

Sai số và đánh giá sai số phạm phải khi xấp xỉ hàm số bằng phép nội suy

Nguyễn Anh*

*ThS, Khoa Khoa học Đại cương, Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội

Received: 06/02/2023; Accepted: 15/02/2023; Published: 22/02/2023

Abstract: In the process of development, Mathematics has occupied a very important position in all fields. Numerical analysis is a relatively new science that studies and deals with basic problems such as: Errors, approximation of real solutions of nonlinear equations and systems of linear equations, approximation and interpolation of functions.. In order to facilitate computation and be able to program on electronic computers, the process of solving problems is presented as an iterative procedure.

The article deals with the problem of error and function approximation and the applications of interpolation polynomials in approximation as an effective tool commonly used in science and engineering.

Keywords: The problem of error and function approximation, interpolation polynomials

1. Đặt vấn đề

Toán học ra đời từ nhu cầu của thực tiễn. Trong quá trình phát triển, Toán học đã chiếm lĩnh vị trí vô cùng quan trọng trong tất cả các lĩnh vực từ nghiên cứu đến đời sống và sản xuất của con người, nhất là trong giai đoạn công nghệ hóa hiện nay

Giải tích số là môn khoa học khá mới mẻ, một nhánh thuộc lĩnh vực toán học ứng dụng. Với mục tiêu giải quyết các bài toán ra kết quả bằng số, Giải tích số nghiên cứu và đề cập đến những bài toán cơ bản như: Sai số, xấp xỉ nghiệm thực của phương trình phi tuyến và hệ phương trình tuyến tính, xấp xỉ và nội suy hàm số ... Việc giải một bài toán xấp xỉ phức tạp nhằm mục đích thay đổi một hàm số như dạng biểu thức hoặc hàm số dưới dạng bảng bằng những hàm số đơn giản (càng gần với đa thức càng tốt) để đơn giản cho tính toán, dự báo,....

Để thuận tiện cho tính toán và có thể lập trình trên máy tính điện tử, quy trình giải các bài toán được trình bày có tính chất như một thủ tục lặp. Việc tính toán với các thông tin bằng số (dữ liệu đầu vào) nhận được là kết quả thực nghiệm nên sai số là điều không tránh khỏi. Vì lẽ đó, ngoài các thuật toán còn có những công cụ để kiểm tra và đánh giá sai số tại mỗi bước lặp hay suốt quá trình tính toán.

Bài viết đề cập đến vấn đề sai số và xấp xỉ hàm số cùng những ứng dụng của đa thức nội suy trong phép tính xấp xỉ như một công cụ hữu hiệu thường dùng trong khoa học – kỹ thuật.

2. Nội dung nghiên cứu

Thực tế và kỹ thuật, ta thường gặp rất nhiều trường hợp cần phải xác định được biểu thức của

hàm số $y=f(x)$ – nhưng chỉ biết một số hữu hạn các giá trị rời rạc của đại lượng biến thiên x thông qua thực nghiệm, đo đạc hay kiểm định x_1, x_2, \dots, x_n với các kết quả tương ứng của y là y_1, y_2, \dots, y_n . Ngay cả khi biểu thức giải tích của $y=f(x)$ đã xác định, nhưng quá công kênh và phức tạp, ta có thể đi tìm một hàm số đơn giản hơn để thay thế trong quá trình tính toán, dự báo dạng tuyến tính, lượng giác, hàm lũy thừa....

2.1. Nội suy đa thức

Trong thực tế tính toán, trong khi chỉ biết các giá trị $y_i=f(x_i), x_i \in [a, b], i=0, n$. ta thường phải tính giá trị của hàm số $y=f(x)$ với x bất kì trên đoạn $[a, b]$. Các giá trị (x_i, y_i) là kết quả nhận được qua ghi chép từ thực nghiệm, khảo sát... Ngay cả khi biểu thức giải tích của $f(x)$ đã xác định nhưng phức tạp. Để tiện tính toán, người ta xây dựng đa thức $P_n(x)$ xấp xỉ với $f(x)$ để thay thế trong quá trình dự đoán (với sai số chấp nhận được). Tức là tìm đa thức $P_n(x)$ thỏa mãn điều kiện và $x_i \neq x_j, \forall i \neq j, x_i \in [a, b] \forall i$. Hàm số $P(x)$ như vậy gọi là hàm nội suy của $f(x)$ và các $x_i (i=0, 1, \dots, n)$ gọi là các nút nội suy. Bài toán xây dựng hàm số $P(x)$ gọi là bài toán nội suy. Tôi đã nghiên cứu cách xây dựng các đa thức nội suy: Đa thức nội suy Lagrang, Đa thức nội suy Newton. Đa thức nội suy Hermitte, Spline đa thức, một số bài tập ví dụ xây dựng các đa thức nội suy tương ứng liên quan và đánh giá sai số khi xây dựng các đa thức nội suy.

Thí dụ: Cho các điểm của hàm $y=f(x)$ nhận được từ TN $(0;1), (2;3), (3;2), (5;5), (6;6)$

Xây dựng đa thức nội suy NiuTon tiến xuất phát từ nút $x_0=0$ của $y=f(x)$

Tính gần đúng $f(1,25)$

Giải: Tỷ hiệu các cấp của hàm $y = f(x)$ tính được trong bảng sau:

X	Y	TH cấp 1	TH cấp 2	TH cấp 3	TH cấp 4
0	1				
1	2	$1=y[0;2]$			
2	3	-1	$-2/3=y[0;2;3]$	$3/10=y[0,2,3,5]$	
3	2	$3/2$	$5/6$	$-1/4$	$-11/120=y[0,...6]$
5	5				
6	6	1	$-1/6$		

Và: $P_n(x) := y_0 + (x - x_0)f[x_0, x_1] + (x - x_0)(x - x_1)f[x_0, x_1, x_2] + \dots + (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})f[x_0, x_1, \dots, x_n]$.

