

Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh lớp 11 qua dạy học giải bài tập Chương hàm số và phương trình lượng giác

Nguyễn Thị Hồng*; Nguyễn Dương Hoàng**

*Trường THPT Hiệp Thành, ** Trường Đại học Đồng Tháp
Received: 12/7/23; Accepted: 20/7/2023; Published: 31/7/2023

Abstract: This article proposes some measures to develop student's mathematical thinking and reasoning capacity for grade 11 students through teaching problem solving chapters on trigonometric functions and trigonometric equations, contributing to improving the quality of mathematics and contribute to improve mathematics teaching's quality in high school.

Keywords: Mathematical thinking and reasoning competence, trigonometric functions and trigonometric equations, grade 11

1. Mở đầu

Mục tiêu của Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018 nêu rõ:

Môn Toán góp phần hình thành và phát triển cho học sinh năng lực toán học (biểu hiện tập trung nhất của năng lực tính toán) bao gồm các thành phần cốt lõi sau: Năng lực tư duy và lập luận toán học; năng lực mô hình hóa toán học; năng lực giải quyết vấn đề toán học; năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (Bộ GD&ĐT, 2018b)

Nội dung chương “Hàm số lượng giác và phương trình lượng giác” với những kiến thức về góc lượng giác, HSLG, PTLG có sự kết nối với kiến thức lượng giác ở trung học cơ sở, kiến thức về lượng giác ở lớp 10 cũng như hàm số, phương trình v.v nên có nhiều cơ hội trong phát triển năng lực TD&LLTH cho học sinh trong dạy học.

Trước thực tiễn trên, yêu cầu cấp thiết đặt ra là phải nâng cao chất lượng việc dạy và học môn Toán nói chung và phát triển năng lực tư duy toán học trong đó có năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh trong dạy học toán. Đặc biệt góp phần tổ chức tốt dạy học toán 11 theo chương trình toán phổ thông 2018 bắt đầu toán thực hiện từ năm học 2023-2024.

Bài viết đề xuất một số biện pháp góp phần phát triển năng lực tư duy và phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh lớp 11 qua dạy học giải bài tập chương Hàm số và phương trình lượng giác..

2. Một số biện pháp phát triển Năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh lớp 11 qua dạy học chương Hàm số và phương trình lượng giác.

Biện pháp 1: Tập luyện cho học sinh sử dụng thành thạo các thao tác tư duy và lập luận, sử dụng các lý lẽ, chứng cứ hợp lý trong giải bài tập chương Hàm số và phương trình lượng giác

Nhằm giúp học sinh có thói quen sử dụng các thao tác tư duy từ đó giúp học sinh sử dụng thành thạo các thao tác tư duy như so sánh, phân tích, tổng hợp, ... trong quá trình học giải bài tập chương hàm số và phương trình lượng giác.

Ví dụ 2.1. Cho $0 < x < \frac{\pi}{6}$. Tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = \frac{3\sin^2 x(1-4\sin^2 x)}{\cos^4 x}$$

- GV: Hãy nghiên cứu bài toán và cho biết: bài toán cho gì và yêu cầu thực hiện gì?

- HS: Suy nghĩ, nghiên cứu đề bài, phân tích dữ kiện và nêu nhận định: bài toán có dạng tìm giá trị lớn nhất của hàm số lượng giác, biểu thức hàm có dạng phân số, có chứa hàm số $\sin x$, $\cos x$ nhưng không cùng bậc.

- HS: Phân tích, so sánh và nhận định: với điều kiện bài toán cho ta biến đổi để tìm được điều kiện của hàm $\sin x$:

$$0 < x < \frac{\pi}{6} \Rightarrow 0 < \sin x < \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 4\sin^2 x > 0$$

- HS: So sánh, tổng hợp và kết luận: tìm điều kiện cho biểu thức $1 - 4\sin^2 x > 0$, để tìm được GTLN của bài toán HS sẽ áp dụng bất đẳng thức Cô - si:

$$3\sin^2 x(1-4\sin^2 x) \leq \left(\frac{3\sin^2 x + 1 - 4\sin^2 x}{\cos^4 x}\right)^2 \leq \left(\frac{1 - \sin^2 x}{2}\right)^2 = \frac{\cos^4 x}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{Do } 3\sin^2 x(1-4\sin^2 x) &\leq \left(\frac{3\sin^2 x + 1 - 4\sin^2 x}{\cos^4 x}\right)^2 \\ &\leq \left(\frac{1-\sin^2 x}{2}\right)^2 = \frac{\cos^4 x}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Hay } \frac{3\sin^2 x(1-4\sin^2 x)}{\cos^4 x} \leq \frac{1}{4}. \text{ Nên } y \leq \frac{1}{4}.$$

- HS: Học sinh huy động kiến thức, tái hiện kiến thức và tổng hợp:

$$\begin{aligned} \text{Do } y &\leq \frac{1}{4} \text{ nên dấu "=" xây ra ở} \\ 3\sin^2 x = 1 - 4\sin^2 x &\Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{7} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{7}}{7} \end{aligned}$$

Nhận xét: Qua ví dụ trên, HS phân tích được bài toán dưới sự gợi ý, hướng dẫn của giáo viên, HS biết cách sử dụng thành thạo các thao tác như phân tích, so sánh, lập luận, sử dụng các chứng cứ, lý lẽ hợp lý trong quá trình giải bài tập.

