Journal of educational equipment: Applied research, Volume 2, Issue 321 (September 2024)
ISSN 1859 - 0810

Ứng dụng của tích phân trong kinh tế

Lê Thị Hương, Nguyễn Ngọc Linh**

**ThS. Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội*
Received: 26/8/2024; Accepted: 06/9/2024; Published: 18/9/2024

Abstract: *Mathematics is increasingly widely applied in many fields of science as well as in economics and life. Increasing the application of economic problems with practical content in teaching Mathematics is necessary and consistent with the goals of Mathematics. One of the tools to solve economic problems is integration. This article provides some applications of integration to determine the total function when knowing the marginal value function, determine the capital fund function according to the investment function, calculate consumer surplus and producer surplus, and the average value of the function.*
Keywords: *Archimedes' Principle, General Physics, Analysis, Creative Independent Thinking*

1. Đặt vấn đề

Trong thời đại kinh tế số hiện nay, Toán học ngày càng được ứng dụng rộng rãi trong nhiều ngành khoa học tự nhiên và khoa học xã hội cũng như trong kinh tế và đời sống. Việc tăng cường vận dụng các bài toán kinh tế có nội dung thực tiễn vào dạy học môn Toán là điều cần thiết đối và phù hợp với mục tiêu của Toán học. Một trong những công cụ để giải quyết các bài toán kinh tế là tích phân. Ứng dụng của tích phân trong kinh tế là rất đa dạng và đóng vai trò quan trọng trong việc phân tích và giới thiệu các khái niệm kinh tế. Bằng cách áp dụng tích phân trong kinh tế, chúng ta có thể hiểu rõ hơn về sự phát triển và chuyển đổi của nền kinh tế trong một thời gian nhất định.tích phân trong kinh tế có nhiều ứng dụng quan trọng như xác định giá trị cung cầu, tính toán lợi nhuận và tổng thu nhập, đo lường diện tích, mô hình hóa và dự báo, cũng như phân tích tài chính giúp chúng ta hiểu và phân tích sự biến đổi của các biến số kinh tế, từ đó hỗ trợ quyết định và dự đoán trong lĩnh vực kinh tế.

Bài viết này cung cấp một số ứng dụng tích phân để xác định hàm tổng khi biết hàm giá trị cận biên, xác định hàm quỹ vốn theo hàm đầu tư, tính thặng dư của người tiêu dùng và thặng dự của nhà sản xuất, giá trị trung bình của hàm số.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Xác định hàm tổng khi biết hàm giá trị cận biên

Giả sử biến số kinh tế y=f(x mang ý nghĩa tổng giá trị (tổng chi phí, tổng doanh thu, tổng tiêu dùng …) là hàm số được xác định theo giá trị của đối số x: y = f(x)

Nếu ta biết được hàm giá trị cận biên My = f'(x) thì có thể xác định được hàm tổng y = f(x) thông qua phép toán tích phân:

$$y = f(x) = \int f'(x)dx = \int Mydx$$

Hằng số C trong tích phân bất định được xác định nếu ta biết giá trị của y tại một điểm x_o nào đó: $y_o = f(x_o)$

Ví dụ 1. Cho hàm sản phẩm biên của lao động: $MPL = 40L^{-0,5}$

Tìm hàm sản xuất ngắn hạn Q = f(L) biết Q(100) = 4000

Giải: $Q = f(L) = \int 40L^{-0,5}dL = 80L^{0,5} + C$

$Q(100) = 80.100^{0,5} + C = 4000 \Rightarrow C = 3200$

Vậy $Q = 80L^{0,5} + 3200 = 80\sqrt{L} + 3200$

Ví dụ 2. Cho hàm chi phí cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là $MC = 8.e^{0,2Q}$

và chi phí cố định là: FC = 50. Xác định hàm tổng chi phí và chi phí khả biến

Giải:

Hàm tổng chi phí được xác định như sau:

$$TC(Q) = \int 8e^{0,2Q}dQ = 40.e^{0,2Q} + C_o$$

Chi phí cố định là chi phí ở mức Q =0

do đó FC = C(0).

