Equipment with new general education program, Volume 1, Issue 294 (August 2023)
ISSN 1859 - 0810

Biện pháp phát triển năng lực tư duy, lập luận toán học cho học sinh lớp 10 thông qua dạy học Chủ đề Hệ thức lượng trong tam giác

Nguyễn Dương Hoàng*, Đào Thị Diễm Kiều

**Trường Đại học Đồng Tháp*
***Trường Thực hành Sư phạm, Trường Đại học Trà Vinh*
Received: 12/7/2023; Accepted: 17/7/2023; Published: 24/7/2023

Abstract: *Mathematics is a subject with many favorable opportunities for the development of thinking and reasoning ability for students. Mathematical thinking and reasoning ability plays a very important role in the learning process of students in Mathematics. The topic of triangle trigonometry in triangles has many theorems, properties, and exercises that require students to know how to analyze, synthesize, compare, analogy, and reason logically before concluding.... Therefore, this topic can create opportunities for students to form and develop their ability to think and reason mathematically. The article proposes some measures to develop mathematical reasoning and thinking ability for students in teaching the topic of triangle trigonometry in triangles - Geometry 10.*

Keywords: *The triangle trigonometry; Mathematical thinking and reasoning skills.*

1. Đặt vấn đề

Phát triển giáo dục và đào tạo được coi là quốc sách hàng đầu để thúc đẩy sự nghiệp công nghiệp hóa, hiện đại hóa đất nước. Để có thể đào tạo được nguồn nhân lực dồi dào, phát triển toàn diện, giáo dục giáo dục Việt Nam đã và đang đổi mới theo hướng tập trung phát triển năng lực người học. Mục tiêu chung của Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018 đã nêu rõ: Chương trình môn Toán giúp học sinh (HS) đạt mục tiêu hình thành và phát triển năng lực toán học bao gồm nhiều thành tố cốt lõi: Năng lực tư duy (NLTD) và lập luận toán học (LLTH); năng lực mô hình hóa toán học; năng lực giải quyết vấn đề toán học; năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng công cụ, phương tiện toán học, …. (Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018). Trong đó việc hình thành và phát triển NLTD và LLTH là cần thiết nhất vì khi có NLTD và lập luận HS sẽ có khả năng suy luận, phân tích, tổng hợp, so sánh, … từ đó hình thành nền tảng để phát triển những năng lực khác.

Bài viết xác định các biểu hiện của NLTD và LLTH trong chủ đề Hệ thức lượng trong tam giác và đề xuất một số biện pháp góp phần phát triển phát triển NLTD và LLTH cho HS lớp 10 thông qua dạy học Chủ đề Hệ thức lượng trong tam giác – Hình học 10 (Bộ sách Chân trời sáng tạo).

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Năng lực tư duy và lập luận toán học

Theo chương trình giáo dục tổng thể 2018, “*Năng lực là thuộc tính cá nhân được hình thành, phát triển nhờ tố chất có sẵn và quá trình học tập, rèn luyện, cho phép con người huy động tổng hợp các kiến thức, kĩ năng và các thuộc tính cá nhân khác như hứng thú, niềm tin, ý chí,… thực hiện thành công một loại hoạt động nhất định, đạt kết quả mong muốn trong những điều kiện cụ thể*”. Theo Phạm Minh Hạc (1992), *“Tư duy là quá trình nhận thức phản ánh những thuộc tính bản chất, những mối quan hệ có tính quy luật của sự vật và hiện tượng trong hiện thực khách quan”.* Theo Hoàng Phê, 2003, lập luận là “*Trình bày lý lẽ một cách có hệ thống, có lôgic nhằm chứng minh cho một kết luận về một vấn đề*”. (Hoàng Phê, Từ điển tiếng việt, 2003). Từ đó có thể hiểu, NLTD và lập luận trong dạy học toán thể hiện quá trình phân tích, suy luận và đưa ra kết luận một cách có hệ thống và logic; tìm ra cách giải quyết vấn đề, tạo ra các giải pháp sáng tạo.

