

# Vận dụng mô hình hóa Toán học vào dạy học Ứng dụng đạo hàm lớp 12

Trần Khánh Như\*, Bùi Anh Kiệt\*\*

\* HVCH khoá 29 ngành Lý luận dạy học và PPDH môn Toán, trường Đại học Cần Thơ

\*\* TS. Khoa Sư phạm, Trường Đại học Cần Thơ

Received: 08/8/2024; Accepted: 16/8/2024; Published: 26/8/2024

**Abstract:** Mathematical modeling equips students with the competency to use math as a tool to solve problems that arise in real-life situations. Mathematical modeling competency is one of the competencies that need to be achieved during the learning process according to the new educational program. For grade 12 math, applying derivatives to investigate functions is one of the cores. Therefore, applying mathematical modeling to teaching applied derivatives for grade 12 helps students solve real-life problems using mathematical methods; develop mathematical skills and understand the usefulness of mathematics in practice.

**Keywords:** Modeling, modeling process, real-life problems, applications of derivative, mathematical competency.

## 1. Đặt vấn đề

Năm 2018, Bộ Giáo dục và Đào tạo đã xác định rõ năng lực mô hình hóa (NLMHH) là một trong những năng lực cốt lõi, đặc thù cần hình thành cho học sinh trong quá trình dạy học. Các nghiên cứu về mô hình hóa (MHH) đã xuất hiện khá lâu và đa dạng trong quá trình giáo dục; do đó người dạy cần thay đổi phương pháp dạy một cách trực quan, định hướng học sinh (HS) lĩnh hội kiến thức một cách chủ động, tích cực và phù hợp với thực tiễn. Việc vận dụng mô hình hóa toán học (MHHTH) vào dạy học cũng là một trong những vấn đề tất yếu, giúp giáo viên (GV) xây dựng bài học theo hướng tiếp cận thực tiễn, đúng tiêu chí “lí luận gắn liền với thực tiễn”. Trong bài báo này chúng tôi đề xuất quy trình mô hình hóa toán học và tình huống dạy học ứng dụng đạo hàm vào bài toán hàm số lớp 12, một trong những nội dung quan trọng trong chương trình THPT, góp phần phát triển NLMHH và nâng cao chất lượng dạy học ở trường phổ thông.

## 2. Nội dung nghiên cứu

### 2.1. Khái niệm về Mô hình hóa Toán học

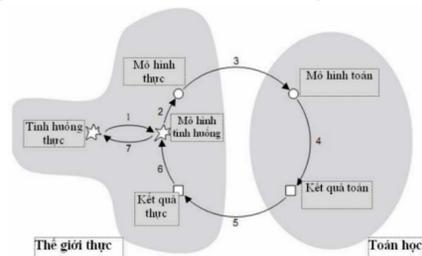
Mô hình hóa toán học là quá trình chuyển đổi một vấn đề thực tế sang một vấn đề toán học (TH) bằng cách thiết lập và giải quyết các MHHTH, thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tế, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận. Như vậy, MHHTH được hiểu là sử dụng các công cụ TH để mô tả các tình huống thực tiễn, thể hiện các tình huống đó dưới dạng ngôn ngữ TH, đưa bài toán thực tiễn thành bài toán TH phù hợp. Quá trình chuyển đổi

giữa tình huống thực tiễn và tình huống TH tuân theo một quy trình nhất định với những quy tắc đặc biệt để xây dựng giả thuyết TH từ đó học sinh có thể dễ dàng nhìn nhận các vấn đề thực tiễn.

### 2.2. Dạy học mô hình hoá Toán học

Dạy học MHHTH là dạy học cách thức xây dựng mô hình toán học của thực tiễn, nhằm trả lời cho những câu hỏi, vấn đề nảy sinh từ thực tiễn. Dạy học bằng MHHTH là dạy học toán thông qua dạy học MHH. Như vậy, tri thức toán học cần giảng dạy sẽ nảy sinh qua quá trình giải quyết các vấn đề thực tiễn. Ở đây, MHHTH được hiểu là sự giải thích toán học cho một hệ thống ngoài toán học nhằm trả lời cho những câu hỏi mà người ta đặt ra trên hệ thống này. Dạy học MHH và dạy học bằng MHH cho thấy ý nghĩa của việc học toán do HS thấy được ứng dụng của kiến thức toán trong thực tiễn. Dạy học MHH chỉ là sự áp dụng tri thức đã có, trong khi đó, dạy học bằng MHH cho phép tri thức toán nảy sinh qua quá trình MHHTH để giải quyết một vấn đề thực tiễn.