Nên $50 = 40 + C_o$ hay $C_o = 10$.

Vậy: $TC(Q) = 40e^{0,2Q} + 10$

Chi phí khả biến là phần chi phí phụ thuộc vào mức sản lượng Q và bằng hiệu số của tổng chi phí và chi phí cố định. Trong trường hợp này:

$VC(Q) = TC(Q) – FC = 403^{0,2Q}$

Ví dụ 3. Cho hàm doanh thu cận biên ở mỗi mức sản lượng Q là:

$$MR= 60 -2Q – 2Q^2$$

Hãy xác định hàm tổng doanh thu và hàm cầu đối với sản phẩm.

Giải: Hàm tổng doanh thu TR(Q) là nguyên hàm của hàm doanh thu cận biên:

$$TR(Q) = \int (60 - 2Q - 2Q^2)dQ = 60Q - Q^2 - \frac{2}{3}Q^3 + C$$

Hiển nhiên Q = 0 doanh thu là TR(0) = C = 0

Vậy $TR = 60Q - Q^2 - \frac{2}{3}Q^3$

gọi p = p(Q) là hàm cầu đảo, tức là hàm ngược của hàm cầu Q = D(p). Ta có

TR = p(Q). Q , suy ra $p(Q) = \frac{TR}{Q} = 60 - Q - \frac{2}{3}Q^2$

Ví dụ 4. Cho hàm tiêu dùng TC = C(Y) phụ thuộc vào mức thu nhập Y và xu hướng tiêu dùng cận biên MPC(Y) ở mỗi mức thu nhập Y là:

$$MPC = 0,8 + 0,1Y^{-1/2}$$

Cho biết mức tiêu dùng tự định là 50. Xác định hàm tiêu dùng.

Giải:

Khi đó hàm tiêu dùng được xác định như sau:

$$TC(Y) = \int (0,8 + 0,1Y^{-1/2})dY = 0,8Y + 0,2\sqrt{Y} + C$$

Mức tiêu dùng tự định là mức tiêu dùng khi không có thu nhập:

$$TC(0) = 50 = C$$

Vậy hàm tiêu dùng trong trường hợp này là

$$TC(Y) = 0,8Y + 0,2\sqrt{Y} + 50$$

2.3. Xác định hàm quỹ vốn theo hàm đầu tư

Giả sử lượng đầu tư I (tốc độ bổ sung vốn) và quỹ vốn K là các hàm số của biến thời gian t: I = I(t); K = K(t)

Giữa quỹ vốn và đầu tư có mối quan hệ: I(t) = K'(t)(lượng đầu tư tại thời điểm t, biểu thị tốc độ tăng vốn tại thời điểm đó), do đó nếu biết hàm đầu tư I(t) thì quỹ vốn K(t) được xác định như sau:

$$K(t) = \int K'(t)dt = \int I(t)dt$$

Hằng số C trong tích phân bất định trên được xác định nếu ta biết quỹ vốn tại một thời điểm nào đó.

Ví dụ 5. Cho hàm đầu tư $I(t) = 3t^{1/2}$ (nghìn đôla một tháng) và quỹ vốn tại thời điểm t = 1 là K(1) = 10 (nghìn đôla). Hãy xác định hàm quỹ vốn K(t) và lượng vốn tích lũy được từ tháng 4 đến tháng 9.

Giải:

Quỹ vốn tại thời điểm t là: $K(t) = \int 3t^{1/2}dt = 2t^{3/2} + C$

Tại thời điểm t = 1 thì K(t) = 2 + C = 10, nên C = 8

Hay $K(t) = 2t^{3/2} + 8$ (nghìn đôla)

Lượng vốn tích lũy được từ tháng thứ 4 đến tháng thứ 9 được tính theo công thức sau:

$K(9) - K(4) = 2t^{3/2}\Big|_4^9 = 38$ (nghìn đôla)

