Journal of educational equipment: Applied research, Volume 2, Issue 317 (July 2024)
ISSN 1859 - 0810

Phát triển tư duy sáng tạo cho người học thông qua các bài toán về điểm nằm trong tứ diện

*Trần Hải Yến**

**Khoa GDĐC, Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vinh*

Received: 4/7/2024; Accepted: 9/7/2024; Published: 17/7/2024

***Abstract:** Developing creative thinking involves guiding learners to discover new problems, find new solutions, and create new issues. Innovating teaching methods means shifting from one-way transmission of knowledge to highly interactive teaching that promotes student engagement, initiative, and creativity while fostering confidence, enthusiasm, and creative learning.*

In the mathematics program, spatial geometry holds a particularly important position. In recent years, problems related to equalities and inequalities in spatial geometry have been frequently featured in periodic tests, provincial student competitions, Olympic exams, and university entrance exams, causing considerable difficulties and confusion for both students and teachers. Many students are apprehensive about or lack confidence when approaching spatial geometry problems. Therefore, focusing on analyzing these problems and converting them into basic problem types will enhance the effectiveness of learning

***Keywords:** Creative thinking development, points in a tetrahedron.*

1. Đặt vấn đề

Đổi mới phương pháp dạy học là thay đổi cách dạy học mang tính chất truyền thụ một chiều sang dạy học có tính tương tác cao nhằm phát huy tính tích cực, chủ động, sáng tạo của học sinh (HS), đồng thời tạo niềm tin, hứng thú trong học tập. Trong chương trình toán học hình học không gian có một vị trí đặc biệt quan trọng. Những năm gần đây, các bài toán về đẳng thức và bất đẳng thức trong hình học không gian được khai thác nhiều trong các đề kiểm tra định kỳ, kỳ thi HS giỏi tỉnh, đề thi OLYMPIC, đề thi đại học – cao đẳng đã gây cho HS và giáo viên (GV) không ít khó khăn, lúng túng khi gặp phải. Phần lớn HS rất e ngại tiếp cận bài toán hình học không gian hoặc không tự tin khi gặp dạng toán này bởi các lí do sau:

- Hình học không gian mang tính trừu tượng cao
- HS chưa phân loại được các dạng toán thường gặp, không hình dung ra cách giải các dạng toán, chưa nắm rõ các dấu hiệu bản chất của bài toán.
- Cách giải quyết các dạng toán còn hạn chế, thiếu linh động vì chưa giải được theo nhiều hướng khác nhau.
- Ít có tài liệu viết về điểm đặc biệt của tứ diện, những bài toán nào liên quan đến điểm đó, chưa rõ dấu hiệu bản chất của các dạng toán.

Trăn trở trước thực trạng đó, tôi đã tập trung phân tích các bài toán về đẳng thức, bất đẳng thức, Giá trị lớn nhất – Giá trị nhỏ nhất liên quan đến 1 điểm nằm trong tứ diện, bao gồm:

(1). Bài toán cơ bản về khoảng cách từ đỉnh, điểm M đến mặt đối diện.

(2). Các bài toán đặc biệt hóa: Điểm M nằm trong một mặt phẳng, điểm M là trọng tâm tứ diện, điểm M là trực tâm tứ diện.

Trên nền tảng đó, xây dựng có hệ thống các kĩ năng, phương pháp giải có tính thuyết phục cao.

2. Giải quyết vấn đề

Làm toán là quá trình suy luận nhằm khám phá ra quan hệ logic giữa cái đã cho và cái chưa biết (giữa giả thiết và kết luận). Mỗi bài toán có một cách giải, cách suy luận riêng nên khi đứng trước một bài toán HS thường không biết bắt đầu từ đâu? phải làm như thế nào? Trong quá trình bồi dưỡng HS giỏi, chúng ta không thể dạy hết cho HS tất cả các bài tập cũng như HS không thể làm hết các bài tập đó. Vì vậy để tạo mối liên hệ giữa các bài tập, khi hướng dẫn cho HS giải một bài toán, GV không nên dừng lại ở một bài toán cụ thể; mà sau khi giải bài toán này, HS phải giải quyết xong một loạt vấn đề liên quan mà GV đã định hướng. Quá trình này phải bắt đầu từ các bài toán đơn giản đến phức tạp để rèn luyện năng lực tư duy cho HS. Từ đó giúp HS có cơ sở khoa học khi phân tích, định hướng tìm lời giải cho các bài toán khác và đặc biệt là củng cố cho HS lòng tin vào khả năng làm toán của mình.

