $\gcd\left(2, x\right) = 1\}$ với $i = 1, 2, \ldots, 2k - 1$, khi đó từ $\varphi\left(2^{2k-i}\right) = 2^{2k-1-i}$ suy ra $card\left(A_i\right) = 2^{2k-1-i}$. Nhận xét rằng $a_s^2 = 0$ với mọi a_s là phần tử của tập hợp A_i trong đó $i = k, k + 1, \ldots, 2k - 1$ và $a_s^2 \neq 0$ với a_s là phần tử của tập hợp A_i trong đó $i = 1, 2, \ldots, k - 1$. Do đó:

$$card\left(loop\left(G\right)\right)=\left(\sum_{i=k}^{2k-1}card\left(A_i\right)\right)+4=\left(\sum_{i=k}^{2k-1}2^{2k-1-i}\right)+4=\left(2^k-1\right)+4=2^{\left[\frac{n}{2}\right]}+3.$$

Trường hợp 2: $n = 2k - 1$, với k là số nguyên dương không bé hơn 2. Tính toán tương tự:

$$card\left(loop\left(G\right)\right)=\left(2^{k-1}-1\right)+4=2^{\left[\frac{n}{2}\right]}+3.$$

Vậy trong cả 2 trường hợp: $card\left(loop\left(G\right)\right)=2^{\left[\frac{n}{2}\right]}+3.$

Ví dụ: Theo công thức này số khuyên sẽ là 5 với $n = 3$; sẽ là 7 với $n = 4$; sẽ là 7 với $n = 5$ và sẽ là 11 với $n = 6$. Các ví dụ ở mục 2 đã chỉ ra tính đúng đắn của công thức trên.

Mệnh đề 4. *Gọi G là đồ thị lũy đẳng trên vành* $\mathbb{Z}_{2^n}$ *với V, E lần lượt là tập đỉnh và cạnh của nó, thì số đỉnh* $card\left(V\right)=2^n-1$ *và số cạnh là:*

$$card\left(E\right)=\begin{cases}1,\ n=1\\ 3, n=2\\ \dfrac{\left(n-1\right)2^{n-1}+2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{2}+2,\ n\geq 3\end{cases}.$$

Chứng minh.

Đặt $R=\mathbb{Z}_{2^n}$ và gọi $R^*=\mathbb{Z}_{2^n}\setminus\{0\}$, khi đó R^* bao gồm hai tập hợp $Z\left(R\right)^*$ là tập các ước không của vành $\mathbb{Z}_{2^n}$ và tập $R^*\backslash Z\left(R\right)^*$ gồm các phần tử khả nghịch của vành $\mathbb{Z}_{2^n}$. Với các phần tử a thuộc tập $R^*\backslash Z\left(R\right)^*$ tồn tại phần tử b thuộc $R^*\backslash Z\left(R\right)^*$ sao cho $ab = 1$. Do đó a là đỉnh của đồ thị G. Với các phần tử c thuộc tập $Z\left(R\right)^*$ tồn tại phần tử d thuộc tập $Z\left(R\right)^*$ sao cho $cd = 0$, c cũng là đỉnh của đồ thị G. Vậy mọi phần tử của R^* đều là đỉnh của đồ thị G, suy ra

$$card\left(V\right)=card\left(R^*\right)=2^n-1.$$

Tiếp theo chúng ta tính số cạnh của đồ thị G. Để tính số cạnh của đồ thị G, chúng ta xét hai trường hợp:

- Với $n = 1$, $n = 2$ chứng minh là tầm thường.

- Với n lớn hơn 2, chúng ta có: $card\left(R^*\backslash Z(R)^*\right)=\varphi\left(2^n\right)=2^{n-1}$. Với các đỉnh thuộc tập $R^*\backslash Z\left(R\right)^*$ có 4 phần tử ứng với 4 khuyên của đồ thị. Xét đỉnh a thuộc tập $R^*\backslash Z\left(R\right)^*$ không là khuyên, khi đó theo Bổ đề 2, tồn tại duy nhất b cũng thuộc tập $R^*\backslash Z\left(R\right)^*$ sao cho *a.b = 1*, tức là *a* nối với *b* và có bậc bằng 1. Gọi các cạnh của đồ thị *G* ứng với các phần tử thuộc tập $R^*\backslash Z(R)^*$ là E_1 và chúng ta có $card(E_1)=\frac{2^{n-1}-4}{2}+4=\frac{2^{n-1}+4}{2}$.