Biện pháp 2: Rèn luyện cho HS suy nghĩ linh hoạt, biết nhìn bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau và vận dụng các phương pháp khác nhau để giải bài toán

2.2.1.1. Mục đích của biện pháp

Biện pháp này nhằm góp phần bồi dưỡng tính sáng tạo, sự nhanh nhạy, khả năng huy động kiến thức, lập luận, quy nạp và hướng giải quyết vấn đề. HS không lấy kiến thức sẵn có để áp dụng mà cần linh hoạt, mềm dẻo trong sự lựa chọn khi biến đổi để giải quyết bài toán.

Ví dụ 2. Tìm nghiệm của phương trình

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \text{ với } 0 < x < \pi$$

- GV: Nghiên cứu bài toán và nêu nhận xét?

- HS: Nghiên cứu bài toán, phân tích và lập luận: Đây là bài toán giải phương trình với điều kiện nghiệm của phương trình nằm trong một khoảng cho trước.

- HS: Nghiên cứu, phân tích và lập luận: Từ điều kiện $0 < x < \pi$ ta suy ra: $0 < 2x < 2\pi$.

- GV: Từ điều kiện của bài toán nhận định về cách giải?

- HS: Quan sát, huy động kiến thức và lập luận:

$$\text{Với điều kiện ta có: } \sin 2x = -\frac{1}{2}$$

- HS: Đây là phương trình lượng giác cơ bản, áp dụng công thức nghiệm tìm được nghiệm thỏa điều kiện $0 < 2x < 2\pi$. Từ đó tìm được nghiệm của phương trình.

- GV: Ngoài cách suy nghĩ trên, còn hướng giải nào khác cho bài toán không?

- HS: Quan sát, phân tích, huy động kiến thức và lập luận: phương trình có dạng phương trình lượng giác cơ bản $\sin x = a$, nên áp dụng công thức nghiệm

$$\sin x = a = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + k2\alpha \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \text{ để tìm}$$

được nghiệm của nó.

- HS: Tái hiện kiến thức, suy luận và lập luận:

Cách 1:

Với điều kiện $0 < x < \pi$ suy ra $0 < 2x < 2\pi$. Do đó,

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{7\pi}{6} \\ 2x = \frac{11\pi}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7\pi}{12} \\ x = \frac{11\pi}{12} \end{cases}$$

HS tổng hợp và lập luận: Vậy phương trình có nghiệm thuộc $(0; \pi)$ là $x = \frac{7}{12}\pi$ và $x = \frac{11}{12}\pi$.

Cách 2:

Ta có

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Xét điều kiện: $0 < x < \pi$ nên ta có:

$$+) 0 < -\frac{\pi}{12} + k\pi < \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{13}{12}. \text{ Do } k \in \mathbb{Z}$$

nên suy ra $k = 1$ hay $x = \frac{11}{12}\pi$.

$$+) 0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{7}{12} < k < \frac{5}{12}. \text{ Do } k \in \mathbb{Z}$$

nên suy ra $k = 0$ hay $x = \frac{7}{12}\pi$.

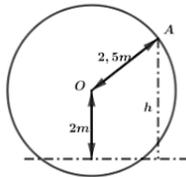
Nhận xét: Qua ví dụ này giúp học sinh biết suy nghĩ linh hoạt hơn, nhìn bài toán dưới nhiều góc độ khác nhau, giúp học sinh linh hoạt hơn trong việc lựa chọn phương pháp giải bài tập.

Biện pháp 3: Hướng dẫn HS sử dụng hợp lý ngôn ngữ, kí hiệu toán học trong giải bài tập chương Hàm số và phương trình lượng giác lớp 11, đặc biệt là chuyển đổi ngôn ngữ từ bài tập thực tiễn sang bài tập toán học.

2.2.3.1. Mục đích của biện pháp

Trong quá trình giải bài tập hàm số và phương trình lượng giác không tránh khỏi việc sử dụng thường xuyên các ngôn ngữ toán học, bao gồm các thuật ngữ, ký hiệu, các phép liên kết logic,.... Biện pháp này nhằm góp phần làm giàu thêm vốn ngôn ngữ cũng như giúp HS sử dụng một cách chính xác, hợp lý trong quá trình giải bài tập và vận dụng vào các tình huống thực tiễn. Thực tiễn có vai trò cực kỳ quan trọng trong quá trình nhận thức cũng như sự phát triển khả năng tư duy của HS.