### 2.3. Quy trình mô hình hóa Toán học



Quy trình mô hình hóa toán học được hiểu là quá

trình thu thập, hiểu và phân tích các thông tin toán học và áp dụng toán học để mô hình hóa các tình huống thực tiễn. Có nhiều quy trình mô hình hóa phát triển theo nhiều thời đại, tuy nhiên không thể không nhắc đến các quy trình kinh điển như *Mô hình của Bloom và Leib (2006)*, mô hình này được xem là cơ sở cho tất cả các hoạt động MHH và những thay đổi của các chu trình MHH ngày nay.

Theo Swetz và Hatler, quy trình MHH bao gồm 4 giai đoạn chủ yếu sau đây (Swetz, F., & Hartzler, J. S. Eds., 1991). Giai đoạn 1: Quan sát hiện tượng thực tiễn, xây dựng tình huống, tìm các yếu tố trọng tâm có ảnh hưởng đến vấn đề thực tiễn. Giai đoạn 2: Lập giả thuyết về mối quan hệ giữa các yếu tố dùng ngôn ngữ toán học. Dựa vào đó, xây dựng bài mô hình toán học tương ứng. Giai đoạn 3: Vận dụng các phương pháp và công cụ toán học phù hợp với tình huống thực tiễn để MHH bài toán và phân tích mô hình. Giai đoạn 4: Đưa ra kết quả, đối chiếu mô hình với thực tiễn và rút ra kết luận

Stillman và cộng sự (2008) đã đưa ra quy trình MHHTH gồm 6 bước: - Bước 1: Hiểu tình huống đã cho, đưa ra các điều kiện và giả thiết phù hợp để tạo ra một mô hình thực tế của tình huống; - Bước 2: Xây dựng mô hình toán biểu diễn cho mô hình thực tế; - Bước 3: Làm việc trong môi trường toán học để thu được kết quả toán học; - Bước 4: Thể hiện kết quả trong ngữ cảnh thực tế; - Bước 5: Xem xét tính hợp lý, thỏa đáng của kết quả thực tế hay quyết định thực hiện lại quá trình lần 2; - Bước 6: Trình bày cách giải quyết vấn đề.

Sau khi nghiên cứu các quy trình MHH toán học và đặc biệt là quy trình MHH của Swetz và Hartzler (1991), chúng tôi đề xuất một quy trình MHH gồm 4 bước để vận dụng vào dạy học nội dung “Ứng dụng đạo hàm lớp 12” như sau:

• **Bước 1:** Dựa vào các yếu tố thực tiễn và liên hệ đến các yếu tố toán học. Từ đó đưa bài toán thực tiễn thành bài toán toán học tương ứng.

• **Bước 2:** Vận dụng các phương pháp và công cụ toán học phù hợp với tình huống thực tiễn để MHH bài toán và phân tích mô hình. Xác định vấn đề cần giải quyết trong toán học.

• **Bước 3:** Giải quyết bài toán.

• **Bước 4:** Đưa ra kết quả, đối chiếu mô hình với thực tiễn, nếu không phù hợp ta thực hiện lại bước 1. Nếu kết quả phù hợp ta kết luận.

## 2.4. Thực nghiệm sư phạm

2.4.1. Mục đích, đối tượng và phương pháp thực nghiệm

- **Mục đích thực nghiệm:** Kiểm nghiệm tính khả thi của quy trình MHH toán học trong việc xây dựng tình huống dạy học nội dung Ứng dụng đạo hàm lớp 12.

