Journal of educational equipment: Applied research, Volume 2, Issue 319 (August 2024)
ISSN 1859 - 0810

Một số đề xuất trong dạy học nội dung biện luận nghiệm của hệ phương trình tuyến tính cho sinh viên khối kinh tế, kỹ thuật

Lê Lương Vương*

**Trường Đại học Công nghiệp thành phố Hồ Chí Minh*

Received: 20/7/2024; Accepted:29/7/2024; Published:5/8/2024

Abstract: *In the advanced mathematics curriculum for economics and engineering students at universities, the content of linear systems of equations is highly emphasized due to its applicability in solving specialized problems within the students' fields of study. Therefore, identifying appropriate teaching methods and content to achieve effective outcomes is always a current issue. Based on survey results regarding the difficulties students face when solving problems related to the analysis of solutions for linear systems of equations, this paper offers several suggestions to improve the effectiveness of teaching and learning linear systems of equations for students in economics and engineering disciplines.*

Keywords: *Linear systems of equations, matrix rank, solution analysis of linear systems of equations.*

1. Mở đầu

Hệ phương trình tuyến tính (HPTTT) có vai trò và ứng dụng quan trọng để giải quyết các bài toán thực tế từ kỹ thuật đến kinh tế... Vì vậy, trong chương trình môn Toán cao cấp của hầu hết các trường đại học, nội dung HPTTT luôn được đưa vào để giảng dạy cho sinh viên (SV).

Để giải quyết các dạng toán liên quan đến HPTTT, SV cần vận dụng các kiến thức tương đối mới đó là ma trận, định thức. Nhằm tìm hiểu những khó khăn mà SV gặp phải trong quá trình lĩnh hội kiến thức từ đó đưa ra một số đề xuất cho việc giảng dạy nhằm giúp SV hiểu và vận dụng kiến thức trong giải quyết các bài toán liên quan. Để làm cơ sở cho những nhận định trong nghiên cứu của mình, chúng tôi đã tiến hành khảo sát về những khó khăn mà sinh viên gặp phải trong quá trình tham gia học nội dung này.

Về bố cục của bài viết, ngoài phần mở đầu và tài liệu tham khảo, nội dung chính của bài viết được trình bày trong phần nội dung nghiên cứu. Trong phần này, đầu tiên chúng tôi thống kê kết quả khảo sát về những khó khăn mà sinh viên thường gặp khi tham gia học phần HPTTT, tiếp đến chúng tôi trình bày ngắn gọn về định nghĩa hạng của ma trận cũng như HPTTT và phương pháp Gauss để giải HPTTT. Trọng tâm của phần này là đưa ra những đề xuất cũng như giải pháp thực hiện trong quá trình dạy học nội dung HPTTT để giúp sinh viên khắc phục những khó khăn thường gặp. Mục đích là làm sao cho sinh viên tiếp thu kiến thức và vận dụng nó vào giải quyết các vấn đề liên quan một cách hiệu quả. Phần kết luận của bài viết khẳng định lại ý nghĩa của vấn đề nghiên cứu và đưa ra định hướng mở rộng nghiên cứu của vấn đề trong tương lai

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Thực trạng khảo sát dạy học nội dung biện luận nghiệm của hệ phương trình tuyến tính cho sinh viên khối kinh tế, kỹ thuật

Dựa trên quá trình giảng dạy và kết quả kiểm tra đánh giá SV, tác giả tiến hành khảo sát 46 SV đại học ở các lớp khác nhau thuộc Khóa 19 của Trường Đại học Công nghiệp thành phố Hồ Chí Minh (những SV này có học môn Toán Cao cấp 2 chứa nội dung HPTTT) một số câu hỏi liên quan đến các bài toán về HPTTT và thu được trả lời của SV với kết quả sau:

Câu 1. Khi học về HPTTT, bạn thường gặp khó khăn về dạng toán nào?

Câu trả lời	Số lượng chọn	Tỉ lệ %
Giải HPTTT dạng Cramer	2	4,3
Giải HPTTT dạng tổng quát (dùng phương pháp Gauss)	12	26,1
Biện luận số nghiệm của HPTTT	38	82,6

Câu 2. Trong quá trình giải các dạng toán về HPTTT, bạn thường gặp trở ngại gì?

Câu trả lời	Số lượng chọn	Tỉ lệ %
Không nắm rõ định lý Kronecker – Capelli	26	56,5
Tìm hạng của ma trận	37	80,4
Tính định thức	4	8,7

Câu 3. Bạn thường gặp khó khăn gì khi bài toán về HPTTT có tham số yêu cầu?

