Equipment with new general education program, Volume 1, Issue 292 (July 2023)
ISSN 1859 - 0810

Ứng dụng kỹ thuật chọn điểm rơi trong bài toán bất đẳng thức

Ngô Lê Hồng Phúc*
**ThS. Khoa Sư phạm, Trường ĐH Thủ Dầu Một*

Received: 27/03/2023; Accepted: 06/04/2023; Published: 17/5/2023

Abstract: *In this article, we present a coefficient balancing technique that is often used in inequality evaluation problems that are very common in the exams for good students as well as the entrance exam for high school.*

Keywords: *Falling point, inequality, maximum value, minimum value.*

1. Giới thiệu

Bất đẳng thức là một trong những dạng bài tập khó và thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi Toán THCS. Trong hầu hết các bài toán về bất đẳng thức, cái khó nhất trong việc áp dụng bất đẳng thức Cauchy hay Bunhiacopxki là việc tách số hạng một cách hợp lý để dấu bằng có thể xảy ra. Bài viết giới thiệu một kỹ thuật giúp học sinh có kinh nghiệm để thực hiện cũng như tránh những sai lầm khi gặp những dạng toán tìm GTLN và GTNN của biểu thức mà thỏa một điều kiện cho trước. Nếu chúng ta linh hoạt trong việc sử dụng kỹ thuật chọn điểm rơi trong việc chứng minh bất đẳng thức thì rất nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức sẽ được chứng minh một cách dễ dàng.

2. Nội dung

Điểm rơi trong các bất đẳng thức là giá trị đạt được của biến khi dấu "=" trong bất đẳng thức xảy ra. Do đó, chọn điểm rơi của bất đẳng thức ở đây chính là dự đoán giá trị của biến làm dấu bằng trong các bất đẳng thức xảy ra để từ đó người giải có những đánh giá hợp lí và đưa ra cách giải đúng. Nếu biểu thức có điều kiện ràng buộc thì GTLN, GTNN của một biểu thức thường đạt được tại vị trí biên. Hơn nữa, nếu biểu thức có tính đối xứng thì dấu bằng thường xảy ra khi các biến bằng nhau.

Việc tìm điều kiện dấu bằng xảy ra trong bất đẳng thức rất quan trọng, nó giúp ta kiểm tra tính đúng đắn của chứng minh. *Đặc biệt,* khi chứng minh bất đẳng thức mà áp dụng liên tiếp các bất đẳng thức thì việc chú ý đến điểm rơi của dấu bằng lại càng quan trọng vì nó đòi hỏi *điểm rơi* phải đồng thời xảy ra trong cùng một điều kiện của biến.

2.1. Bất đẳng thức Cauchy

Cauchy cho 2 số không âm:
Với $a,b \geq 0$, ta có $a+b \geq 2\sqrt{ab}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b.

Cauchy cho 3 số không âm:
Với $a,b,\ c \geq 0$, ta có $a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi a = b=c.

Cauchy cho n số không âm:
Với $a_1, a_2, ..., a_n \geq 0$, ta có
$a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n\sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$
Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

2.2. Một số ví dụ áp dụng

Bài 2.2.1 Cho $a \geq 2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = a + \frac{1}{a^3}$.

Giải.

Ta dự đoán điểm rơi tại biên là $a = 2$, do đó ta phải tách hạng tử a hoặc hạng tử $\frac{1}{a^3}$ để sao cho khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy dấu "=" xảy ra khi a=2. Ta có sơ đồ:

$$\begin{cases} \dfrac{a}{\alpha} = \dfrac{2}{\alpha} \\ \dfrac{1}{a^3} = \dfrac{1}{8} \end{cases} \Rightarrow \alpha = 16$$

Khi đó, ta biến đổi và áp dụng BDT Cauchy ta được

$$S = a + \frac{1}{a^3} = \frac{a}{16} + \frac{a}{16} + \frac{a}{16} + \frac{1}{a^3} + \frac{13}{16}a$$

$$\geq 4\sqrt[4]{\frac{a}{16}.\frac{a}{16}.\frac{a}{16}.\frac{1}{a^3}} + \frac{13}{16}a \geq 4.\frac{1}{8} + \frac{13}{16}.2 = \frac{17}{8}$$

Bài 2.2.2. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$S = 4x + \frac{1}{x}, \forall x \geq 3$$

Giải.