Ta có:

$$P_4(x) = 1 + x.1 + x(x-2)(-\frac{2}{3}) + x(x-2)(x-3)(\frac{3}{10}) + x(x-2)(x-3)(x-5)(-\frac{11}{120}) = -\frac{11}{120}x^4 + \frac{73}{60}x^3 - \frac{601}{120}x^2 + \frac{413}{60}x + 1 = -\frac{1}{120}(x^4 - 146x^3 + 601x^2 - 826x - 120)$$

Ta có: $f(1,25) \approx P_4(1,25) = 3,9311525$

Nếu quan tâm thì sai số nội suy:

$$|R_4(x \equiv 1,25)| = |(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})(x - x_n) f[x_0, x_1, \dots, x_n]| = |(1,25 - 0)(1,25 - 2)(1,25 - 3)(1,25 - 5)(1,25 - 6) \cdot f[1,25; 0; 2; 3; 5; 6]|$$

2.2. Phương pháp bình phương cực tiểu - ứng dụng tìm hàm hồi quy.

Toán học ứng dụng – với sự phát triển của nó về Lý thuyết cũng như ứng dụng rộng rãi trong hầu hết các ngành đặc biệt là Xác suất và Thống kê Toán học. Một trong những ứng dụng quan trọng của xác suất và thống kê đối với kinh tế và đời sống, đó là phân tích để dự báo và định hướng thông qua các bài toán liên quan đến “Hồi quy và tương quan”. Muốn vậy, từ sự phụ thuộc của một đại lượng biến thiên vào một (hay nhiều biến khác) ta đi tìm hàm hồi quy biểu thị mối quan hệ hàm giữa các đại lượng. Việc tìm các hàm hồi quy là một ứng dụng của phương pháp nội suy và phương pháp bình phương bé nhất.

Dựa trên thông tin về hệ số tương quan mẫu với các số liệu thực nghiệm, đường hồi quy trung bình tuyến tính thực nghiệm và một số ví dụ thực tế thông qua các thực nghiệm xây dựng đa thức hồi quy. Qua đa thức hồi quy, chúng ta sẽ dự đoán được các kết quả y trong tương lai khi có các giá trị x cho trước.

Thí dụ: Kết quả ghi chép qua thực nghiệm, các giá trị của x và y trong bảng:

x	0,56	0,84	1,14	2,44	3,16
y	-0,80	-0,97	-0,98	1,07	3,66

Từ thông tin đã có, ta có thể tìm cho x và y một

công thức thực nghiệm có dạng:

$$y = a + bx + cx^2$$

Các hệ số a, b, c cần tìm là nghiệm hệ (*):

$$\begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n x_i + c \sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i^3 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^4 = \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i \end{cases}$$

Để giải hệ ta tính toán các giá trị như bảng sau:

	x_i	$(x_i)^2$	$(x_i)^3$	$(x_i)^4$	y_i	$x_i y_i$	$(x_i)^2 y_i$
n=5	0,56	0,314	0,176	0,098	-0,80	-0,448	-0,251
	0,84	0,706	0,593	0,498	-0,97	-0,815	-0,685
	1,14	1,300	1,482	1,690	-0,98	-1,117	-1,274
	2,44	5,954	14,527	35,445	1,07	2,611	6,371
	3,16	9,986	31,554	99,712	3,66	11,566	36,549
$\sum_{i=1}^5$	8,14	18,260	48,332	137,443	1,98	11,797	40,710

Từ đó, hệ thống PT (*) có dạng sau:

$$5a + 8,14b + 18,260c = 1,98$$

$$8,14a + 18,260b + 48,332c = 11,797$$

$$18,260a + 48,332b + 137,443c = 40,710$$

Giải hệ ta nhận được: $a \approx 0; b \approx -2; c \approx 1$. Vậy $y = -2x + x^2$

Bây giờ, ta thử tính các giá trị mới của $y = x^2 - 2x$ tại các điểm x_i và so sánh chúng với y_i :

X	0,56	0,84	1,14	2,44	3,16
Y	-0,80	-0,97	-0,98	1,07	3,66
$y = x^2 - 2x$	-0,8064	-0,9744	-0,9804	1,0736	3,6656

Kết quả cho thấy giá trị của hàm $y = x^2 - 2x$ tại các điểm x_i và các giá trị y_i sai khác không đáng kể. Chúng ta $y = x^2 - 2x$ là hàm xấp xỉ (dạng bậc 2).

3. Kết luận

Bài viết đề cập đến chủ đề (đã nêu) thuộc lĩnh vực Toán học tính toán và ứng dụng. Một lần nữa xin nhấn mạnh lại, vấn đề xấp xỉ hàm số và đánh giá sai số trong quá trình tính toán với ứng dụng phổ biến trong Khoa học – Kỹ thuật là một chủ đề xứng đáng được quan tâm và khai thác.

Mặc dù đã xem xét và chỉnh sửa, bài viết khó tránh khỏi những thiếu sót. Mong nhận được ý kiến đóng góp của đồng nghiệp và bạn đọc.

Tài liệu tham khảo

1. Tô Văn Đình (2016), *Phương pháp tính*. NXB Giáo dục Việt Nam.

2. Võ Trọng Hùng (1992), *Nghiên cứu xây dựng sơ đồ tính toán lớp đất đá bảo vệ đáy móng khai thác chịu tác dụng của nước ngầm cao áp*. Tạp chí Công nghiệp Mỏ 4. 12-14