Ví dụ 3. Một guồng nước (hay còn gọi là con nước) có dạng hình tròn bán kính $2,5m$; trục của nó cách mặt nước $2m$. Khi guồng quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một chiếc gầu gắn tại một điểm A của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$ trong đó $y = 2 + 2,5 \sin \left[2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \right]$, với x là thời gian quay của guồng ($x \geq 0$) và được tính bằng phút; ta quy ước rằng $y > 0$ khi gầu ở bên trên mặt nước và $y < 0$ khi gầu ở dưới mặt nước. Hãy cho biết khi nào gầu ở vị trí thấp nhất.



- GV: Hãy nghiên cứu và nêu nhận xét về bài toán?

- HS: Nghiên cứu bài toán, phân tích và nhận định: Bài toán có nội dung thực tiễn, không có yêu cầu về giải phương trình hay nói về hàm số lượng giác. Nhưng biểu thức biểu diễn liên quan đến khoảng cách từ một chiếc gầu đến mặt nước là một hàm số lượng giác.

- GV: Hãy nêu nhận xét về yêu cầu của bài toán? Chuyển yêu cầu bài toán về yêu cầu của bài toán học?

- HS: Huy động kiến thức, suy luận và lập luận: Bài toán yêu cầu: Tìm các giá trị của k để hàm số

$$y = 2 + 2,5 \left[2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \right] \text{ đạt giá trị nhỏ nhất.}$$

- HS: Huy động kiến thức, tái hiện kiến thức, phân tích, suy luận và lập luận:

Ta có:

$$-1 \leq \sin \left[2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \right] \leq 1 \Rightarrow y \leq 2 + 2,5 \cdot (-1) = -0,5$$

$$\begin{aligned} &\text{Gầu ở vị trí thấp nhất khi } \sin \left[2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) \right] = -1 \\ \Leftrightarrow &2\pi \left(x - \frac{1}{4} \right) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4} + k \\ \Leftrightarrow &x = k \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

HS phân tích, so sánh, tổng hợp và lập luận: Như vậy, chiếc gầu ở vị trí thấp nhất tại các thời điểm 0 phút, 1 phút, 2 phút,... (do thời gian nên không chọn $k < 0$).

Nhận xét: Qua ví dụ trên giúp học sinh biết sử dụng hợp lý ngôn ngữ, ký hiệu toán học trong giải bài tập, đặc biệt là việc chuyển đổi ngôn ngữ từ bài toán thực tiễn sang bài toán toán học.

Biện pháp 4: Tổ chức cho HS thực hiện giải bài tập chương hàm số và phương trình lượng giác theo qui trình giải 4 bước của G.Polya, từ đó giúp học sinh hình thành và có được phương pháp giải chung cho các dạng toán cơ bản, thông qua đó giúp rèn luyện và phát triển tư duy và lập luận toán học.

Biện pháp này nhằm giúp học sinh nắm vững hơn về cách giải bài tập, có được sự chủ động, tự tin trong quá trình học tập; giúp học sinh khắc sâu hơn về kiến thức, vững chắc hơn về kỹ năng khi giải bài tập, biết vận dụng kiến thức đã học qua đó giúp học sinh lĩnh hội kiến thức tốt hơn, nhanh hơn và dễ dàng hơn, tâm lý nhẹ nhàng, thoải mái hơn. Do đó, GV cần hướng dẫn học sinh giải thành thạo các bài tập theo quy trình 4 bước của G.Polya: Tìm hiểu nội dung bài toán, tìm tòi lời giải bài toán, trình bày lời giải bài toán, nghiên cứu sâu bài giải.

3. Kết luận

Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học trong dạy học giải bài tập chương Hàm số và phương trình lượng giác sẽ góp phần phát triển năng lực toán học thực hiện đổi mới dạy học toán theo hướng tiếp cận năng lực. Các biện pháp nêu trên nếu được thực hiện một cách linh hoạt trong dạy học giải bài tập sẽ có hiệu quả trong việc bồi dưỡng năng lực tư duy và lập luận toán học.

Tài liệu tham khảo

[1] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018), *Chương trình tổng thể môn toán*, NXBGD

[2] Đoàn Huỳnh (Tổng chủ biên), Nguyễn Huy Đoan (Chủ biên), Nguyễn Xuân Liêm, Nguyễn Khắc Minh, Đặng Hùng Thắng (2006). *Đại số & giải tích II nâng cao*. Nxb Giáo dục. Hà Nội

[3] Nguyễn Xuân Liêm; Đặng Hùng Thắng (2007). *Bài tập nâng cao và một số chuyên đề Đại số & giải tích II*. Nxb Giáo dục VN.