Câu trả lời	Số lượng chọn	Tỉ lệ %
Tìm tham số để HPTTT vô nghiệm	4	8,7
Tìm tham số để HPTTT có nghiệm	13	28,3
Tìm tham số để HPTTT có nghiệm duy nhất	5	10,9
Tìm tham số để hai HPTTT có nghiệm chung	42	91,3

Kết quả cho thấy khó khăn chính mà SV thường gặp liên quan đến việc biện luận nghiệm của HPTTT đó là tìm hạng của ma trận có chứa tham số, vận dụng định lý Kronecker – Capelli, tìm tham số để hai hệ có nghiệm chung. Dựa vào kết quả khảo sát quả này, bài viết trình bày một số đề xuất thiết thực để nâng cao hiệu quả dạy và học.

2.2. Một số đề xuất trong dạy học nội dung biện luận nghiệm của hệ phương trình tuyến tính cho sinh viên khối kinh tế, kỹ thuật

Phần này nhắc lại những khái niệm cơ bản về HPTTT và đưa ra những đề xuất mang tính thực tế giúp cho việc truyền đạt nội dung đến SV mang lại hiệu quả cao nhất.

2.2.1. Hệ phương trình tuyến tính

a. Định nghĩa. HPTT là hệ có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (I)$$

$a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2,\dots,m;\ j = 1,2,\dots,n)$.

Với $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

gọi là ma trận hệ số, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ là ma trận hệ số tự do, $\overline{A} = (A \mid B)_{m\times(n+1)}$ là ma trận hệ số mở rộng,

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ là ma trận cột của ẩn.

Hệ phương trình (*I*) được viết dưới dạng ma trận là $AX = B$.

Ta gọi $\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$ là một nghiệm của hệ (I) nếu $A\alpha = B$.

b. Giải hệ phương trình bằng phương pháp Gauss

Xét hệ $AX = B$ (I) với ma trận mở rộng như sau

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Để giải hệ (I) ta thực hiện các bước sau:

Bước 1. Lập ma trận mở rộng $\overline{A}$

Bước 2. Đưa $\overline{A}$ về ma trận bậc thang bằng các phép biến đổi sơ cấp dòng

Bước 3. Viết lại hệ và giải ngược từ dưới lên trên.

Vì những khó khăn của SV cơ bản liên quan đến bài toán chứa tham số nên các phần trình bày tiếp theo cũng tập trung cho bài toán chứa tham số.

c. Hạng của ma trận

- Định nghĩa hạng của ma trận. Cho ma trạn A. Hạng của ma trận A, ký hiệu $r(A)$, bằng số dòng khác không của ma trận bậc thang nhận được từ A bằng một số hữu hạn các phép biến đổi sơ cấp.

- Chú ý. Hạng của ma trận không thay đổi khi ta hoán vị dòng hay cột.

- Thuật toán tìm hạng của ma trận

Bước 1. Đưa ma trận cần tìm hạng về dạng bậc thang.

Bước 2. *Số dòng khác không* của ma trận bậc thang *chính là hạng* của ma trận đã cho.

2.2.2. Một số đề xuất khi biện luận nghiệm của hệ phương trình

Dựa vào khó khăn mà SV thường gặp trong quá trình học nội dung này, chúng tôi đưa ra một số đề xuất về các nội dung mà trong quá trình giảng dạy, giảng viên nên dành nhiều thời gian hơn để giúp SV hiểu và vận dụng được như sau.

a. Định lý Kronecker – Capelli

- Định lý. HPTTT tổng quát $AX = B$ (I) có nghiệm khi và chỉ khi $r(A) = r(\overline{A})$.

- Chú ý. i) Ta có $r(A) \le r(\overline{A})$

ii) nếu $r(A) = r(\overline{A}) = n$ thì hệ (I) có nghiệm duy nhất.

iii) Nếu $r(A) = r(\overline{A}) < n$ thì hệ (I) có vô số nghiệm, trong đó có $n - r(A)$ ẩn tự do được lấy tùy ý.

Ví dụ 1. Biện luận HPTTT

$$\begin{cases} 2x+3y-z=1 \\ 4x+(m+5)y+(m-3)z=m+2 \\ 8x+12y+(m-4)z=m+4 \end{cases}$$

Ta có $\overline{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 4 & m+5 & m-3 & m+2 \\ 8 & 12 & m-4 & m+4 \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 & m \\ 0 & 0 & m & m \end{bmatrix}.$$

+) Khi $m=1$, ta có $r(A)=2<3=r(A)$: hệ phương trình vô nghiệm.

