Journal of educational equipment: Applied research, Volume 2, Issue 305 (January 2024)
ISSN 1859 - 0810

Sử dụng phương pháp chuyển hoá hình thức bài toán trong việc tìm lời giải

*Ngô Thị Huyền**
**ThS. Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật Vinh*
Received: 13/12/2023; Accepted: 21/12/2023; Published: 28/12/2023

Abstract: *Solving problems is a process of groping and exploring based on the problem solver's understanding. Some people have to tinker for a long time, trying this way and that to solve it, while others find a solution very quickly. So what is the secret to the ability to solve math problems quickly and accurately? How to practice?*
This article introduces readers to the method of transforming the form of the problem, one of the effective methods to find satisfactory solutions, from which the problem can be viewed from different aspects and angles.

Keywords: *Methods, transformations, solutions, algebra, trigonometry, geometry.*

1. Đặt vấn đề

Với các bài toán có dạng quen thuộc, ta có thể dễ dàng đưa ra lời giải. Tuy nhiên với các bài toán mà dạng của chúng không mẫu mực, ta khó có thể dùng các phép biến đổi thông thường để giải. Khi đó ta phải sử dụng đến các công cụ đặc biệt khác hoặc nghiên cứu các tính chất của các biểu thức để tìm cách đánh giá chúng. Ngoài ra phải tìm cách phát hiện lớp "ngụy trang" hình thức bài toán để thấy được dạng thực của bài toán, từ đó định hướng được đường lối giải.

2. Phương pháp chuyển hoá hình thức bài toán

Thực tế có một số bài toán nếu ta biết cách thay đổi hình thức của bài toán thì sẽ dễ dàng tìm được lời giải hoặc có lời giải tốt hơn. Cụ thể ta thường chuyển bài toán có dạng đại số sang dạng lượng giác, dạng đại số sang dạng hình học v.v…Ta xét các bài toán sau đây.

2.1. Bài toán chuyển từ dạng đại số sang dạng lượng giác

Bài toán 1. Xác định các tham số *a, b* sao cho hàm số:

$$y=\frac{ax+b}{x^2+1}$$

đạt giá trị lớn nhất bằng 4, đạt giá trị nhỏ nhất bằng -1.

Hướng dẫn giải

Do hàm y xác định với mọi x và thấy sự có mặt của x^2+1, ta lượng giác hoá hình thức của hàm số y bằng cách đặt: $x=\tan\varphi$.

Dưới hình thức mới, hàm số y có dạng:

$$y=\frac{a\tan\varphi+b}{\tan^2\varphi+1}=a\sin\varphi\cos\varphi+b\cos^2\varphi.$$

Suy ra

$$y=\frac{a}{2}\sin 2\varphi+\frac{b}{2}\cos 2\varphi+\frac{b}{2}$$

Sử dụng công thức

$$-\sqrt{a^2+b^2}\le a\sin u+b\cos u\le\sqrt{a^2+b^2},$$

ta được:

$$y_{\max}=\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$$

$$y_{\min}=\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}.$$

Đến đây, việc tìm a và b thoả mãn bài toán qui về việc giải hệ phương trình:

$$\begin{cases}\frac{b}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}=4\\ \frac{b}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}=-1.\end{cases}$$

Giải hệ trên bằng phương pháp cộng đại số ta thu được 2 nghiệm:

$$\begin{cases}a=4\\ b=3\end{cases}\text{ và }\begin{cases}a=-4\\ b=3.\end{cases}$$

Rõ ràng nếu để hàm y dưới dạng đại số, bài toán phải biến đổi dài dòng hơn nhiều.

Bài toán 2. Giải bất phương trình:

$$\frac{1}{1-x^2}>\frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}-1$$

Hướng dẫn giải

Điều kiện tồn tại của bất phương trình:

$1-x^2>0 \Leftrightarrow -1<x<1$

cho phép ta nghĩ đến việc đặt:

$x=\cos\varphi$

Khi đó:

$\sqrt{1-x^2}=|\sin\varphi|$

Ta có thể chọn $0<\varphi<\pi$ vì khi đó:

$$\begin{cases}-1<\cos\varphi<1\\ \sin\varphi>0.\end{cases}$$

Bất phương trình đã cho trong hình thức mới có dạng:

$$\frac{1}{\sin^2\varphi}>\frac{3\cos\varphi}{\sin\varphi}-1$$

$$\Leftrightarrow \cot^2\varphi-3\cot\varphi+2>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cot\varphi<1\\ \cot\varphi>2.\end{array}\right.$$

a) $\cot\varphi<1 \Rightarrow \frac{\pi}{4}<\varphi<\pi$

$$\Rightarrow -1<\cos\varphi<\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow -$$

b) Ta tính được:

$\cot\varphi=2\Rightarrow\cos\varphi=\frac{\cot\varphi}{\sqrt{1+\cot^2\varphi}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$, do đó:

$$\cot\varphi>2\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{5}}<\cos\varphi<1\Rightarrow\frac{2}{\sqrt{5}}<x<1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}-1<x<\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \frac{2}{\sqrt{5}}<x<1.\end{array}\right.$$

(đều thoả mãn điều kiện $0<x<1$).

Bài toán 3. Cho x, y, z thoả mãn:

$$x+y+z=xyz \text{ và } x,y,z\neq\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Chứng minh rằng:

$$\frac{3x-x^3}{1-3x^2}+\frac{3y-y^3}{1-3y^2}+\frac{3z-z^3}{1-3z^2}=\frac{3x-x^3}{1-3x^2}.\frac{3y-y^3}{1-3y^2}.\frac{3z-z^3}{1-3z^2}.$$

Hướng dẫn giải

Các số hạng có mặt trong bài toán làm ta liên tưởng đến công thức lượng giác:

$$\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}=\tan 3\alpha. \qquad (1)$$

Từ đó, đặt:

$x=\tan\alpha,\ y=\tan\beta,\ z=\tan\gamma,$

đẳng thức cần chứng minh trở thành:

$$\tan 3\alpha+\tan 3\beta+\tan 3\gamma=\tan 3\alpha.\tan 3\beta.\tan 3\gamma. \qquad (2)$$

Mặt khác ta có:

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma}{1-\tan\alpha.\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma.\tan\alpha} \qquad (3)$$

Từ giả thiết suy ra:

$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha.\tan\beta.\tan\gamma.$

Thay vào (3) ta được:

$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=0.$

Từ (1) suy ra:

$\tan(3\alpha+3\beta+3\gamma)=0.$

Từ (3) suy ra:

$\tan 3\alpha+\tan 3\beta+\tan 3\gamma-\tan 3\alpha.\tan 3\beta.\tan 3\gamma=0$

hay

$\tan 3\alpha+\tan 3\beta+\tan 3\gamma=\tan 3\alpha.\tan 3\beta.\tan 3\gamma.$

Đây chính là đẳng thức (2).

Bài toán 4. Trên đoạn [0;1], phương trình:

$8x(1-2x^2)(8x^4-8x^2+1)=1 \quad (4)$

có bao nhiêu nghiệm?

Nhận xét: Giải bài toán này trong phạm vi đại số rất khó. Dựa vào điều kiện $0<x<1$, ta nghĩ đến việc chuyển phương trình trên sang dạng lượng giác bằng cách đặt $x=\sin t$. (Bạn đọc tự giải).

2.2. Bài toán chuyển từ dạng đại số sang dạng hình học

Bài toán 5. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$$y=\sqrt{4x^2-12x+13}+\sqrt{4x^2-28x+53}$$

Hướng dẫn giải

Để ý rằng các tam thức bậc hai dưới dấu căn thức trong bài toán này đều dương với mọi x, hơn nữa ta có thể biến đổi:

$4x^2-12x+13=(2x-3)^2+(0-2)^2$

$4x^2-28x+53=(2x-7)^2+(0-2)^2$

Ta liên tưởng đến công thức tính độ dài đoạn thẳng: $AB^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

trong đó $A\ (x_1; y_1)$, $B\ (x_2; y_2)$

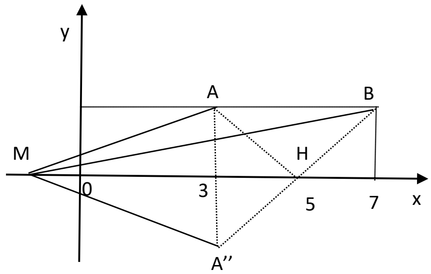
Hàm y biến đổi về dạng:

$$y=\sqrt{(2x-3)^2+(0-2)^2}+\sqrt{(2x-7)^2+(0-2)^2}.$$

Gọi $M\ (2x; 0)$ chạy trên Ox và $A\ (3; 2)$, $B\ (7; 2)$ là các điểm cố định, ta thu được:

$y=MA+MB$. (hình 2.1)

Ta chuyển về bài toán hình học: Xác định vị trí của M trên trục Ox sao cho $MA + MB$ đạt giá trị nhỏ nhất.