Theo Chương trình Toán phổ thông 2018 (Bộ GD&ĐT, 2018), Những thể hiện về NLTD và LLTH đối với cập THPT là:

- Thực hiện được tương đối thành thạo các thao tác tư duy, đặc biệt là phát hiện sự tương đồng và khác biệt trong những tình huống tương đối phức tạp và lí giải được kết quả của việc quan sát.

- Sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để nhìn ra những cách thức khác nhau trong việc GQVĐ.

- Nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, GQVĐ.

ISSN 1859 - 0810

Giải thích, chứng minh, điều chỉnh được giải pháp thực hiện về phương diện toán học.

Từ những thể hiện trên giúp GV hình dung ra con đường phát triển NLTD và LLTH trong dạy học cấp THPT đảm bảo mang lại kết quả.

2.2. Một số biểu hiện của NLTD và LLTH của HS trong chủ đề Hệ thức lượng trong tam giác – Hình học 10 (Bộ sách Chân trời sáng tạo)

2.2.1. Nội dung chủ đề: Nội dung chủ đề Hệ thức lượng trong tam giác đều được đề cập ở cả ba bộ sách: Chân trời sáng tạo, Kết nối tri thức với cuộc sống, Cánh diều. Riêng bộ sách Chân trời sáng tạo gồm các nội dung: Giá trị lượng giác của một góc từ 0° đến 180°, Định lí côsin và định lí sin, Giải tam giác và ứng dụng thực tế.

2.2.2. Một số biểu hiện: Căn cứ vào các thể hiện của NLTD và LLTH theo Chương trình Toán phổ thông 2018 và nội dung chủ đề Hệ thức lượng trong tam giác. Chúng tôi xác định các biểu hiện của NLTD và LLTH của HS trong chủ đề Hệ thức lượng trong tam giác như sau:

- Thực hiện được tương đối thành thạo các thao tác tư duy như phân tích, tổng hợp, khái quát hóa, tương tự để phát hiện các định lí,chứng minh định lí, tìm lời giải bài toán; đặc biệt là phát hiện sự tương đồng và khác biệt trong trong từng lời giải, tìm ra lời giải tối ưu.
- Sử dụng được các phương pháp lập luận để chứng minh các định lí và tìm lời giải bài toán; Trình bày rõ căn cứ của các kết luận.
- Vận dụng được các kiến thức về Hệ thức lượng trong tam giác để giải quyết những bài toán thực tế

2.3. Một số biện pháp góp phần phát triển NLTD và lập luận cho HS thông qua dạy học chủ đề Hệ thức lượng trong tam giác

2.3.1. Biện pháp 1: Tập luyện cho HS thực hiện linh hoạt các thao tác tư duy cơ bản thông qua việc chứng minh các định lí và giải bài tập trong chủ đề Hệ thức lượng trong tam giác nhằm rèn luyện NLTD và LLTH cho HS.

Ví dụ 1: *(Minh họa phân tích, chứng minh định lí)* Chứng minh định lí cô sin

Với mọi tam giác *ABC*, nếu đặt *BA* = a, *CA* = *b*, *AB* = *c* thì ta luôn có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A;\ b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos B;$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

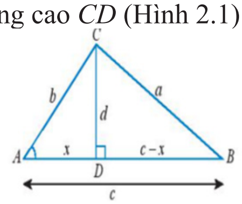
GV: Hãy xác định giả thuyết và kết luận của định lí

HS: GT: Δ*ABC* có *BC* = a, *AC* = *b*, *AB* = *c*; KL: Vì vai trò của a, *b*, *c* như nhau nên ta chỉ cần chứng minh $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

HS Phân tích: HS liên tưởng đến Hệ thức lượng trong tam giác vuông, HS thấy được bài toán này được mở rộng từ tam giác vuông đến tam giác bất kì (tam giác có góc *A* nhọn và tam giác có góc *A* tù).

GV: Làm thế nào để xuất hiện các tam giác vuông?