- **Đối tượng thực nghiệm:** 30 học sinh lớp 12A năm học 2023-2024 trường THCS- THPT Thời Thạnh, Ô Môn, TP Cần Thơ (lớp thực nghiệm) và 30 học sinh lớp 12A trường THPT Mỹ Xuyên, TP Sóc Trăng (lớp đối chứng). Hai lớp có học lực tương đồng ở mức khá- giỏi.

- **Phương pháp thực nghiệm:** GV giao nhiệm vụ giải quyết bài toán thực tế bằng quy trình MHHTH (GV đã hướng dẫn về quy trình đối với lớp thực nghiệm), HS suy nghĩ và làm việc cá nhân trong thời gian 45 phút. Sau đó, chúng tôi sử dụng phương pháp định tính để phân tích bài làm của HS bằng quy trình MHHTH và dữ liệu định lượng thu được.

2.4.2. Vận dụng quy trình thiết kế tình huống dạy học mô hình hóa giải bài toán thực tiễn trong dạy học nội dung “Ứng dụng đạo hàm tìm GTLN-GTNN của hàm số” (Toán 12)

**Tình huống 1:** Một sợi dây dài 6m được chia thành hai phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần còn lại được uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài cạnh của hình tam giác bằng bao nhiêu để tổng diện tích hai hình là nhỏ nhất (làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?

**Dụng ý sư phạm:** GV hướng dẫn HS thực hiện bài toán dựa trên 4 bước đã đề xuất của quy trình MHHTH, nhằm giúp học sinh tiếp cận quy trình, nắm rõ công đoạn và tiếp cận yếu tố thực tiễn trong bài toán, bài toán thực tiễn ở đây thường là bài toán tìm GTLN, GTNN, tìm cực trị hàm số.

• **Bước 1:** Đưa bài toán thực tiễn thành bài toán toán học tương ứng hay còn gọi là mô hình hóa lại bài toán thực tiễn về bài toán toán học, học sinh tiến hành mô hình lại bằng hình vẽ



• **Bước 2:** Xác định vấn đề cần giải quyết trong toán học.

Học sinh tiến hành xác định mục đích của bài toán toán học là tìm độ dài cạnh của hình tam giác đều sao cho tổng diện tích hai hình là nhỏ nhất từ đó xác định đối tượng cần tìm trong bài toán toán học.

Gọi độ dài hai phần lần lượt là  $x; y(m) \Rightarrow x + y = 6$ .

Suy ra độ dài cạnh hình vuông và cạnh tam giác lần lượt là  $\frac{x}{4}; \frac{y}{3}$ , diện tích hai hình

$S = \frac{x^2}{16} + \frac{y^2\sqrt{3}}{36} = \frac{(6-y)^2}{16} + \frac{y^2\sqrt{3}}{36}$ . Ta cần tìm  $y$  để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất.

• **Bước 3:** Giải quyết bài toán toán học

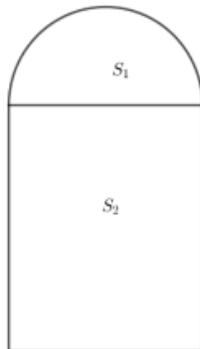
$$S'(y) = \frac{y-6}{8} + \frac{y\sqrt{3}}{18}, S' = 0 \Rightarrow y = \frac{54}{9+4\sqrt{3}}$$

Lập bảng biến thiên trên đoạn  $[0;6]$  ta có

$$S_{\min} = S\left(\frac{54}{9+4\sqrt{3}}\right). \text{ Vậy hàm số đạt GTNN tại}$$

$$\frac{y}{3} = \frac{18}{9+4\sqrt{3}} \approx 1,13(m)$$

• **Bước 4:** Đưa ra kết quả, đối chiếu mô hình với thực tiễn, nếu không phù hợp ta thực hiện lại bước 1. Nếu kết quả phù hợp ta kết luận. Đối chiếu lại bài toán thực tiễn, kết quả tìm được hợp lý với nội dung và yêu cầu đề bài nên chấp nhận kết quả. Kết luận độ dài của hình tam giác sẽ là 1,13m.



