Journal of educational equipment: Applied research, Volume 1, Issue 318 (August 2024)
ISSN 1859 - 0810

Ứng dụng Toán học vào bài toán tìm điểm cân bằng NASH của một số mô hình COURNOT

Phạm Thị Hồng Hạnh*, Lê Thị Liễu*

**Bộ môn Toán, Học viện Tài chính*

Received: 16/7/2024; Accepted:25/7/2024; Published:3/8/2024

***Abstract**: Optimization is a scientific category that is of great interest in research and application in practice, especially in economics, because it helps solve the inevitable and objective needs of producers and consumers. The article illustrates how to find Nash equilibrium through a number of Cournot competition models, this is one of the solutions to the profit maximization model of many businesses operating in the same field.*

***Keywords:** Nash equilibrium, Cournot competition model.*

1. Đặt vấn đề

Nền kinh tế Việt Nam là nền kinh tế thị trường định hướng xã hội chủ nghĩa nên đối tượng nghiên cứu trong lĩnh vực kinh tế ngày càng đa dạng và phức tạp cả về quy mô lẫn các mối quan hệ. Người ta có thể sử dụng nhiều phương pháp tiếp cận khác nhau để nghiên cứu, phân tích và dự báo chiều hướng phát triển kinh tế của một Quốc gia. Phương pháp Mô hình Toán kinh tế là một trong những phương pháp tiếp cận hữu ích và có hiệu quả trong phân tích kinh tế hiện nay vì phương pháp này kết hợp được nhiều ưu điểm của các cách tiếp cận hiện đại, đồng thời khai thác được nhiều công cụ mạnh của Toán học.

Khi lý thuyết trò chơi của Nash ra đời, một khái nhiệm mới được hình thành đó là lý thuyết cân bằng. Trong bài viết này, chúng tôi sẽ minh họa việc tìm điểm cân bằng Nash là điểm sản lượng mà các doanh nghiệp cùng cung cấp một loại sản phẩm giống hệt nhau, cạnh tranh nhau về số lượng sản phẩm sản xuất, đạt được lợi nhuận tối đa. Những ví dụ minh hoạ trong bài viết khẳng định vai trò và ý nghĩa của các công cụ Toán học trong nghiên cứu kinh tế. Bài viết là tài liệu tham khảo hữu ích cho các nhà Toán học, các nhà kinh tế đồng thời cũng là tài liệu có giá trị đối với sinh viên các khối ngành kinh tế, tài chính.

2. Ứng dụng cân bằng Nash trong một số mô hình Cournot

2.1. Định nghĩa cân bằng Nash

Trước hết ta định nghĩa cân bằng Nash theo lý thuyết trò chơi như sau:

Cho (S, f) là một trò chơi với n người trong đó S_i là tập chiến thuật của người chơi thứ i, $S = S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ là tập hợp chiến thuật của mọi người chơi để xác định hành động trong trò chơi và $f = (f_1(X),\ldots,f_n(X))$ là kết quả với mỗi $X \in S$. Gọi x_i là chiến thuật của người chơi thứ i và $x_{-[i]}$ là chiến thuật của các người chơi còn lại. Khi mỗi người chơi thứ $i \in \{1,2,\ldots,n\}$, chọn chiến thuật x_i trong tập chiến thuật của mọi người chơi $X = (x_1, x_2,\ldots,x_n)$ thì người chơi thứ i nhận được kết quả $f_i(X)$. Một tập chiến thuật của mọi người chơi $X^* \in S$ là trạng thái cân bằng Nash nếu như không có một sự thay đổi chiến thuật đơn phương của người chơi nào được hưởng lợi từ nó, tức là:

$$\forall i, x_i \neq x_i^* : f_i\left(x_i^*, x_{-[i]}^*\right) \geq f_i\left(x_i, x_{-[i]}^*\right).$$

2.2. Mô hình cạnh tranh Cournot

Mô hình cạnh tranh Cournot là một mô hình kinh tế mô tả cấu trúc của một ngành mà các công ty đối thủ cung cấp một loại sản phẩm giống hệt nhau, cạnh tranh nhau về số lượng sản phẩm sản xuất, một cách độc lập và đồng thời.

