Journal of educational equipment: Applied research, Volume 2, Issue 297 (September 2023)
ISSN 1859 - 0810

“Bài toán con kiến” xây dựng công thức tính tổ hợp lặp

Bùi Hùng Vương*

**Khoa Công nghệ thông tin, Trường Đại học Nguyễn Tất Thành*

Received: 30/5/2023; Accepted: 7/6/2023; Published: 21/8/2023

Abstract: *In this article, we will introduce the "Ant Problem" and use the concept of combinatorics to solve that problem, then present the concept of repeating combinations and use the results of the above problem to find a formula to calculate the number of repeating combinations. Some examples are also given to illustrate the formula.*

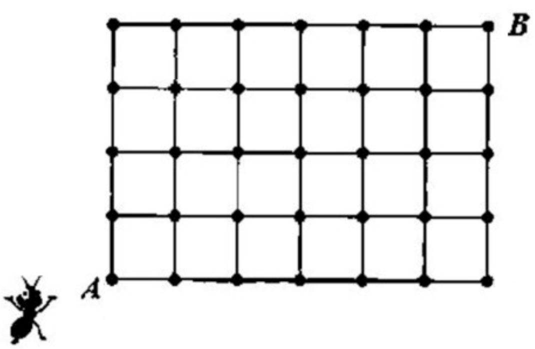
Keywords: *Iterative combination, ant problem*

1. Đặt vấn đề

Như chúng ta đã biết trong các qui tắc đếm thì chỉnh hợp và tổ hợp là hai qui tắc quan trọng, cho phép chúng ta đếm một cách nhanh chóng. Cả hai đều có đặc điểm chung là không được chọn phần tử trùng lặp, trong đó chỉnh hợp có phân biệt thứ tự các phần tử được chọn còn tổ hợp thì không. Để bổ sung cho cách chọn có thể được phép lặp lại thì chúng ta có khái niệm chỉnh hợp lặp và tổ hợp lặp. Phần trình bày sau đây chúng tôi xin giới thiệu khái niệm tổ hợp lặp và tìm công thức để tính số tổ hợp lặp từ “bài toán con kiến”.

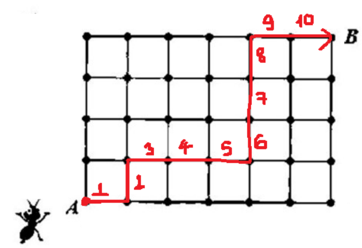
2. “Bài toán con kiến” xây dựng công thức tính tổ hợp lặp

Phát biểu “bài toán con kiến”: Một con kiến cần đi từ vị trí A đến vị trí B trong mạng lưới 64 ô sau đây, theo quy tắc chỉ được đi từ dưới lên trên () hoặc từ trái sang phải (). Khi đó sẽ có bao nhiêu cách đi từ A đến B?



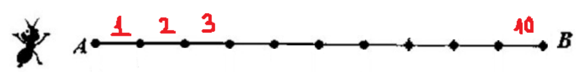
Hình 1

Giải bài toán: Xem hai điểm theo hàng ngang hoặc dọc là một đoạn thẳng. Khi đó để đi được từ A đến B thì con kiến sẽ đi qua 10 đoạn thẳng. Chúng ta quan sát thử ví dụ một cách đi ở hình bên dưới.



Hình 2

Trong 10 đoạn thẳng con kiến sẽ đi qua luôn luôn có đúng 6 đoạn nằm ngang và 4 đoạn nằm dọc. Như vậy ta xem 10 đoạn này nằm ngang hết thì mỗi cách đi từ A đến B tương đương với một cách chọn 4 đoạn nằm ngang chuyển thành nằm dọc (lưu ý là lúc dựng các đoạn này nằm dọc thì điểm A ta giữ cố định).



Hình 3

Như con đường đi ở hình 2 là từ hình 3 chúng ta chọn các đoạn 2, 6, 7, 8. Rõ ràng cách chọn này là không có thứ tự (do điểm A giữ cố định nên cho đoạn nào nằm ngang trước thì hình vẽ thu được đều giống nhau) và ta không chọn trùng lại, do đó số cách chọn là một tổ hợp chập 4 của 10. Bài toán đã được giải quyết.

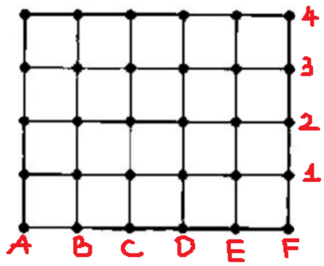
Bây giờ chúng ta sẽ đi giới thiệu định nghĩa tổ hợp lặp và sử dụng cách giải bài toán con kiến này để đưa ra công thức tính cho số tổ hợp lặp.

Ta định nghĩa tổ hợp lặp chập k của n, kí hiệu K^k_n, là số cách chọn k phần tử từ n phần tử, trong đó cách chọn là không phân biệt thứ tự và được quyền chọn trùng lặp. So với tổ hợp thì tổ hợp lặp được quyền lặp lại cho nên k có thể lớn hơn n. Điều ta quan tâm tiếp theo là xây dựng công thức tính. Bây giờ chúng ta sẽ xây dựng công thức tính qua một bài toán với số lượng cụ thể.

ISSN 1859 - 0810

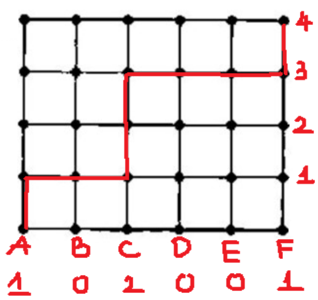
Bài toán 2: Giả sử cần chọn ra 4 phần tử (không phân biệt thứ tự và được quyền chọn lặp lại) từ 6 phần tử phân biệt, khi đó có bao nhiêu cách?.