Trên cơ sở đó hình thành và định hướng phát triển năng lực tư duy khoa học sáng tạo và tăng cường ở HS ý thức, năng lực vận dụng một cách thông minh những điều đã học.

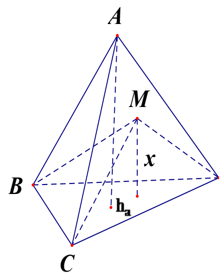
2.1. Bài toán cơ bản

Cho tứ diện *ABCD* và điểm M nằm trong tứ diện đó. Gọi x, y, z, t lần lượt là khoảng cách từ M tới các mặt (BCD), (ACD), (ABD), (ABC). h_a, h_b, h_c, h_d, tương ứng là đường cao kẻ từ A, B, C, D tới các mặt của tứ diện. Chứng minh rằng:

$$\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}+\frac{t}{h_d}=1$$

Giải.

$$\frac{V_{MBCD}}{V_{ABCD}}=\frac{x}{h_a},\frac{V_{MACD}}{V_{ABCD}}=\frac{y}{h_b},$$
$$\frac{V_{MBAD}}{V_{ABCD}}=\frac{z}{h_c},\frac{V_{MBCA}}{V_{ABCD}}=\frac{t}{h_d}$$



Nên

$$\frac{x}{h_a}+\frac{y}{h_b}+\frac{z}{h_c}+\frac{t}{h_d}=\frac{V_{ABCD}}{V_{ABCD}}$$

Vậy ta có đpcm

- Với phương pháp dùng tỷ lệ thể tích, đây là bài toán cơ bản. Từ bài toán này ta có thể đặc biệt hóa, tương tự,bài toán đảo, mở rộng bài toán ta có một số bài toán sau

2.2. Các bài toán đặc biệt hóa

Khai thác đặc biệt của bài toán, xét xem khi M trùng với trọng tâm, trực tâm, tâm đường trong nội và ngoại tiếp, điểm M thuộc một mặt phẳng nào đó của tứ diện thì chúng ta có các đẳng thức và bất đẳng thức, các bài toán tìm GTLN-GTNN nào.

Bài 1. Cho tứ diện ABCD, M là một điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Đường thẳng qua M song song với AD cắt mặt phẳng (BCD) tại A', đường thẳng qua M song song với BD cắt mặt phẳng (ACD) tại B', đường thẳng qua M song song với CD cắt mặt phẳng (ABD) tại C'.

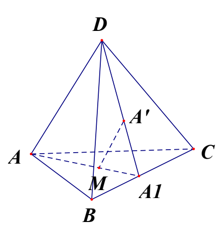
Chứng minh tổng $\frac{MA'}{DA}+\frac{MB'}{DB}+\frac{MC'}{DC}$ không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

Giải

Trong mặt phẳng (ABC): AM cắt BC tại A_1.

BM cắt AC tại B_1 , CM cắt AB tại C_1

Trong (DAA_1): Kẻ đường thẳng qua M song song với AD cắt DA_1 tại A'



Xét tam giác DAA_1 có MA' // AD nên $\frac{MA'}{DA}=\frac{MA_1}{AA_1}=\frac{S_{\Delta MBC}}{S_{\Delta ABC}}$

Tương tự ta có $\frac{MB'}{DB}=\frac{MB_1}{BB_1}=\frac{S_{\Delta MAC}}{S_{\Delta ABC}}$,

$\frac{MC'}{DC}=\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{S_{\Delta MAB}}{S_{\Delta ABC}}$

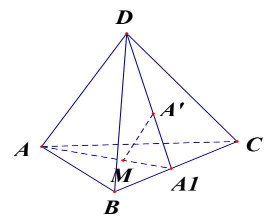
$\frac{MA'}{DA}+\frac{MB'}{DB}+\frac{MC'}{DC}=1\ (do\, S_{MBC}+S_{MAC}+S_{MAB}=S_{ABC})$

không phụ thuộc vào vị trí điểm M

Qua bài toán trên khi M thuộc một mặt của tứ diện, chuyển dùng tỷ lệ thể tích sang dùng tỷ số về diện tích, khi chuyển về tỷ lệ diện tích cần xét trong mặt phẳng nào (trong tam giác nào).