Các công ty hoạt động trong thị trường độc quyền tập đoàn thường cạnh tranh bằng cách tìm cách chiếm thị phần của nhau, thường là thay đổi số lượng hàng hoá được bán ra.

Theo quy luật cung cầu: sản lượng cao hơn khiến giá giảm còn sản lượng thấp hơn khiến giá tăng. Do đó, các công ty phải xem xét số lượng mà một đối thủ cạnh tranh có khả năng tung ra để có cơ hội tối đa hoá lợi nhuận.

Tóm lại, các công ty đều muốn tối đa hoá lợi nhuận của công ty mình căn cứ vào quyết định của các đối thủ cạnh tranh và mỗi quyết định về sản lượng sản phẩm của công ty đều ảnh hưởng đến giá của sản phẩm.

Ta xét một dạng đơn giản của mô hình cạnh trạnh Cournot như sau:

Giả sử có n công ty cùng sản xuất và tiêu thụ một loại sản phẩm với sản lượng của công ty i là

Journal of educational equipment: Applied research, Volume 1, Issue 318 (August 2024)
ISSN 1859 - 0810

$q_i(i=\overline{1,n})$. Gọi f_i tương ứng là hàm lợi nhuận của công ty $i(i=\overline{1,n})$. Đặt $Q=(q_1,q_2,\ldots,q_n)$ là mức sản lượng của n công ty. Với mức sản lượng của công ty i là q_i, gọi $q_{-[i]}$ là mức sản lượng của $(n-1)$ công ty còn lại trong véc tơ Q.

Điểm Q^* được gọi là điểm cân bằng Nash nếu $\forall i=\overline{1,n}$ ta có

$$f_i\left(q_i^*,q_{-[i]}^*\right)\geq f_i\left(q_i,q_{-[i]}^*\right),\forall q_i\neq q_i^*.$$

Tức là $f_i\left(q_i^*\right)=\max\limits_{q_i} f_i\left(q_i,q_{-[i]}^*\right),\forall i=\overline{1,n}$ (*)

Ý nghĩa kinh tế của công thức (*) là: nếu công ty i quyết định tung ra thị trường số lượng sản phẩm $q_i\neq q_i^*$, trong khi các công ty khác vẫn giữ nguyên sản lượng của mình là $q_j^*, j\neq i$ thì lợi nhuận của công ty i không tăng.

Như vậy, các công ty muốn cùng tối đa hóa lợi nhuận thì phải chọn phương án sản lượng sản phẩm tại điểm cân bằng.

Chúng ta sẽ minh họa việc tìm điểm cân bằng Nash của mô hình cạnh tranh Cournot qua một số ví dụ sau:

3. Một số ví dụ

3.1. Ví dụ 1

Xét mô hình trong đó gồm 2 hãng sản xuất một loại sản phẩm với sản lượng lần lượt là q_1, q_2. Mỗi sản phẩm sản xuất ra sẽ tốn một chi phí cận biên cố định là c. Giá một đơn vị sản phẩm phụ thuộc vào số lượng sản phẩm của cả 2 hãng và được cho bởi $p=a-b\left(q_1+q_2\right)$.

Ta cần tìm điểm cân bằng Nash của mô hình để tối đa hoá lợi nhuận của cả 2 hãng.

Lời giải

Bài toán tối đa hoá lợi nhuận của hãng 1 là:

$$\begin{cases}\Pi_1\left(q_1\right)=pq_1-cq_1\rightarrow max\\ q_1\geq 0.\end{cases}\quad \text{(I)}$$

Ta có: $\Pi_1(q_1)=aq_1-bq_1^2-bq_1q_2-cq_1$.