Hình 2.1

Ta có: $MA + MB = MA' + MB \geq A'B,$
đẳng thức xảy ra khi

$$M \equiv H \Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2},$$

$y_{\min} = HA + HB = 2HB = 4\sqrt{2}.$

Vậy $y_{\min} = y\left(\frac{5}{2}\right) = 4\sqrt{2}.$

<u>*Bài toán 6*</u>. Cho các số dương *x, y, z* thoả mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = 25 \\ \frac{y^2}{3} + z^2 = 9 \\ z^2 + xz + x^2 = 16 \end{cases}$$

Tính D = $xy + 2yz + 3xz$.

Hướng dẫn giải

Các số ở vế phải: 25, 9, 16 làm chúng ta nghĩ đến bình phương số đo các cạnh của một tam giác vuông. Nếu vậy, vế phải cũng là bình phương số đo các cạnh của một tam giác. Bằng cách phân tích lượng giác kết hợp đại số, ta có các biến đổi sau:

$$x^2 + xy + \frac{y^2}{3} = x^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2x.\frac{y}{\sqrt{3}}.\cos 150^0 = BC^2 = 25$$

$$\frac{y^2}{3} + z^2 = \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2 + z^2 = AB^2 = 9$$

$$z^2 + xz + x^2 = z^2 + x^2 - 2zx\cos 120^0 = AC^2 = 16.$$

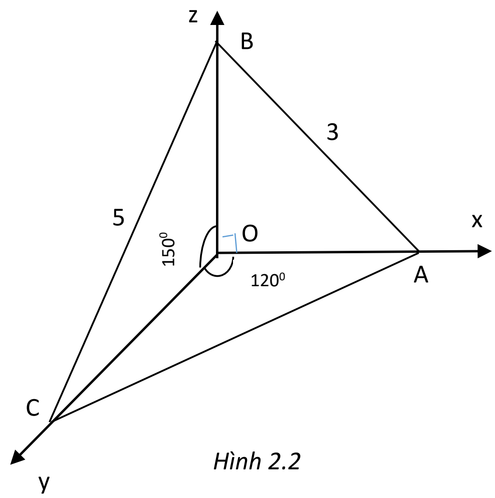
Trong đó tam giác *OAB* vuông tại *O*, các tam giác *OAC*, *OBC* nằm trong hai mặt phẳng vuông góc, tam giác *ABC* vuông tại A. (hình 2.2)

Để tính D, ta tìm cách lập phương trình có chứa ẩn là D.

Ta có: $S_{ABC} = \frac{1}{2}AB.AC = \frac{1}{2}.3.4 = 6.$

Mặt khác:

$$\begin{aligned} S_{ABC} &= S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} \\ &= \frac{1}{2}y\frac{z}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2}\frac{y}{\sqrt{3}}x\sin 150^0 + \frac{1}{2}zx\sin 120^0 \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3}}yz + \frac{1}{4\sqrt{3}}yx + \frac{\sqrt{3}}{4}zx \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}}(2yz + yx + 3zx) \\ &= \frac{1}{4\sqrt{3}}D \end{aligned}$$



Hình 2.2

Rõ ràng nếu không chuyển về bài toán hình học, chúng ta sẽ gặp nhiều khó khăn trong việc tìm lời giải bài toán này.

3. Kết luận

Các đặc điểm về dạng của bài toán là phần hình thức của bài toán đó. Do sự thống nhất giữa nội dung và hình thức nên việc nghiên cứu hình thức bài toán về thực chất là khám phá nội dung bài toán. Việc rèn luyện khả năng chuyển đổi hình thức bài toán cũng giúp người học rèn luyện khả năng nhìn sự vật hiện tượng dưới các góc độ khác nhau, từ đó thấy được bản chất của sự vật hiện tượng.

Tài liệu tham khảo

[1] Nguyễn Thái Hòe, (2001), *Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập toán*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[2] Trần Chí Hiếu, Nguyễn Danh Phan (1999), *Các chuyên đề toán THPT đại số 10*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[3] G. Polya, (1997), *Giải bài toán như thế nào*, NXB Giáo dục, Hà Nội.