Từ các đẳng thức, bất đẳng thức có thể tạo ra các bài toán về GTLN-GTNN

Bài 2. Cho tứ diện ABCD, M là một điểm bất kì nằm trong tam giác ABC. Các đường thẳng qua M song song với AD, BD, CD tương ứng cắt các mặt phẳng (BCD), (ACD), (ABD) tại A', B', C'. Tìm vị trí điểm M sao cho MA'. MB'.MC' đạt giá trị lớn nhất.



Giải

Theo bài1 ta có

$\frac{MA'}{DA}+\frac{MB'}{DB}+\frac{MC'}{DC}=1\ (do\, S_{MBC}+S_{MAC}+S_{MAB}=S_{ABC})$

Ta có $\frac{MA'}{DA}+\frac{MB'}{DB}+\frac{MC'}{DC}\geq 3\sqrt[3]{\frac{MA'}{DA}.\frac{MB'}{DB}.\frac{MC'}{DC}}$

Suy ra MA'.MB'.MC' $\leq \frac{1}{27}$DA.DB.DC

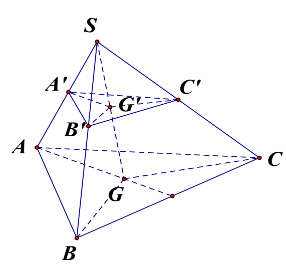
Vậy giá trị lớn nhất MA'.MB'.MC' là $\frac{1}{27}$DA.DB.DC, đạt được khi

$\frac{MA'}{DA}=\frac{MB'}{DB}=\frac{MC'}{DC}=\frac{1}{3}\Rightarrow\frac{MA_1}{AA_1}=\frac{MB_1}{BB_1}=\frac{MC_1}{CC_1}=\frac{1}{3}$

Hay M là trọng tâm tam giác ABC

Nếu điểm M trùng với trọng tâm G của đáy, cắt tứ diện bởi mặt phẳng, chúng ta có các bài toán liên quan đến thiết diện

Bài 3. Cho hình chóp S.ABC. Mặt phẳng (P) lần lượt cắt các cạnh SA, SB, SC, SG tại A', B', C', G'. Trong đó G là trọng tâm tam giác ABC



Chứng minh rằng:

Journal of educational equipment: Applied research, Volume 2, Issue 317 (July 2024)
ISSN 1859 - 0810

$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'}$

Giải

$$\frac{V_{S.A'B'G'}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{3}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SG'}{SG}$$

$$\frac{V_{S.A'C'G'}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{3}.\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SG'}{SG}$$

$$\frac{V_{S.C'B'G'}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{3}.\frac{SC'}{SC}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SG'}{SG}$$

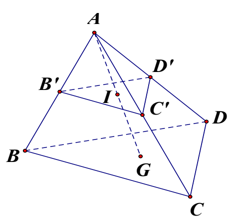
$$\frac{V_{S.A'B'G'}}{V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.A'C'G'}}{V_{S.ABC}}+\frac{V_{S.C'B'G'}}{V_{S.ABC}}=$$

$$\frac{1}{3}\frac{SG'}{SG}\left(\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}+\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}+\frac{SC'}{SC}.\frac{SB'}{SB}\right)$$

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{1}{3}\frac{SG'}{SG}\left(\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}+\frac{SA'}{SA}.\frac{SC'}{SC}+\frac{SC'}{SC}.\frac{SB'}{SB}\right) \text{ (1).}$$

Mặt khác (2). Từ (1) và (2) ta có

$$\frac{SA}{SA'}+\frac{SB}{SB'}+\frac{SC}{SC'}=3\frac{SG}{SG'}$$



Bài 4. Cho tứ diện ABCD, G là trọng tâm tam giác BCD. mặt phẳng đi qua trung điểm I của AG cắt các điểm AB, AC, AD tại các điểm khác A. Gọi h_A,h_B, h_C, h_D lần lượt là khoảng cách từ A, B ,C, D đến mp

Chứng minh rằng: $\frac{{h_B}^2+{h_C}^2+{h_D}^2}{3}\geq {h_A}^2$

Giải

Gọi B', C', D' lần lượt giao điểm của mp (α) với các cạnh AB, AC, AD.