+) Khi $m=0$, ta có $r(A)=r(\overline{A})=2$: hệ phương trình có vô số nghiệm.

+) Khi $m\neq 0 \wedge m\neq 1$ thì $r(A)=r(\overline{A})=3$: hệ phương trình có nghiệm duy nhất.

Nhận xét. Với bài toán này SV thường bỏ qua việc xét trường hợp $m=1$ mà chỉ quan tâm đến dòng cuối. Do đó trong quá trình hướng dẫn SV giải, chúng ta cũng lưu ý thêm về phần tử cơ sở của các dòng (phần tử khác không đầu tiên từ trái qua của dòng) liên quan đến xác định hạng của ma trận.

Lưu ý. Khi tìm điều kiện của tham số để HPTTT có nghiệm, ta có thể giải bài toán ngược là tìm điều kiện để hệ vô nghiệm, rồi kết luận theo dạng mệnh đề phủ định.

<u>*Ví dụ 2*</u>. Tìm tham số m để hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x+my+z=m \\ x+(m+4)y+2z=1 \\ 2x+(2m+4)y+(m^2+2)z=2m \end{cases}.$$

Ta có: $\overline{A}=\begin{bmatrix} 1 & m & 1 & m \\ 1 & m+4 & 2 & 1 \\ 2 & 2m+4 & m^2+2 & 2m \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 4 & 1 & 1-m \\ 0 & 4 & m^2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 4 & 1 & 1-m \\ 0 & 0 & (m-1)(m+1) & m-1 \end{bmatrix}.$$

Để tìm tham số cho HPTTT có nghiệm ta tìm điều kiện của tham số cho HPTTT vô nghiệm.

HPTTT vô nghiệm khi và chỉ khi

$r(A)<r(\overline{A}) \Leftrightarrow (m-1)(m+1)=0 \wedge m-1\neq 0 \Leftrightarrow m=-1.$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi $m\neq -1$.

Nhận xét. Nếu ta giải theo cách thông thường, tức là tìm tham số để hệ có nghiệm thì ta phải xét hai trường hợp:

Trường hợp 1.

$r(A)=r(\overline{A})=2 \Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)(m+1)=0 \\ m-1=0\end{cases} \Leftrightarrow m=1.$

Trường hợp 2.

$r(A)=r(\overline{A})=3 \Leftrightarrow \begin{cases}(m-1)(m+1)\neq 0 \\ m-1\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 1 \\ m\neq -1\end{cases}.$

Kết hợp hai Trường hợp này ta có $m\neq -1$.

Như vậy việc áp dụng linh hoạt ý nghĩa của định nghĩa mệnh đề đảo giúp ta chuyển từ việc giải quyết bài toán phức tạp thành giải quyết bài toán đơn giản hơn từ đó đi đến kết quả một cách nhanh chóng.

b. Xác định hạng của ma trận

Đối với việc xác định hạng của ma trận có chứa tham số ta cần lưu ý trong trường hợp tham số ở các cột đầu, ta khó đưa ma trận về dạng bậc thang. Khi đó, ta hoán vị cột của ma trận sao cho tham số ở các cột cuối, rồi đưa về dạng bậc thang.

- Áp dụng: Khi biện luận theo tham số nghiệm của HPTTT, nếu ma trận mở rộng $\overline{A}$ có các cột đầu tiên chứa tham số ta có thể đổi cột trong ma trận A (việc đổi này chỉ dùng cho bài toán biện luận sự tồn tại nghiệm và không được đổi với cột hệ số tự do).

<u>*Ví dụ 3*</u>. Biện luận số nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} mx+y+z=m \\ 2x+y+2z=1 \\ (m+2)x+2y+(m^2+2)z=m^2+m \end{cases}.$$

Ta có $\overline{A}=\begin{bmatrix} m & 1 & 1 & m \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ m+2 & 2 & m^2+2 & m^2+m \end{bmatrix}$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & m & 1 & m \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & m+2 & m^2+2 & m^2+m \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 2-m & 1 & 1-m \\ 0 & 2-m & m^2 & m^2-m \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & m & 1 & m \\ 0 & 2-m & 1 & 1-m \\ 0 & 0 & m^2-1 & m^2-1 \end{bmatrix}.$$

Nếu $m = 2$ thì $r(A) = 2 < 3 = r(\overline{A})$: hệ vô nghiệm.

Nếu $m = \pm 1$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 2 < 3$ (số ẩn): hệ có vô số nghiệm.

Nếu $m \neq 3 \wedge m \neq \pm 1$ thì $r(A) = r(\overline{A}) = 3$: hệ có nghiệm duy nhất.