$\Pi_1^{'}(q_1)=a-2bq_1-bq_2-c=0\Leftrightarrow q_1=\dfrac{a-c}{2b}-\dfrac{q_2}{2}$.

$\Pi_1^{''}(q_1)=-2b<0\Leftrightarrow b>0$.

Do đó, nghiệm của mô hình (I) là $q_1^*=\dfrac{a-c}{2b}-\dfrac{q_2}{2}$.

Bài toán tối đa hoá lợi nhuận của hãng 2 là:

$$\begin{cases}\Pi_2\left(q_2\right)=pq_2-cq_2\rightarrow max\\ q_2\geq 0.\end{cases}\quad \text{(II)}$$

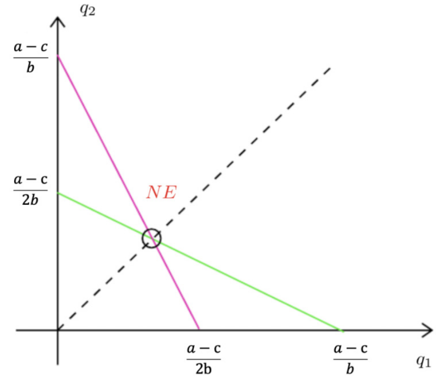
Ta có: $\Pi_2(q_2)=aq_2-bq_2^2-bq_1q_2-cq_2$.

$\Pi_2^{'}\left(q_2\right)=a-2bq_2-bq_1-c=0\Leftrightarrow q_2=\dfrac{a-c}{2b}-\dfrac{q_1}{2}$.

$\Pi_2^{''}\left(q_2\right)=-2b<0\Leftrightarrow b>0$.

Do đó, nghiệm của mô hình (II) là

$$q_2^*=\frac{a-c}{2b}-\frac{q_1}{2}.$$



Hình 1.

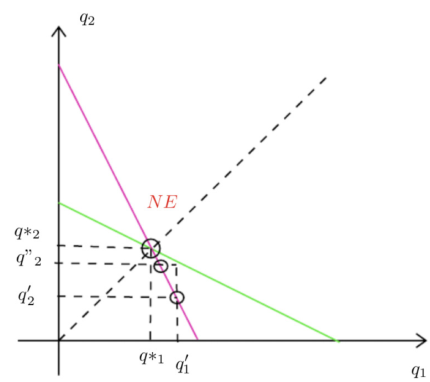
Dựa vào đồ thị trên Hình 1 thì điểm cân bằng Nash của mô hình chính là giao điểm của hai đường trên. Toạ độ điểm cân bằng Nash là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}q_1^*=\dfrac{a-c}{2b}-\dfrac{q_2^*}{2}\\ q_2^*=\dfrac{a-c}{2b}-\dfrac{q_1^*}{2}\end{cases}\Leftrightarrow q_1^*=q_2^*=\frac{a-c}{3b}.$$

Cả hai hãng đều đạt lợi nhuận tối đa khi tung ra thị trường mức sản lượng $A=\dfrac{a-c}{3b}$, lúc này cả 2 hãng sẽ tiếp tục giữ vững kế hoạch vì nếu thay đổi sẽ dẫn đến lỗ hoặc không thể đạt lợi nhuận cao hơn hãng kia.

Trên thực tế, trạng thái cân bằng Nash trong mô hình trên không dễ đạt được. Tuy nhiên, với mỗi lựa chọn mức sản lượng ban đầu $q_2^{'}$ của hãng 2, hãng 1 sẽ lựa chọn $q_1^{'}$ tốt hơn q_1. Sau đó, hãng 2 lại thay đổi mức sản lượng thành $q_2^{''}$ tốt hơn $q_2^{'}$… Cứ tiếp tục như vậy, cả 2 hãng sẽ dần tiến đến trạng thái cân bằng Nash:

$$\begin{cases}q_1\rightarrow q_1^*\\ q_2\rightarrow q_2^*\end{cases}.$$



Hình 2.