Ta có $V_{AGBC}=V_{AGCD}=V_{AGDB}=\frac{1}{3}V_{ABCD}$ (*)

Vì $V_{AB'C'D'}=V_{AIB'C'}+V_{AIC'D'}+V_{AID'B'}$ và (*) nên

$$\frac{V_{AB'C'D'}}{V_{ABCD}}=\frac{V_{AIB'C'}}{3V_{AGBC}}+\frac{V_{AIC'D'}}{3V_{AGCD}}+\frac{V_{AID'B'}}{3V_{AGDB}}$$

$$\Leftrightarrow\frac{AB'.AC'.AD'}{AB.AC.AD}=\frac{AI.AB'.AC'}{3.AG.AB.AC}+\frac{AI.AC'.AD'}{3.AG.AC.AD}+\frac{AI.AD'.AB'}{3.AG.AD.AB}$$

$$\Leftrightarrow\frac{AB}{AB'}+\frac{AC}{AC'}+\frac{AD}{AD'}=3.\frac{AG}{AI}=6$$

$$\Leftrightarrow\frac{BB'}{AB'}+\frac{CC'}{AC'}+\frac{DD'}{AD'}=3$$

Mặt khác ta có $\frac{BB'}{AB'}=\frac{h_B}{h_A},\frac{CC'}{AC'}=\frac{h_C}{h_A},\frac{DD'}{AD'}=\frac{h_D}{h_A}$

Suy ra $\frac{h_B}{h_A}+\frac{h_C}{h_A}+\frac{h_D}{h_A}=3\Leftrightarrow h_B+h_C+h_D=3h_A$ (**)

Ta có: $(h_B+h_C+h_D)^2\leq 3\left(h_B^2+h_C^2+h_D^2\right)$

$\Leftrightarrow(h_B-h_C)^2+(h_C-h_D)^2+(h_D-h_B)^2\geq 0$ (luôn đúng)

Kết hợp với (**) ta được $(3h_A)^2\leq 3\left(h_B^2+h_C^2+h_D^2\right)$

Hay $\frac{h_B^2+h_C^2+h_D^2}{3}\geq h_A^2$.

Nếu điểm M trùng với trọng tâm G của tứ diện, yêu cầu HS cần nắm rõ các nội dung sau:

+ $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

+ G là giao điểm của các đoạn thẳng nối trung điểm các cạnh đối diện

+ G là giao điểm của các đoạn thẳng nối đỉnh và trọng tâm của mặt đối diện

+ G chia đoạn AG_1 theo tỉ lệ (G_1 là trọng tâm tam giác BCD)

Cùng với các tứ diện đặc biệt, chúng ta có các đẳng thức và bất đẳng thức thú vị trong các đề thi HS giỏi

3. Kết luận

Để rèn luyện kỹ năng giải toán cho người học, GV cần đưa ra một hệ thống các bài tập đa dạng, được sắp xếp một cách hợp lí từ dễ đến khó nhằm giúp HS củng cố kiến thức, rèn luyện kỹ năng phát triển tư duy và biết áp dụng toán học vào thực tiễn. GV phải là người dẫn đường tốt cho người học bằng cách định hướng cho người học, nắm rõ đối tượng người học để đưa ra phương pháp cũng như hệ thống bài tập phù hợp người học.

Trong khi dạy học, GV phải chú ý đến việc tạo tâm thế hứng thú học tập cho người học. Người học có phương pháp, hệ thống bài tập giải các đẳng thức, bất đẳng thức, GTLN - GTNN về điểm nằm trong tứ diện.

Tài liệu tham khảo

[1]. Văn Như Cương (Chủ biên), Phạm Khắc Ban, Tạ Mân (2008), *Bài tập Hình học 11 nâng cao*, NXB Gáo dục. Hà Nội.

[2]. Văn Như Cương (Chủ biên), Lê Huy Hùng, Tạ Mân (2008), *Bài tập Hình học 12 nâng cao*, NXB Giáo dục. Hà Nội.

[3]. Phan Huy Khải (2008), *Toán nâng cao hình học, tập 2*, NXB Hà Nội.

[4]. Phan Đức Chính, Vũ Dương Thụy, Đào Tam, Lê Thống Nhất (1995), *Các bài giảng luyện thi môn Toán, Tập 1*, NXB Giáo dục. Hà Nội.

[5]. Tuyển tập đề thi OLYMPIC toán học (2009), NXB Sư Phạm. Hà Nội.

[6]. Đỗ Thanh Sơn (2007), *Bồi dưỡng HS giỏi THPT*, NXB Giáo dục. Hà Nội.

[7]. Toán học và tuổi trẻ, quyển 3, NXB Giáo dục. Hà Nội.