

# Sử dụng một số dạng bài tập về chuỗi số thuộc học phần Phương trình toán lý nhằm phát triển năng lực giải toán cho sinh viên Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội

Dương Thị Hoài Thu\*

\*ThS. Khoa Khoa học đại cương - Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội

Received: 15/9/2023; Accepted: 29/9/2023; Published: 10/10/2023

**Abstract:** When students study the Mathematical Equations section, studying the number series section, there are many mathematical formulas and calculation skills. Students need to master the related mathematical knowledge to solve the exercises. This article focuses on relevant mathematical knowledge to solve the number series exercises in the Mathematical Equations module taught at Hanoi University of Natural Resources and Environment to help students improve their knowledge and application. into specialized courses.

**Keywords:** The number series exercises,

## 1. Đặt vấn đề

Trong toán học, chuỗi Fourier (được đặt tên theo tên nhà toán học Joseph Fourier) của một hàm tuần hoàn là một cách biểu diễn hàm đó dưới dạng tổng của các hàm tuần hoàn có dạng  $e^{jnx}$ , trong đó,  $e$  là số Euler và  $j$  là đơn vị số ảo. Theo công thức Euler, các chuỗi này có thể được biểu diễn một cách tương đương theo các hàm sin và hàm cos. Một cách tổng quát, một chuỗi hữu hạn của các hàm lũy thừa của số ảo được gọi là một chuỗi lượng giác. Fourier là người đầu tiên nghiên cứu chuỗi lượng giác theo các công trình trước đó của Euler, d'Alembert và Daniel Bernoulli. Fourier đã áp dụng chuỗi Fourier để giải phương trình truyền nhiệt, các công trình đầu tiên của ông được công bố vào năm 1807 và 1811, cuốn *Théorie analytique de la chaleur* của ông được công bố vào năm 1822. Theo quan điểm của toán học hiện đại, các kết quả của Fourier có phần không chính thức liên quan đến sự không hoàn chỉnh trong khái niệm hàm số và tích phân vào đầu thế kỉ XIX. Sau đó, Dirichlet và Riemann đã diễn đạt lại các công trình của Fourier một cách chính xác hơn và hoàn chỉnh hơn.

Khi sinh viên (SV) học phần chuỗi số, đến phần khai triển hàm số thành chuỗi số dạng Fourier, có rất nhiều kiến thức liên qua đến toán học. Để phát triển năng lực giải toán của SV và áp dụng một cách có hệ thống và logic vào học phần chuyên ngành. Chính vì vậy, tôi đã viết bài báo này, thông qua một số dạng bài tập khai triển hàm số thành chuỗi số Fourier, giúp SV phát triển năng lực tư duy giải toán và vận dụng kiến thức đã học một cách linh hoạt, giúp SV đi sâu

nghiên cứu kiến thức và thấy hứng thú khi học học phần Phương trình toán lý.

## 2. Nội dung nghiên cứu

### 2.1. Khái niệm năng lực giải toán và vai trò của bài tập toán

Năng lực giải Toán là một phần của năng lực toán học, bao gồm tổ hợp các kĩ năng, đảm bảo thực hiện các hoạt động giải toán một cách hiệu quả; đó là: khả năng áp dụng tiến trình phát hiện và giải quyết vấn đề vào giải một bài toán cụ thể có phương thức tiếp cận sáng tạo và tính hướng đích cao, nhằm đạt kết quả sau khi thực hiện các hoạt động giải toán. Theo Đỗ Thị Trinh (2017): Năng lực giải toán là thuộc tính cá nhân, đáp ứng yêu cầu giải quyết thành công một vấn đề toán học dựa vào tổ chất sẵn có, sự huy động tổng hợp các kiến thức, kĩ năng, kinh nghiệm trong lĩnh vực toán học và các thuộc tính cá nhân khác như hứng thú, niềm tin, ý chí, niềm đam mê,...

Bài tập toán học có vai trò quan trọng trong môn Toán. Thông qua giải bài tập, SV phải thực hiện những hoạt động nhất định bao gồm cả nhận dạng và thể hiện định nghĩa, định lý, quy tắc hay phương pháp, những hoạt động phức hợp bao gồm hoạt động trí tuệ chung và hoạt động ngôn ngữ. Việc giải bài tập (cho dù là bài tập đơn giản nhất) cũng đòi hỏi SV phải trải qua quá trình quan sát, phân tích, liên tưởng, tổng hợp, phán đoán,... dựa vào những kinh nghiệm, kiến thức đã có để tìm đáp số từ những dữ liệu xuất phát. Quá trình đó giúp SV bổ sung thêm kiến thức mới và tạo cơ hội cho SV nhớ, hiểu, vận dụng, khắc sâu kiến thức. Trong môn Toán, có những yêu tố lí