2.3. Tính thặng dư của người tiêu dùng và thặng dự của nhà sản xuất

Trong mô hình thị trường hàm cầu $Q_d = D(p)$ cho biết lượng hàng hóa Q mà người mua bằng lòng mua ở mỗi mức giá. Khi biểu diễn bằng đồ thị mối liên hệ giữa giá và lượng cầu, các nhà kinh tế thường sử dụng trục tung để biểu diễn giá p và trục hoành biểu diễn lượng Q. Với cách biểu diễn như vậy thì đường cầu là đồ thị của hàm cầu đảo $p = D^{-1}(Q_d)$. (hàm ngược của hàm cầu $Q_d = D(p)$) Giả sử tại điểm cân bằng của thị trường là $(p_0; Q_o)$ và lượng hàng hóa được bán với giá p_o trên thị trường. Khi đó thặng dư của người tiêu dùng được tính theo công thức:

$$CS = \int_0^{Q_o} D^{-1}(Q)dQ - p_oQ_o$$

Hàm cung $Q_s = S(p)$ của thị trường cho biết lượng hàng hóa Q mà các nhà sản xuất bằng lòng bán ở mỗi mức giá P. Đường cung là đồ thị của hàm cung đảo $p = S^{-1}(Q_s)$(hàm ngược của hàm cung $Q_s = S(p)$). Nếu hàng hóa được bán ở mức giá cân bằng p_o thì thặng dư của nhà sản xuất được tính theo công thức:

$$PS = p_oQ_o - \int_0^{Q_o} S^{-1}(Q)dQ$$

Ví dụ 6. Cho các hàm cung và cầu: $Q_S = \sqrt{p-2} - 1; Q_d = \sqrt{43-p} - 2$

Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất và thặng dư của người tiêu dùng.

Giải: Điều kiện: $2 \le p \le 43$

Các hàm cầu đảo và cung đảo lần lượt là:

$$D^{-1}(Q) = 43 - (Q+2)^2; S^{-1}(Q) = (Q+1)^2 + 2$$

Sản lượng cân bằng Q_o là nghiệm dương của phương trình:

$$D^{-1}(Q) = S^{-1}(Q) \Rightarrow \begin{cases} Q_o = 3 \\ p_o = 18 \end{cases}$$

Thặng dư sản xuất được tính theo công thức:

$$PS = 18x3 - \int_0^3 \left[(Q+1)^2 + 2\right]dQ = 27$$

Thặng dư tiêu dùng được tính theo công thức:

$$CS = \int_0^3 \left[43 - (Q+2)^2\right]dQ - 18x3 = 36$$

Ví dụ 7. Cho các hàm cung và hàm cầu của thị trường một hàng hóa như sau:

$$Q_S = 0,2p - 10; Q_d = -0,1p + 50$$

a)Tìm giá cân bằng p_o và lượng sản phẩm cân bằng Q_o trên thị trường

b) Hãy tính thặng dư của nhà sản xuất

c) Hãy tính thặng dư của người tiêu dùng.

Giải:

a)Thị trường cân bằng khi lượng cung bằng lượng cầu tức là:

$$Q_s = Q_d \Leftrightarrow 0,2p - 10 = -0,1p + 50$$

$$\Leftrightarrow 0,3p = 60 \Leftrightarrow p = 200.$$

Vậy thị trường cân bằng tại mức giá p_o =200 và mức sản lượng Q_o =30

Từ $Q_s = 0,2p - 10 \Rightarrow p = 50 + 5Q_s = S^{-1}(Q_s)$

Áp dụng công thức tính giá trị thặng dư của nhà sản xuất ta có:

$$PS = p_0.Q_0 - \int_0^{Q_0} S^{-1}(Q_s)dQ$$

$$\Rightarrow PS = 200.30 - \int_0^{30}(50 + 5Q)dQ = 2250.$$

Từ $Q_d = -0,1p + 50 \Rightarrow p = 500 - 10Q_d = D^{-1}(Q_d)$

Áp dụng công thức tính giá trị thặng dư của người tiêu dùng ta có:

$$CS = \int_0^{Q_0} D^{-1}(Q_d)dQ - p_0Q_0$$

Suy ra $CS = \int_0^{30}(500 - 10Q)dQ - 200.30 = 4500.$

2.4. Giá trị trung bình của hàm số:

Cho hàm số f(x) liên tục trên đoạn $a \le x \le b$

Khi đó giá trị trung bình V của f(x) trên đoạn $a \le x \le b$ được xác định bởi công thức:

$$V = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Ví dụ 8: Tìm doanh số trung bình tháng