HS: Xét tam giác *ABC* có góc *A* nhọn , có thể tạo ra các tam giác vuông Δ*CAD* và Δ*CBD* bằng cách kẻ đường cao *CD* (Hình 2.1)



Hình 2.1

HS: Xét tam giác *CDB* vuông tại *D* ta có:

$$a^2 = d^2 + (c - x)^2 \qquad (1)$$

Xét tam giác *CDA* vuông tại *D* ta có: $d^2 = b^2 - x^2$

Thế $d^2 = b^2 - x^2$ vào (1) ta được

$$a^2 = d^2 + (c - x)^2 = b^2 - x^2 + c^2 - 2cx + x^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2cx \qquad (2)$$

GV: Đến đây, ta có điều phải chứng mình chưa?

HS: Chưa, ta cần tính *x* theo *b* và cos*A*

GV: Làm thế nào để tính *x* theo *b* và cos*A*?

HS: Xét tam giác *ABC* có góc *A* nhọn , xét tam giác *CDA* vuông tại *D*, ta có:

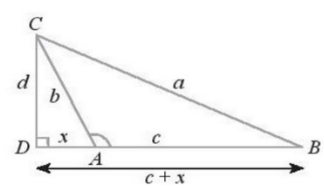
$$\cos\widehat{CAB} = \cos\widehat{CAD} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b\cos\widehat{CAB}$$

GV: Đến đây, làm thế nào để được điều phải chứng minh?

HS: Thế $x = b\cos\widehat{CAB}$ vào (2) ta được $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

GV: Liệu kết quả trên có còn đúng khi tam giác *ABC* có góc *A* tù?

HS: Kết quả trên vẫn đúng, cụ thể: Xét tam giác *ABC* có góc *A* tù , có thể tạo ra các tam giác vuông Δ*CAD* và Δ*CBD* bằng cách kẻ đường cao *CD* (Hình 2.2)



Hình 2.2

HS: Chứng mịnh tương tự, xét tam giác *CDB* vuông tại D ta có: $a^2 = d^2 + (c + x)^2$ (3)

Xét tam giác CDA vuông tại D ta có: $d^2 = b^2 - x^2$

Thế $d^2 = b^2 - x^2$ vào (3) ta được

$$a^2 = d^2 + (c + x)^2 = b^2 - x^2 + c^2 + 2cx + x^2$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 + 2cx \quad (4)$$

Xét tam giác CDA vuông tại D, ta có

$$\cos\widehat{CAD} = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b\cos\widehat{CAD}$$

Do hai góc CAD và CAB kề bù nên

$$\cos\widehat{CAB} = -\cos\widehat{CAD} = -\frac{x}{b} \Rightarrow x = -b\cos\widehat{CAB}$$

Thế $x = -b\cos\widehat{CAB}$ vào (4) ta được

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

GV: Nhận xét mối quan hệ giữa định lí cô sin và định lí pytago

HS: Định lí pytago là trường hợp đặt biệt của định lí côsin khi góc A vuông.

Như vậy, qua hoạt động chứng minh định lí côsin, HS có cơ hội phát triển được các thao tác tư duy thông qua việc: Phân tích bài toán chứng minh thành 3 trường hợp góc A nhọn, góc A tù, góc A vuông, sau đó khái quát hóa với mọi tam giác ABC, đặc biệt hóa: định lí pytago là trường hợp đặt biệt của định lí cô sin; so sánh: định lí pytago áp dụng cho tam giác vuông, định lí cô sin áp dụng cho tam giác thường.

2.3.2. Biện pháp 2: Tập luyện cho HS lập luận, trình bày rõ căn cứ của các kết luận trong giải quyết các vấn đề toán học liên quan đến hệ thức lượng trong tam giác; tự đánh giá cách thức giải quyết vấn đề.

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC biết $AB = 14, AC = 23,$

$\hat{A} = 125^\circ$. Tính cạnh BC và hai góc $\hat{B}, \hat{C}$.