3.2. Ví dụ 2

Xét mô hình trong đó gồm 2 hãng sản xuất một loại sản phẩm với sản lượng lần lượt là q_1, q_2. Giá một đơn vị sản phẩm phụ thuộc vào số lượng sản phẩm của cả 2 hãng và được cho bởi $p = 45 - (q_1 + q_2)$ Giả sử cả 2 hãng đều có hàm chi phí cận biên bằng 0.

Ta cần tìm điểm cân bằng Nash của mô hình để tối đa hoá lợi nhuận của cả 2 hãng.

Sử dụng kết quả của ví dụ 1 với $a = 45$, $b = 1$, $c = 0$ ta được mức sản lượng của mỗi hãng để lợi nhuận tối đa là: $q_1^* = q_2^* = 15$.

Khi đó, mức giá bán tối ưu là $p^* = 15$.

3.3. Ví dụ 3

Xét mô hình trong đó có hai đối thủ cạnh tranh hoạt động trong thị trường độc quyền nhóm, cùng sản xuất một loại sản phẩm với sản lượng lần lượt là Q_1, Q_2. Đối với người tiêu dùng, sản phẩm của hai công ty có tính thay thế hoàn toàn. Hàm cầu thị trường là $q = 150 - 2Q$ với $Q = (Q_1 + Q_2)$. Hàm tổng chi phí của hai công ty tương ứng là:

$TC_1 = 30Q_1 + 300, TC_2 = 30Q_2 + 400.$

a) Hai công ty cạnh tranh nhau theo mô hình Nash – Cournot, nghĩa là mỗi công ty phải đưa ra quyết định đồng thời về mức sản lượng của mình dựa trên sự phán đoán về mức sản lượng của đối thủ. Hãy tìm điểm cân bằng Nash trong mô hình Cournot. Khi đó, sản lượng cung ứng và lợi nhuận của mỗi công ty là bao nhiêu?

b) Nếu hai công ty cấu kết và hoạt động như một nhà độc quyền hoàn toàn thì sản lượng, mức giá thị trường và lợi nhuận của mỗi công ty là bao nhiêu?

Lời giải

a) Giá một đơn vị sản phẩm là $q = 150 - 2(Q_1 + Q_2)$

Ta cần tìm điểm cân bằng Nash của mô hình để tối đa hoá lợi nhuận của cả 2 công ty.

Bài toán tối đa hoá lợi nhuận của công ty 1 là:

$$\begin{cases} \Pi_1(Q_1) = pQ_1 - TC_1 \to max \\ Q_1 \geq 0. \end{cases} \quad \text{(I)}$$

Ta có: $\Pi_1(Q_1) = 120Q_1 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - 300.$

$\Pi_1'(Q_1) = 120 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0 \Leftrightarrow Q_1 = 30 - \dfrac{Q_2}{2}.$

$\Pi_1''(Q_1) = -4 < 0.$

Do đó, nghiệm của mô hình (I) là $Q_1^* = 30 - \dfrac{Q_2}{2}.$

Bài toán tối đa hoá lợi nhuận của công ty 2 là:

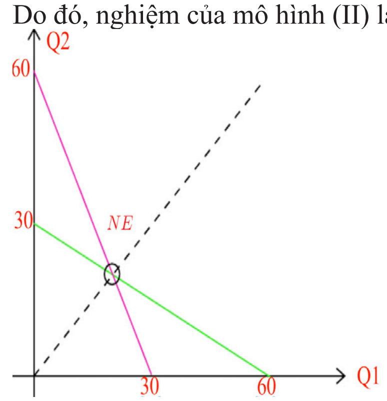
$$\begin{cases} \Pi_2(Q_2) = pQ_2 - TC_2 \to max \\ Q_2 \geq 0. \end{cases} \quad \text{(II)}$$

Ta có: $\Pi_2(Q_2) = 120Q_2 - 2Q_2^2 - 2Q_1Q_2 - 400.$

$\Pi_2'(Q_2) = 120 - 2Q_1 - 4Q_2 = 0 \Leftrightarrow Q_2 = 30 - \dfrac{Q_1}{2}.$

$\Pi_2''(Q_2) = -4 < 0.$

Do đó, nghiệm của mô hình (II) là $Q_2^* = 30 - \dfrac{Q_1}{2}.$



Hình 3.