Một nhà sản xuất xác định rằng, t tháng sau khi giới thiệu một sản phẩm mới, doanh số của công ty là S(t) nghìn đô-la với:

$$S(t) = \frac{750}{\sqrt{4t^2 + 25}}$$

Tìm doanh số trung bình tháng của công ty trong 6 tháng đầu tiên sau khi giới thiệu sản phẩm mới.

Giải:

Doanh số trung bình tháng V trong khoảng $0 \le t \le 6$ được tính bằng tích phân

$$V = \frac{1}{6-0}\int_0^6 \frac{750}{\sqrt{4t^2 + 25}}dt$$

Để tính tích phân này ta thực hiện phép đổi biến:

$u = 4t^2 + 25; du = 8tdt;$

$t = 0; u = 25$

$t = 6; u = 169$

Ta được $V = \frac{1}{6}\int_{25}^{169} \frac{750}{\sqrt{u}}.\frac{1}{8}du = \frac{750}{48}\left(\frac{u^{1/2}}{1/2}\right)\Bigg|_{25}^{169} = 250.$

Vậy trong khoảng thời gian 6 tháng ngay sau khi giới thiệu sản phẩm mới, doanh số trung bình của công ty là $250,000 mỗi tháng.

3. Kết luận

Như vậy, các bài toán thực tiễn trong kinh tế rất phong phú và đa dạng. Để giải quyết các bài toán này ta cần thu thập thông tin về một đại lượng quan tâm, sau đó thiết lập công thức. Việc sử dụng tích phân giúp sinh viên giải các bài toán xác định hàm tổng khi biết hàm giá trị cận biên, xác định hàm quỹ vốn theo hàm đầu tư, tính thặng dư của người tiêu dùng và thặng dự của nhà sản xuất, giá trị trung bình của hàm số … rất hiệu quả.

Tài liệu tham khảo

[1] Bùi Dương Hải, Phạm Ngọc Hưng (2023), *Thống kê toán trong kinh tế-Tài chính,* NXB Đại học Kinh tế quốc dân.

[2] Nguyễn Quang Đông, Ngô Văn Thứ, Hoàng Đình Tuấn (2006), *Giáo trình mô hình toán kinh tế,* NXB Thống kê.

[3] Nguyễn Văn Dần, Nguyễn Hồng Nhung (2017), *Giáo trình Kinh tế vi mô* 1, NXB Tài chính.

[4] Nguyễn Văn Quý, (2018), *Giáo trình Toán cao cấp,* NXB Tài chính.

[5] Lê Đình Thúy, Nguyễn Quỳnh Lan (2018), *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế*, NXB Đại học Kinh tế quốc dân.

[6] Hoàng Đình Tuấn, Bùi Dương Hải (2023), *Giáo trình lý thuyết mô hình Toán kinh tế,* NXB Đại học Kinh tế quốc dân.

[7] Vũ Khắc Bảy (2015), *Giáo trình toán kinh tế,* NXB Lâm nghiệp.

[8] Nguyễn Tiến Trung, Kim Anh Tuấn, Nguyễn Bảo Duy (2019). *Vận dụng lí thuyết giáo dục toán học gắn với thực tiễn trong dạy học môn Toán.* Tạp chí Giáo dục.

[9] Trần Cường, Nguyễn Thuỳ Duyên (2018). *Tìm hiểu lí thuyết giáo dục toán học gắn với thực tiễn và vận dụng xây dựng bài tập thực tiễn trong dạy học môn Toán.* Tạp chí Giáo dục, số đặc biệt kì 2 tháng 5.

[10] Trần Cường, Lê Tuấn Anh (2020). *Bàn về tiếp cận và một số biện pháp vận dụng lí thuyết RME trong dạy học môn Toán ở Việt Nam.* Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, số 65(07), tr 162-173