thuyết đòi hỏi SV tiếp thu trong dạng tĩnh tại, riêng biệt, gây cho các em sự trừu tượng thì qua giải bài tập, SV được nắm kiến thức dưới dạng động, có sự tác động qua lại của nhiều yếu tố nên sự trừu tượng được giảm đi. Ngoài ra, các bài tập gắn với thực tiễn cuộc sống hàng ngày được kết hợp với sự dẫn dắt của GV về giá trị kiến thức môn Toán với thực tiễn giúp SV xác định động cơ, hứng thú học tập, tích cực, chủ động, tự giác trong học tập. Hơn nữa, sau mỗi lần giải bài tập thành công cùng với sự ghi nhận, động viên, khích lệ của GV sẽ mang lại cho SV niềm tin vào năng lực bản thân. Đây là điều kiện quan trọng để phát triển nhận thức, hình thành ở SV ý chí, quyết tâm học tập môn Toán, làm điểm tựa cho sự tiến bộ của các em đối với môn học

## 2.2. Một số dạng bài về chuỗi số nhằm phát triển năng lực giải toán cho SV

### 2.2.1. Kiến thức cần nhớ khi giải bài toán về khai triển hàm số thành chuỗi Fourier

\* Cho dãy số  $u_1, u_2, u_3, \dots$ . Biểu thức

$$\sum_{n=1}^n u_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n (*) \text{ được gọi là chuỗi số. } u_n$$

với  $n$  tổng quát gọi là số hạng tổng quát.

$$S_n = \sum_{n=1}^n u_n \text{ là tổng riêng thứ } n \text{ của chuỗi số.}$$

Nếu  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = S$  thì chuỗi số (\*) là hội tụ

và có tổng  $S$ .

$R_n = S - S_n$  gọi là phần dư thứ  $n$  của chuỗi số. Nếu chuỗi số hội tụ thì  $R_n \rightarrow 0$  khi  $n \rightarrow \infty$

Nếu  $S_n$  không dần tới giới hạn hữu hạn khi  $n \rightarrow \infty$  thì chuỗi là phân kỳ.

\* Chuỗi Fourier với  $f(x)$  là:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

với các hệ số là các hệ số Fourier:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

### 2.2.2. Khai triển Fourier của hàm số

#### 1) Điều kiện đủ của khai triển Fourier

Hàm số  $f(x)$  được gọi đơn điệu từng khúc trên đoạn  $[a, b]$ , nếu có thể chia đoạn  $[a, b]$  thành hữu hạn các đoạn con đơn điệu của  $f(x)$ .

Nếu  $f(x)$  đơn điệu từng khúc và bị chặn trên  $[-\pi, \pi]$  thì chuỗi Fourier của nó hội tụ từng điểm trên đoạn ấy và tổng của chuỗi ấy bằng:

a.  $f(x)$ ,  $-\pi < x < \pi$  và  $f(x)$  liên tục tại  $x$

b.  $\frac{1}{2}[f(-x) + f(+x)]$ ,  $-\pi < x < \pi$  và  $x$  là điểm

gián đoạn loại 1 của  $f(x)$

c.  $\frac{1}{2}[f(-\pi) + f(\pi)]$ ,  $x = \pm\pi$

#### 2) Khai triển Fourier của hàm chẵn và lẻ

Nếu  $f(x)$  là hàm chẵn trên  $[-\pi, \pi]$  thì  $\sin nx$  là hàm lẻ, nên  $b_n = 0$ . Vậy chuỗi Fourier của hàm chẵn  $f(x)$  là khai triển theo các hàm  $\cos nx$ :

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

Tương tự, nếu  $f(x)$  là hàm lẻ thì  $a_n = 0$ , nên ta có khai triển theo các hàm  $\sin nx$ :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

#### 3) Khai triển Fourier trên nửa đoạn $[0, \pi]$

Để tìm được khai triển Fourier của hàm số  $f(x)$  trên đoạn  $[0, \pi]$  ta có thể khai triển  $f(x)$  trên cả đoạn  $[-\pi, \pi]$  rồi sử dụng các công thức của phần trước. Thông thường ta có ba cách khai triển:

- Khai triển chẵn: xét hàm  $F(x)$  như sau:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ f(-x), & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

- Khai triển lẻ:  $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$ ;

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ 0, & x \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

#### 4) Khai triển Fourier của hàm có chu kỳ bất kỳ

Cho  $f(x)$  có chu kỳ là  $2L$ ,  $L > 0$ , ta cần tìm chuỗi Fourier của  $f(x)$  trên  $[-L, L]$ . Để làm điều đó ta dùng phép biến đổi  $t = \frac{\pi x}{L}$  và xét hàm số:

$$F(t) = f(x) = f\left(\frac{tL}{\pi}\right)$$

Hàm  $F(t)$  sẽ có chu kỳ  $2\pi$ . Thật vậy:

$$F(t + 2\pi) = f\left(\frac{tL}{\pi} + 2\pi\right) = f\left(\frac{tL}{\pi}\right) = F(t)$$

Vậy ta có khai triển Fourier của  $F(t)$  trên  $[-\pi, \pi]$ :

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$$

Trong đó:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{tL}{\pi}\right) \cos(nt) dt = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

với  $n = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \text{ với } n = 0, 1, 2, \dots,$$

Trở lại biến x ta được:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

với  $a_n$  và  $b_n$  được tính theo 2 công thức trên.