Sau khi GV cho HS phân tích, lập luận để tìm cách giải bài toán. GV cho HS trình bày bài giải có căn cứ (yêu cầu HS mỗi bước suy luận phải nêu căn cứ vì sao). Kết quả mong đợi HS có thể trình bày được như sau:

Ta có: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos A$

(Áp dụng định lí côsin)

$$\Leftrightarrow BC^2 = 14^2 + 23^2 - 2 \cdot 14 \cdot 23 \cdot \cos 125^\circ \Rightarrow BC \approx 33$$

$\dfrac{BC}{\sin A} = \dfrac{AC}{\sin B} = \dfrac{AB}{\sin C}$ (Áp dụng định lí sin)

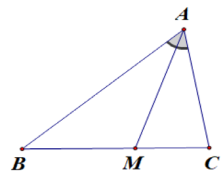
$$\Leftrightarrow \frac{33}{\sin 125^\circ} = \frac{23}{\sin B} = \frac{14}{\sin C} \Rightarrow \sin B = \frac{23 \cdot \sin 125^\circ}{33} \approx 0,57 \Rightarrow \hat{B} \approx 35^\circ$$

$\Rightarrow \hat{C} \approx 20^\circ$ (Áp dụng định lý tổng ba góc của một tam giác bằng 180^o)

Như vậy, qua ví dụ trên, GV đã giúp HS rèn luyện phân tích tìm lời giải bài toán; biết lập luận và trình bày lời giải có căn cứ.

2.3.3.Biện pháp 3: Hướng dẫn HS phân tích bài toán, biết nhìn bài toán dưới nhiều gốc độ khác nhau, từ đó tìm ra các cách giải khác nhau, phát hiện những điểm tương đồng và khác biệt trong từng lời giải, tìm ra lời giải tối ưu.

Ví dụ 3: Cho ΔABC có $AB = 2$; $AC = 3$; $\hat{A} = 60^0$. Tính độ dài đường phân giác trong góc A của tam giác ABC.



Hình 2.3

GV: Với giả thuyết trên và các công thức liên quan đến hệ thức lượng trong tam giác, tính chất đường phân giác trong, có những định hướng nào có thể tính được AM?

Kết quả mong muốn: HS có thể tìm được 2 hướng giải: Do ΔABC đã biết số đo hai cạnh và góc xen giữa hai cạnh đó nên có thể giải bài toán theo 2 hướng sau: Hướng 1: Dựa vào định lí cô sin và tính chất đường phân giác trong để tính AM; hướng 2: Dựa vào mối liên hệ giữa diện tích của 3 tam giác ΔABC, ΔABM ΔACM để tính AM

Hướng 1:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A = 7 \Rightarrow BC = \sqrt{7}.$$

Do AM là đường phân giác trong của ΔABC ta có:

$$\frac{BM}{CM} = \frac{AB}{AC} = \frac{2}{3} \Rightarrow BM = \frac{2\sqrt{7}}{5}$$

Áp dụng định lý côsin trong tam giác ABM ta được:

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\cos\widehat{ABC}$$

$$AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

$$= AB^2 + BM^2 - 2AB.BM.\frac{AB^2 + BC^2 - AC^2}{2.AB.BC} = \frac{108}{25}$$

(Xem tiếp trng 47)

- Định lí cosin, định lý sin; - Các kiến thức có liên quan đến thực tế.	- *Tìm hiểu nội dung đề bài*: Đọc, hiểu yêu cầu đề bài và vẽ hình; - *Tìm cách giải*: Phân tích đề bài, huy động kiến thức để tìm cách giải. - *Trình bày lời giải* đã tìm được; - *Đánh giá và nghiên cứu sâu lời giải*.	Chuyển ngôn ngữ bài toán thực tiễn về ngôn ngữ toán học (MHH toán học quen thuộc): Vận dụng định lý cosin, định lý sin giải bài tập toán và trả lời bài toán thực tiễn.

3. Kết luận

TKTHDH vận dụng định lý côsin, định lý sin giải bài tập nhằm phát triển năng lực MHH toán học cho HS. GV tổ chức cho HĐ theo tiến trình: Tìm hiểu nội dung đề bài → Tìm cách giải → Trình bày lời giải → Đánh giá và nghiên cứu sâu lời giải, qua đó HS hiểu nội dung bài toán có thể xảy ra trong thực tế. HS thiết lập bài toán toán học biểu diễn mối quan hệ này (MHH toán học) và vận dụng những kiến thức Toán được học giải quyết bài toán. Thông qua các hoạt động này HS hứng thú học tập vì các tình huống được các em quan sát và rút ra từ các hiện tượng thực tế trong cuộc sống hằng ngày. Qua đó rèn luyện cho các em năng lực toán học, đặc biệt là năng lực MHH toán học. Góp phần nâng cao chất lượng dạy học toán ở trường THPT.