Dựa vào đồ thị trên hình 3 thì điểm cân bằng Nash của mô hình chính là giao điểm của đường màu xanh và đường màu hồng. Toạ độ điểm cân bằng Nash là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} Q_1^* = 30 - \dfrac{Q_2^*}{2} \\ Q_2^* = 30 - \dfrac{Q_1^*}{2} \end{cases} \Leftrightarrow Q_1^* = Q_2^* = 20.$$

Cả hai công ty đều đạt lợi nhuận tối đa khi tung ra thị trường mức sản lượng $Q_1^* + Q_2^* = 20$ lúc này cả 2 công ty sẽ tiếp tục giữ vững kế hoạch vì nếu thay đổi sẽ dẫn đến lỗ hoặc lợi nhuận không tối đa.

Như vậy, trong trường hợp hai công ty cạnh tranh nhau theo mô hình Nash – Cournot thì mức sản lượng tối ưu là $Q_1^* + Q_2^* = 20$, mức lợi nhuận tối đa của hai công ty là $\Pi_1 = 500$, $\Pi_2 = 400$, người tiêu dùng mua sản phẩm với giá bán là $p = 70$.

b) Nếu hai công ty cấu kết và hoạt động như một nhà độc quyền hoàn toàn thì mô hình tối đa hoá lợi nhuận lúc này là:

$$\begin{cases} \Pi(Q) = pQ - TC_1 - TC_2 \to max \\ Q \geq 0. \end{cases}$$

Ta có: $\Pi(Q) = 150Q - 2Q^2 - 30Q - 700.$

$\Pi'(Q) = 120 - 4Q = 0 \Leftrightarrow Q_1^* = Q_2^* = 15.$

$\Pi''(Q) = -4 < 0.$

Do đó, mức sản lượng tối ưu là $Q_1^* = Q_2^* = 15,$ mức lợi nhuận tối đa của hai công ty là $\Pi_1 = 600, \Pi_2 = 500,$ người tiêu dùng mua sản phẩm với giá bán là $p = 90$.

Hay lợi nhuận công ty tăng lên do người tiêu dùng phải bỏ ra số tiền lớn hơn để mua cùng một đơn vị sản phẩm.

4. Kết luận

Bài viết trình bày khái niệm cân bằng Nash trong lý thuyết trò chơi và vận dụng khái niệm đó vào mô hình Cournot, từ đó minh họa cách tìm điểm cân bằng Nash qua một số mô hình Cournot đơn giản, đây là một trong các phương pháp giải mô hình tối đa hóa lợi nhuận của các doanh nghiệp cùng cung cấp một loại sản phẩm trên thị trường.

Tài liệu tham khảo

[1]. Nguyễn Văn Quý (2018): *Giáo trình Toán cao cấp,* NXB Tài chính.

[2]. Nguyễn Văn Quý (2023): *Tiếp cận cân bằng Nash với bài toán người tiêu dùng,* Kỷ yếu hội thảo khoa học cấp học viện năm 2023, Học viện Tài chính, 161 – 168.

[3]. Nguyễn Văn Quý, Lê Thị Liễu (2023): *Từ tối ưu hoá đến cân bằng nhìn từ góc độ doanh nghiệp,* Hội thảo khoa học thường niên Khoa Cơ bản năm 2023, Học viện Tài chính, 16 – 22.