**2.2.3. Một số dạng bài về chuỗi số nhằm phát triển năng lực giải toán cho SV**

**Bài 1:** Tìm chuỗi Fourier của hàm  $f(x)$  xác định bởi:  $f(x) = 1; 0 \leq x \leq 2\pi; T = 2\pi$

HDG: Ta có chuỗi Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Cần xác định các hệ số của chuỗi Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 dx = \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi = 2$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 \cdot \cos(nx)) dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 \cdot \sin(nx)) dx = \frac{\cos 0 - \cos 2n\pi}{n\pi} = 0$$

Vậy chuỗi Fourier tương ứng của hàm  $f(x)$  đã cho

$$\text{là: } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) = 1$$

**Bài 2:** Tìm chuỗi Fourier của hàm  $f(x)$  xác định

$$\text{bởi: } f(x) = \begin{cases} 0; & -\pi \leq x \leq 0 \\ 1; & 0 < x \leq \pi \end{cases}; T = 2\pi$$

HDG: Cần xác định các hệ số của chuỗi Fourier.

$$\text{Ta có: } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 0 dx + \int_0^{\pi} 1 dx \right] = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (0 \cdot \cos nx) dx + \int_0^{\pi} (1 \cdot \cos nx) dx \right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_{-\pi}^0 (0 \cdot \sin nx) dx + \int_0^{\pi} (1 \cdot \sin nx) dx \right]$$

$$= \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} = \begin{cases} 0; & n = 2k \\ \frac{2}{n\pi}; & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Vậy chuỗi Fourier tương ứng của hàm  $f(x)$  đã cho

$$\text{là: } f(x) = \frac{1}{2}; n = 2k$$

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x; n = 2k + 1$$

**Bài 3:** Tìm chuỗi Fourier của hàm  $f(x)$  xác định

$$\text{bởi: } f(x) = \begin{cases} 1; & 0 \leq x \leq \pi \\ 2; & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}; T = 2\pi$$

HDG: Cần xác định các hệ số của chuỗi Fourier.

$$\text{Ta có: } a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} 1 dx + \int_{\pi}^{2\pi} 2 dx \right] = 3$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} (1 \cdot \cos nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (2 \cdot \cos nx) dx \right] = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{1}{\pi} \left[ \int_0^{\pi} (1 \cdot \sin nx) dx + \int_{\pi}^{2\pi} (2 \cdot \sin nx) dx \right]$$

$$= \frac{\cos n\pi - 1}{n\pi} = \begin{cases} 0; & n = 2k \\ -\frac{2}{n\pi}; & n = 2k + 1 \end{cases}$$

Vậy chuỗi Fourier tương ứng của hàm  $f(x)$  đã cho

$$\text{là: } f(x) = \frac{3}{2}; n = 2k$$

$$f(x) = \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-2}{(2k+1)\pi} \sin(2k+1)x$$

**Bài 4:** Tìm chuỗi Fourier của hàm  $f(x)$  xác định bởi:  $f(x) = x^2; -\pi \leq x \leq \pi; T = 2\pi$

HDG: Ta thấy hàm số  $f(x) = x^2$  liên tục tại mọi điểm thuộc đoạn  $[-\pi, \pi]$  nên chuỗi Fourier của  $f(x)$  hội tụ về chính nó.

Do  $f(x) = x^2$  là hàm chẵn nên ta có hệ số  $b_n = 0$ .

$$\text{Ta có: } a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left[ \frac{x^3}{3} \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3} \pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x^2 \cdot \cos nx) dx$$

$$\text{Đặt: } \begin{cases} u = x^2 \\ dv = \cos nx dx \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{2}{\pi} \left[ \frac{1}{n} x^2 \sin nx \right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} (x \cdot \sin nx) dx$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{4}{n^2} \cos(n\pi) = (-1)^n \frac{4}{n^2}$$

Vậy chuỗi Fourier tương ứng của hàm  $f(x)$  đã cho

$$\text{là: } f(x) = \frac{1}{3} \pi^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{4}{n^2} \cos nx$$

**3. Kết luận**

Qua phần trình bày một số dạng bài tập khai triển hàm số thành chuỗi số dạng Fourier nhằm phát triển năng lực giải toán cho SV, giúp SV tiếp tục nghiên cứu và áp dụng vào các học phần chuyên ngành một cách dễ dàng và vận dụng linh hoạt các kiến thức vào giải các bài toán. Từ đó giúp SV hứng thú và học tốt phần Chuỗi trong chương trình Phương trình toán lý ở đại học.

**Tài liệu tham khảo**

1. Đỗ Đình Thanh - Vũ Văn Hùng (2009), *Phương pháp toán lý*, NXB Giáo dục.
2. Đặng Trần Chiến (2020), *Giáo trình Phương trình toán lý*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.