Tài liệu tham khảo

[1]. Bộ Giáo dục và Đào tạo. (2018). *Chương trình GDPT môn Toán* (Thông tư 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26 tháng 12 năm 2018). Hà Nội

[2]. Đỗ Đức Thái (chủ biên), Đỗ Tiến Đạt, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Phạm Sỹ Nam, Vũ Đình Phượng, Nguyễn Thị Kim Sơn, Vũ Phương Thúy, Trần Quang Vinh (2018), *Dạy học phát triển năng lực môn Toán THPT*. Hà Nội: NXB ĐHSP. Hà Nội

[3]. Guy Brousseau (2002) (Edited and translated by Nicolas Balacheff, Martin Cooper, Rosamund Sutherland and Virginia Warfield), *Theory of Didactical situations in Mathematics (Didactique des Mathématiques, 1970-1990)*.

[4]. Lê Thị Hoài Châu[1*], Nguyễn Thị Nhân[2], Đánh giá năng lực mô hình hóa của học sinh trong dạy học chủ đề "Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số" ở lớp 12, *Tạp chí Khoa học trường ĐHSP TP Hồ Chí Minh,* Tập 16, Số 12 (2019).

[5]. Maab, K., 2006. What are modelling competencies? *The International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 113 – 142.

Biện pháp phát triển năng lực tư duy..........*(tiếp theo trang 41)*

Hướng 2: Vì đoạn thẳng *AM* chia tam giác *ABC* thành hai phần nên ta có:

$$S_{ABC} = S_{ABM} + S_{ACM}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC} = \frac{1}{2}AB.AM.\sin\widehat{BAM} + \frac{1}{2}AC.AM.\sin\widehat{MAC}$$

$$\Leftrightarrow AM = \frac{AB.AC.\sin 60^\circ}{(AB+AC).\sin 30^\circ} \Rightarrow AM = \frac{6\sqrt{3}}{5}.$$

- Đối với hướng 1, HS cần nhớ kiến thức cũ là tính chất của đường phân giác trong của một góc trong tam giác, để tính *AM*, cần tính thêm *BC, BM* (hoặc *CM*), $\widehat{ABC}$ (hoặc $\widehat{ACB}$);

- Đối với hướng 2, HS chỉ cần sử dụng 1 công thức $S = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}\sin B = \frac{1}{2}ab\sin C$

- Tuy nhiên, khi giải bài toán tính độ dài cạnh trong 1 tam giác, HS thường chỉ nghĩ đến định lí cô sin hoặc định lí sin, ít khi nghĩ đến hướng dùng diện tích tam giác, mặc dù hướng 2 sử dụng ít công thức hơn, ko cần sử dụng kiến thức cũ. Do đó, hướng giải nào tối ưu hơn sẽ thiên về khả năng tư duy của HS.

3. Kết luận

Bài viết đã đề xuất một số biện pháp nhằm phát triển NLTD và LLTH cho HS thông qua dạy học chủ đề "Hệ thức lượng trong tam giác". Trong mỗi biện pháp, tác giả đã trình bày mục đích của biện pháp, cách thức thực hiện và các ví dụ minh họa. Các biện pháp này cần được thực hiện linh hoạt, đồng bộ trong quá trình dạy học để góp phần phát triển NLTD và LLTH cho HS.

Tài liệu tham khảo

1. Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018a*), Thông tư số 32/2018/TT –Bộ GDĐT ngày 26/12/2018 về Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể*, Hà Nội.

2. Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018b), *Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 về Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*, Hà Nội.

3. Đỗ Đức Thái (Chủ biên), Đỗ Tiến Đạt, Phạm Xuân Chung, Nguyễn Sơn Hà, Phạm Sỹ Nam, Vũ Đình Phượng, Nguyễn Thị Kim Sơn, Vũ Phương Thúy, Trần Quang Vính (2018), *Dạy học phát triển năng lực môn Toán trung học phổ thông*, NXB Đại học sư phạm.

4. Hoàng Phê (2003), *Từ điển tiếng việt.* NXB Đà Nẵng.