Giải bài toán: Giả sử 6 phần tử là A,B,C,D,E,F, từ 6 phần tử này ta chọn ra 4 phần tử thỏa điều kiện. Ta xây dựng mạng lưới với mỗi điểm biểu diễn cho một chữ cái và thêm 4 điểm 1, 2, 3, 4 cho 4 phần tử chọn, theo hình bên dưới.



Hình 4

Ví dụ một cách chọn là A-C-C-F, nghĩa là C được chọn 2 lần, A và F được chọn 1 lần, các phần tử còn lại không được chọn. Chúng ta biểu diễn cách chọn giống như đường đi của con kiến trên mạng lưới.



Hình 5

Như vậy mỗi phần tử được chọn bao nhiêu lần chính là số đoạn thẳng màu đỏ nằm trên hàng dọc, tương ứng với cột của A, B, C, D, E, F. Bây giờ, chúng ta có thể liên tưởng đến "bài toán con kiến" mà chúng ta vừa làm ở trên. Lưu ý là 6 điểm A, B, C, D, E, F chỉ tạo được 5 đoạn thẳng và thêm 4 điểm 1, 2, 3, 4 nữa thì mỗi cách chọn tương ứng với một con đường đi chỉ gồm 9 đoạn thẳng, do đó số cách chọn sẽ là tổ hợp chập 4 của 9 hay C_{4+6-1}^{4}. Vậy đáp án bài toán là

$$K_6^4 = C_{4+6-1}^4 = C_9^4 = 126$$

Từ bài toán trên chúng ta có thể tổng quát được công thức tính cho số tổ hợp chập k của n là

$$K_n^k = C_{k+n-1}^k$$

Tiếp theo chúng tôi xin giới thiệu một vài bài toán sử dụng tổ hợp lặp để giải quyết.

Bài toán 3: Tìm số nghiệm nguyên không âm của phương trình sau: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 10$

Giải bài toán: Để vận dụng tổ hợp lặp thì ta xem giá trị của một biến chính là số lần lặp lại của biến đó khi chúng ta chọn. Ví dụ $x_1 = 2; x_2 = 3; x_3 = 5; x_4 = x_5 = 0$. Tức là ta chọn x_1 hai lần, x_2 ba lần, x_3 năm lần và x_4, x_5 không được chọn. Như vậy mỗi nghiệm của phương trình tương đương với một cách chọn 10 phần tử từ 5 phần tử x_1, x_2, x_3, x_4, x_5. Số nghiệm nguyên không âm của phương trình tương đương với số tổ hợp lặp chập 10 của 5. Vậy đáp án của bài toán là

$$K_5^{10} = C_{10+5-1}^{10} = C_{14}^{10} = 1001$$

Bài toán 4: Có 6 loại vắc-xin AstraZeneca, Gam-COVID, Vero Cell, Moderna, Janssen, Comirnaty. Cần tiêm vắc-xin cho 12 người, giả sử lượng vắc-xin của mỗi loại là đủ sử dụng, khi đó có bao nhiêu cách lấy ra 12 lọ để tiêm?.

Giải bài toán: Nhận xét bài toán là có thể tiêm cùng loại vắc-xin cho nhiều người, và cách tiêm ở đây là không phân biệt thứ tự tiêm trước hay tiêm sau. Do đó, chúng ta cần chọn ra 12 lọ vắc-xin từ 6 loại vắc-xin để tiêm, đây là một tổ hợp lặp chập 12 của 6. Vậy đáp án của bài là

$$K_6^{12} = C_{12+6-1}^{12} = C_{17}^{12} = 6188$$

Bài toán 5: Có 15 que kẹo giống nhau cần chia cho 10 đứa trẻ, khi đó có bao nhiêu cách chia?.

Giải bài toán: Nhận xét bài toán có thể sẽ có những đứa trẻ nhận được nhiều hơn một que kẹo, và cách chia kẹo ở đây là không phân biệt trẻ nào nhận kẹo trước hay nhận sau. Do đó, chúng ta cần chọn ra 15 đứa trẻ nhận kẹo từ 10 đứa trẻ, được quyền chọn lặp lại và không phân biệt thứ tự, đây là một tổ hợp lặp chập 15 của 10. Vậy đáp án của bài là

$$K_{10}^{15} = C_{15+10-1}^{15} = C_{24}^{15} = 1307504$$

2. Kết luận.

Khái niệm tổ hợp lặp cũng được xem là một trong những qui tắc đếm quan trọng, các bạn học sinh gặp chủ yếu ở bậc đại học. Bài báo đã xây dựng công thức tính cho tổ hợp lặp dựa trên một bài toán đố. Đây cũng là một hướng tiếp cận không quá phức tạp, người đọc có thể nắm bắt được ý tưởng để khi vận dụng công thức chúng ta không bị nhầm giá trị của n và k.

Tài liệu tham khảo

1.Đỗ Đức Thái (chủ biên) (2022). *Sách giáo khoa Toán 10 tập 2*, NXB ĐHSP

2. Đỗ Đức Giáo (2000). *Toán rời rạc*, NXB ĐHQG HN

3. Nguyễn Đức Nghĩa (2006). *Toán rời rạc*, NXB ĐHQG HN

4. Trần Nam Dũng (chủ biên) (2022). *Sách giáo khoa Toán 10 tập 2*, NXB GD Việt Nam