Chúng ta lại có: $card(Z(R)^*)=(2^n-1)-2^{n-1}=2^{n-1}-1$. Lại gọi các cạnh của đồ thị *G* ứng với các phần tử thuộc tập $Z(R)^*$ là E_2. Chúng ta sẽ tính số phần tử của E_2.

Trường hợp 1: *n = 2k*, với *k* là số nguyên dương không bé hơn 2.

Đặt $A_i=\{2^i x \mid x\in\{1,...,2^{2k-i}\}$ và $\gcd(2,x)=1\}$ với i =1, 2, … , 2k - 1, khi đó từ $\varphi(2^{2k-i})=2^{2k-1-i}$ suy ra $card(A_i)=2^{2k-1-i}$. Chúng ta sẽ tính bậc đỉnh a_s của tập hợp A_i trong đó *i = k, k + 1, … , 2k - 1* với nhận xét rằng $(2^i x)(2^j y)=0$ (trong đó *x*, *y* là các số nguyên dương lẻ), khi $j\ge 2k-i$. Do đó $\deg(a_s)=\sum_{j=2k-i}^{2k-1}2^{2k-1-j}=\sum_{t=0}^{i-1}2^t=2^i-1$.

Gọi *G'* là đồ thị con của đồ thị *G* với tập đỉnh là $Z(R)^*$ được xây dựng bằng cách bỏ đi các khuyên của đồ thị *G* (suy ra *G'* là đồ thị đơn và tập cạnh là E_2 nhưng bỏ đi các khuyên). Gọi *E'* là số cạnh của đồ thị đơn *G'*, chúng ta có:

$$card(E')=\frac{\left(\sum_{i=1}^{2k-1}\sum_{s\in A_i}\deg(a_s)\right)-\left(card\left(loop(G)\right)-4\right)}{2}=\frac{\left(\sum_{i=1}^{2k-1}2^{2k-1-i}\left(2^i-1\right)\right)-\left(2^k-1\right)}{2}$$

$$=\frac{(2k-1)2^{2k-1}-\sum_{t=0}^{2k-2}2^t-\left(2^k-1\right)}{2}=\frac{(2k-2)2^{2k-1}-2^k+2}{2}.$$

Do đó:

$$card(E_2)=card(E')+\left(card\left(loop(G)\right)-4\right)=\frac{(2k-2)2^{2k-1}-2^k+2}{2}+\left(2^k-1\right)$$

$$=\frac{(2k-2)2^{2k-1}+2^k}{2}=\frac{(n-2)2^{n-1}+2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{2}.$$

Trường hợp 2: n = 2k - 1, với *k* là số nguyên dương không bé hơn 2.

Tính toán tương tự chúng ta có:

$$card(E_2)=\frac{(2k-3)2^{2k-2}+2^{k-1}}{2}=\frac{(n-2)2^{n-1}+2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{2}.$$

Chúng ta nhận thấy đồ thị *G* bao gồm các cạnh nối đỉnh *a, b* sao cho *ab = 1* (cạnh của *G* thuộc E_1) và các cạnh nối đỉnh *c*, *d* sao cho *cd = 0* (cạnh của *G* thuộc E_2). Do đó:

$$card(E) = card(E_1) + card(E_2) = \frac{2^{n-1}+4}{2} + \frac{(n-2)2^{n-1}+2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{2} = \frac{(n-1)2^{n-1}+2^{\left[\frac{n}{2}\right]}}{2} + 2.$$

Ví dụ: Thay *n = 1, n = 2, n = 3, n =4* vào công thức trên chúng ta sẽ thấy phù hợp với các đồ thị ở mục 2.

Mệnh đề 5. *Gọi G là đồ thị lũy đẳng trên vành* $\mathbb{Z}_{2^n}$*. Khi đó:*

a) G luôn có chu trình. Hơn nữa với $n \geq 4$*, đồ thị G luôn có chu trình không tầm thường;*

b) Gọi Γ *là số thành phần liên thông của đồ thị, thì* $\Gamma = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 3, & n=2 \\ \frac{2^{n-1}-4}{2}+5, & n \geq 3 \end{cases}$.