[4]. https://www.studocu.com/vn/document/dai-hoc-khoa-hoc-tu-nhien-dai-hoc-quoc-gia-thanh-pho-ho-chi-minh/toan-roi-rac/ly-thuyet-can-bang-nash-giao-su-bach/72219417

[5]. https://www.studocu.com/vn/document/truong-dai-hoc-ngoai thuong/microeconomics/bai-tap-vi-mo-2-co-loi-giai-rat-hay/10323072

Thiết kế trò chơi phát triển vốn từ...... *(tiếp theo trang 20)*

- Phát triển khả năng giao tiếp và hợp tác nhóm.

*** Chuẩn bị:**

Gạch nhựa xây dựng, hàng rào, thú nhựa, cây xanh, logo.

*** Cách chơi:**

- Trẻ cùng nhau thảo luận, phân chia nhau nhiệm vụ để xây thành công viên, có phân khu

- Trẻ biết vào vai chơi và trao đổi cùng bạn khi chơi

*** Luật chơi:**

Thỏa thuận vai chơi, làm theo nhiệm vụ phân công.

*2.3.6. Trò chơi góc văn học: **"Cùng nhau sáng tạo"***

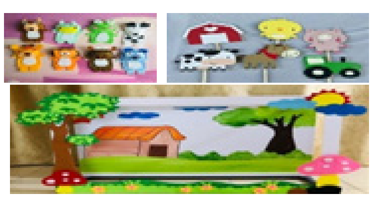
*** Mục tiêu:**

- Phát triển ngôn ngữ, mở rộng VT, cách sử dụng câu, từ, sáng tạo tình tiết

- Phát triển khả năng giao tiếp, mạnh dạn, tự tin nói chuyện

*** Chuẩn bị:**

Rối các loại, tranh phong cảnh.



*** Cách chơi:**

Trẻ cùng phối hợp kể lại câu chuyện hoặc sáng tạo câu chuyện dựa trên nhân vật trẻ tự chọn

Ví dụ: Trẻ chọn làm cáo, trẻ chọn làm voi, trẻ chọn làm gà,… Sau đó cùng nhau kể một câu chuyện theo ý của nhóm trẻ, bằng chính ngôn ngữ của mình

*** Luật chơi:**

Tham gia chơi cùng nhau, tự sáng tạo không bị gò ép

3. Kết luận

TKTC qua HĐG là một trong những công cụ, phương tiện khá hiệu quả được các nhà sư phạm lựa chọn để hoàn thiện ở trẻ 4-5 tuổi những KN cơ bản, đặc biệt PTVT. Những TC được thiết kế chứa đựng trong đó niềm kì vọng của chúng tôi về một không gian vui tươi, nhẹ nhàng, thân thương dành cho trẻ. Mỗi TC được thiết kế ở các góc đều chứa đựng ý tưởng phát triển tư duy, PTVT cho trẻ 4-5 tuổi. Trên cơ sở những nguyên tắc đảm bảo tính mục đích, tính hấp dẫn, tính hệ thống, tính đa dạng, sự phù hợp và phát triển của trẻ, bài báo đã đề xuất quy trình TKTC nhằm PTVT cho trẻ 4-5 tuổi thông qua HĐG tại trường MN Măng Non III, quận 10, thành phố Hồ Chí Minh, góp phần nâng cao chất lượng trong chăm sóc và giáo dục trẻ MN.

Tài liệu tham khảo

[1] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2021). *Chương trình giáo dục mầm non, ban hành kèm Thông tư số 01/VBHN-BGDĐT ngày 13 tháng 4 năm 2021.*

[2] Nguyễn Thị Oanh (2009), *Bài tập tình huống giáo dục trong tổ chức hoạt động góc cho trẻ mẫu giáo,* NXB Giáo dục, Hà Nội.

[3] Hoàng Phê (chủ biên), (2009), *Từ điển Tiếng Việt,* NXB Đà Nẵng.