Nhận xét. Vì bài toán yêu cầu biện luận về nghiệm nên mấu chốt nằm ở việc biện luận hạng của ma trận nên ta có thể đổi cột để việc đưa ma trận dạng bậc thang đơn giản hơn, thuận lợi cho biện luận. Ở chú ý này, khi dạy chúng ta yêu cầu sinh viên phải hiểu và phân tích được vấn đề đặt ra vì sinh viên rất hay nhầm lẫn giữa việc giải ra nghiệm và biện luận về nghiệm, ta biết về nguyên tắc khi thay đổi thứ tự các cột thì đồng nghĩa với các biến sẽ thay đổi thứ tự theo.

c. Điều kiện để hai hệ phương trình có nghiệm chung

Muốn tìm điều kiện của tham số để hai HPTTT có nghiệm chung, ta ghép chúng thành một hệ rồi đi tìm điều kiện của tham số để hệ chung đó có nghiệm.

Ví dụ 4. Tìm điều kiện của tham số *m* để hai HPTTT sau có nghiệm chung

$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 2m + 1 \\ x + 2y - 2z - 2t = -m \end{cases}$$

và $\begin{cases} 2x + 5y - 2z + 42t = 2m + 1 \\ 3x + 4y - 3z + 6t = 5 \end{cases}$.

Hai HPTTT có nghiệm chung khi và chỉ khi hệ phương trình sau có nghiệm

$$\begin{cases} x + y - z + 2t = 2m + 1 \\ x + 2y - 2z - 2t = -m \\ 2x + 5y - 2z + 4t = 2m + 1 \\ 3x + 4y - 3z + 6t = 5 \end{cases}.$$

Ta có: $\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 2m+1 \\ 1 & 2 & -2 & -2 & -m \\ 2 & 5 & -2 & 4 & 2m+1 \\ 3 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)$.

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 2m+1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -3m-1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -2m-1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6m+2 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 2m+1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -3m-1 \\ 0 & 0 & 3 & 12 & 7m+2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3m+3 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 2m+1 \\ 0 & 1 & -1 & -4 & -3m-1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & -3m+3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 16m-7 \end{array}\right).$$

Hệ có nghiệm khi và chỉ khi

$r(A) = r(\overline{A}) \Leftrightarrow 16m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{7}{16}$.

Vậy hai hệ đã cho có nghiệm chung khi và chỉ khi $m = \frac{7}{16}$.

Nhận xét. SV thường lúng túng với dạng bài tập này vì thường suy nghĩ đến việc tìm nghiệm của từng hệ rồi xem khi nào chúng có nghiệm giống nhau. Thực tế khi ghép hai hệ thành một thì nghiệm của hệ mới chính là nghiệm chung của hai hệ. Khi đó bài toán tìm nghiệm chung của hai hệ trở thành bài toán tìm tham số để một hệ có nghiệm sẽ dễ hiểu hơn.

3. Kết luận

Bài viết đã phân tích một số khó khăn cơ bản mà SV gặp phải khi tiếp thu nội dung HPTTT. Từ đó đưa ra một số đề xuất mang tính thiết thực và có thể được áp dụng kịp thời trong quá trình giảng dạy để nâng cao hiệu quả lĩnh hội kiến thức cho SV. Những kiến thức về toán cao cấp là hết sức cần thiết và bổ ích cho SV giúp SV áp dụng giải quyết các vấn đề chuyên môn và nghiên cứu sâu chuyên ngành. Vì vậy việc tìm hiểu những khó khăn của SV trong quá trình học tập các kiến thức về toán cao cấp để đưa ra những giải pháp giúp cho SV tiếp nhận một cách hiệu quả luôn là vấn đề thời sự cần có sự đầu tư nghiên cứu một cách chi tiết, chuyên sâu hơn. Đó cũng chính là vấn đề chúng tôi mong muốn tiếp tục thực hiện trong thời gian đến.

Tài liệu tham khảo

[1]. Anton, H., & Rorres, C. (2005). *Elementary Linear Algebra Applications Version, 9th Edition.* John Wiley & Sons, Inc – USA.

[2]. Đồng, N. S. (2008). *Toán cao cấp Đại số tuyến tính.* NXB Giáo dục.

[3]. Đông, N. V., Hương, L. T., Tuấn, N. A., & Vũ, L. A. (2009). *Bài tập Toán cao cấp.* NXB Giáo Dục.

[4]. Hưng, N. H. (2000). *Đại số tuyến tính.* NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

[5]. Trung, N. V. (2002). *Giáo trình đại số tuyến tính.* NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.