**Tình huống 2.:** Cần

phải làm cái cửa sổ mà phía trên là hình bán nguyệt, phía dưới là hình chữ nhật, có chu vi là 15m (chu vi hình bán nguyệt cộng với chu vi hình chữ nhật trừ đi đường kính của hình bán nguyệt). Hãy xác định đường kính của hình bán nguyệt để diện tích cửa sổ là lớn nhất (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai). Đối với ví dụ này, GV chia lớp thành 8 nhóm, các bạn làm việc nhóm và trình bày trước lớp, một học sinh tiến hành giải như sau

• **Bước 1:** HS vẽ lại hình mô phỏng nội dung bài toán như sau

• **Bước 2:** Sau khi vẽ HS tiến hành xác định các đối tượng cần tìm, gọi  $x(x < 0)$  là đường kính của hình bán nguyệt, cần xác định  $x$  sao cho diện tích cả hai hình là lớn nhất. HS tiếp tục đặt chiều dài còn lại của hình chữ nhật là  $y(y > 0)$ . Chu vi cửa sổ là

$$15 = \pi \frac{x}{2} + 2y + x \Rightarrow x = \frac{15}{2} - \frac{x}{2} \left( \frac{\pi}{2} + 1 \right)$$

Diện tích cửa sổ là

$$f(x) = xy + \frac{1}{2} \pi \frac{x^2}{4} = \frac{15x}{2} - \frac{x^2(\pi+4)}{8}. \text{ Vậy cần tìm } x$$

để hàm số đạt giá trị lớn nhất.

• **Bước 3:** Đạo hàm và lập bảng biến thiên ta

được hàm số đạt GTLN khi  $x = \frac{30}{\pi+4} \approx 4,2(m)$

• **Bước 4:** Đưa ra kết quả, đối chiếu mô hình với thực tiễn ta thấy kết quả này hợp lý và kết luận.

Trong quá trình thảo luận, GV cần có các gợi ý để học sinh tiến hành mô hình hóa và tìm đối tượng cần tính trong bài toán thực tiễn, từ đó HS tự tìm tòi đưa ra hướng giải quyết bài toán toán học. Các nhóm lần lượt trình bày và nhận xét, GV chính xác hóa bài toán.

### 3. Kết luận

Phương pháp MHH đóng vai trò quan trọng trong quá trình dạy học môn toán ở trường phổ thông, giúp HS khám phá thế giới xung quanh, giải quyết các bài toán thực tế bằng phương pháp toán học; giúp HS hiểu sâu, nắm chắc các kiến thức toán học và phát triển các kỹ năng toán học. Quá trình và kết quả thực nghiệm cho thấy các hoạt động được thiết kế giúp HS tích cực hơn, chủ động hơn trong tiếp thu kiến thức, từ đó hiệu quả học tập được nâng cao, góp phần phát triển năng lực mô hình hóa toán học của HS. Sau khi thực nghiệm từ kết quả cho thấy các tình huống có tính khả thi, quy trình được đề xuất có thể áp dụng vào dạy và học theo định hướng phát triển năng lực đáp ứng yêu cầu cần đạt của CT GDPT 2018 môn Toán.

### Tài liệu tham khảo

[1] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).

[2] Biembengut, M. S. & Hein, N, (2007). *Modelling in engineering: Advantages and difficulties, Proceedings of International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Application, Horwood Publishing.*

[3] Nguyễn Thị Tân An (2010). *Sự cần thiết của mô hình hóa trong dạy học toán*, Tạp chí Khoa học giáo dục Đại học Sư phạm thành phố Hồ Chí Minh, số 37, tr 114 – 127.

[4] Nguyễn Danh Nam (2015). *Nghiên cứu quy trình mô hình hóa trong dạy học Toán ở trường phổ thông*. Tạp chí Khoa học, Đại học Quốc gia Hà Nội, 31(3),1-10.

[5] Niss, M., & Blum, W. (2020). *The Learning and Teaching of Mathematical Modelling*. Routledge Publisher. London.

[6] Lê Thị Hoài Châu (2014). *Mô hình hóa trong dạy học khái niệm đạo hàm*. Tạp chí Khoa học, Trường Đại học Sư phạm TP. Hồ Chí Minh, 65, 5-14.