Rõ ràng khi x tăng thì S sẽ tăng, do đó ta dự đoán S sẽ đạt giá trị nhỏ nhất khi x=3. Do đó, nếu chúng ta áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số $4x$ và $1/x$ thì tại điểm rơi x=3, dấu bằng sẽ không xảy ra. Bây giờ ta sẽ tách hạng tử 4x để khi áp dụng bất đẳng thức Cauchy dấu bằng sẽ xảy ra khi x=3. Ta có

$$\begin{cases} k4x = 12k \\ \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Do đó k = 1/36. Khi đó, S được viết lại như sau

$$S = \frac{x}{9} + \frac{1}{x} + \frac{35}{9}x$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương và $x \geq 3$, ta được

$$S = \frac{x}{9} + \frac{1}{x} + \frac{35}{9}x \geq 2\sqrt{\frac{x}{9}.\frac{1}{x}} + \frac{35}{9}.3 = \frac{37}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi x=3.

Vậy giá trị nhỏ nhất cần tìm là 37/3.

Bài 2.2.3 (Theo [3]). Cho a, b, c là các số dương thỏa $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 4$. Tìm GTLN của biểu thức

$$S = \frac{1}{2a+b+c} + \frac{1}{a+2b+c} + \frac{1}{a+b+2c}$$

Giải.

Ta nhận thấy S là một biểu thức đối xứng nên ta đoán đdấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 3/4$, do đó ta sẽ tách các số hạng như sau và áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 4 số, ta được

$$2a+b+c = a+a+b+c \geq 4\sqrt[4]{a.a.b.c}$$

Khi đó

$$\frac{1}{2a+b+c} \leq \frac{1}{4\sqrt[4]{a.a.b.c}} \leq \frac{1}{4}.\frac{1}{4}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = \frac{1}{16}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$$

Chứng minh tương tự, ta suy ra

$$S \leq \frac{1}{16}\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{2}{b}+\frac{1}{c}\right) + \frac{1}{16}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{2}{c}\right)$$

$$= \frac{1}{16}.4\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 1$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{3}{4}$.

Vậy GTLN của S là 1.

Bài 2.2.4. Cho x, y, z là các số thực dương thỏa $x + y + z = 5$. Tìm GTNN của biểu thức

$$S = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}$$

Giải.

Trước hết, ta nhận thấy S cũng là một biểu thức đối xứng, do đó điểm rơi hay dấu bằng xảy ra khi $x = y = z = \frac{5}{3}$. Từ đó, ta sẽ tách các số hạng hợp lí dựa vào sơ đồ điểm rơi:

$$\begin{cases} x = y = z = \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{x^2}{y+z} = \dfrac{y+z}{m} \end{cases} \Rightarrow \frac{5}{6} = \frac{10}{3m} \Rightarrow m = 4$$

Khi đó, S được viết lại như sau:

$$S = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{x+z}{4} + \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} - \frac{x+y+z}{2}$$

$$= \frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{x+z}{4} + \frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} - \frac{5}{2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 2 số dương $\frac{x^2}{y+z}, \frac{y+z}{4}$ ta được $\frac{x^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{x^2}{y+z}.\frac{y+z}{4}} = x$

Tương tự, ta suy ra

$$\frac{y^2}{x+z} + \frac{x+z}{4} \geq 2\sqrt{\frac{y^2}{x+z}.\frac{x+z}{4}} = y$$

Và $\frac{z^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq 2\sqrt{\frac{z^2}{x+y}.\frac{x+y}{4}} = z$

Khi đó $S \geq x+y+z - \frac{5}{2} = \frac{5}{2}$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{y+z} = \dfrac{y+z}{4} \\ \dfrac{y^2}{x+z} = \dfrac{x+z}{4} \\ \dfrac{z^2}{x+y} = \dfrac{x+y}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{5}{3}$$

Vậy GTNN của S là $\frac{5}{2}$ tại $x = y = z = \frac{5}{3}$.

3. Kết luận

Bài viết trình bày được kỹ thuật chọn điểm rơi trong bất đẳng thức Cauchy thông qua một số ví dụ cụ thể, việc vận dụng tốt kỹ thuật chọn điểm rơi sẽ giúp người học đỡ lúng túng và tránh được những sai lầm khi giải quyết các bài toán khó như bất đẳng thức.

Tài liệu tham khảo

[1] Lê Hồng Đức (chủ biên), Đỗ Hoàng Hà, Lê Hoàng Nam, Đoàn Minh Châu, Đào Thị Ngọc Hà, 2017, *Bất đẳng thức giá trị lớn nhất và nhỏ nhất*, NXB ĐHQG Hà Nội.