Chứng minh:

a) Với *n = 1*, chúng ta có chu trình tầm thường với $1^2 = 1$ (không có chu trình nào khác); với *n = 2* có các chu trình tầm thường $1^2 = 1$, $2^2 = 0$ và $3^2 = 1$ (không có chu trình nào khác); với *n = 3* có các chu trình tầm thường $1^2 = 1$, $3^3 = 1$, $4^2 = 0$, $5^2 = 0$, $7^2 = 1$ (không có chu trình nào khác).

Với $n \geq 4$, *G* luôn có chu trình tầm thường $1^2 = 1$. Xét các đỉnh $a = 2^{n-1}$, $b = 2^{n-2}$ và $c = 3.2^{n-2}$ của đồ thị *G*. Vì $(n-1)+(n-2) \geq n$ và $2(n-2) \geq n.$ Khi đó 3 đỉnh *a, b, c* của đồ thị *G* lập thành chu trình độ dài 3.

b) Với *n =1*, *n = 2* chứng minh là tầm thường. Với *n* lớn hơn 3, chúng ta có đúng 4 phần tử của vành $\mathbb{Z}_{2^n}$ sao cho $a^2 = 1$ đây chính là 4 chu trình tầm thường. Từ Bổ đề 2, chúng ta có 4 chu trình tầm thường này cũng chính là 4 thành phần liên thông. Với các cạnh của đồ thị *G* nối đỉnh *a*, *b* phân biệt sao cho *ab =1* chúng ta có các thành phần liên thông gồm 2 đỉnh và 1 cạnh. Số các thành phần liên thông dạng này là: $\frac{2^{n-1}-4}{2}$. Với đồ thị con *G'* của *G* gồm các đỉnh *c*, *d* sao cho *cd = 0* có E_2 cạnh. Chúng ta chứng minh *G'* là đồ thị liên thông. Xét các đỉnh *c*, *d* bất kỳ của *G'*, khi đó $c = x.2^i$, *i = 1, 2, ..., n - 1* với *gcd(2, x) = 1* và $d = y.2^j$, *j = 1, 2, ..., n - 1* với *gcd(2, y) = 1*. Khi đó nếu *c.d = 0* thì *c* nối với *d*; nếu *cd* khác không, xét cạnh $e = 2^{n-1}$ có *ce = de = 0* tức là *c* nối với *e*, *d* nối với *e* và có đường đi *ced* nối *c* với *d*. Điều đó khẳng định *G'* là đồ thị liên thông và là một thành phần liên thông của *G.* Vậy số thành phần liên thông của *G* là:

$$\Gamma = 4 + \frac{2^{n-1}-4}{2} + 1 = \frac{2^{n-1}-4}{2} + 5.$$

4. Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi giới thiệu một định nghĩa của đồ thị lũy đẳng khác với của [P. Sharma, S. Dutta, IGR, 2023] và đưa ra một số ví dụ về khái niệm đồ thị lũy này. Chúng tôi đưa ra công thức tính số khuyên, số đỉnh, số cạnh và số thành phần liên thông của đồ thị lũy đẳng trên vành $\mathbb{Z}_{2^n}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

D. F. Anderson and P. S. Livingston (1999), The Zero-Divisor Graph of a Commutative Ring, *Journal of Algebra* Vol. 217, 434-447.

D. K. Basnet, A. Sharma and R. Dutta (2021), Nilpotent Graph, *Theory and Applications of Graphs*, Vol. 8, No. 1, Article 2.

R. Diestel (1997), *Graph Theory*, Springer - Verlag, New York.

P. Sharma and S. Dutta (2023), On Idempotent Graph of Rings, *Palestine Journal of Mathematics*, Vol. 12(1).

I. Reaburn (2005), *Graph Algebras*, Vol. 103 of CBMS Regional Conference Serial in Mathematics. Published for the Conference Board of the Mathematical Science, Washington DC.

R. Wisbauer (1991), *Foundations of Module and Ring Theory*, Gordon and Breach, Reading.