Equipment with new general education program, Volume 1, Issue 306(February 2024)
ISSN 1859 - 0810

Phát triển năng lực tư duy và lập luận toán học cho học sinh thông qua dạy học Chủ đề "Lượng giác" ở lớp 11

*Phạm Anh Tuấn**

**Trường THPT Thiên Hộ Dương, tỉnh Tiền Giang*
Received: 2/1/2024; Accepted: 12/1/2024; Published: 24/1/2024

Abstract: *Developing mathematical thinking as well as reasoning ability for students in learning is extremely important and is also one of the issues that need to be researched to contribute to realizing the educational goals of the general math program. 2018. Mathematics is a subject with good conditions to train and develop students' thinking and reasoning abilities, one of the 5 specific competencies included in the general education curriculum of Mathematics 2018. The article clarifies the manifestations of mathematical thinking and reasoning capacity and proposes teaching organization measures to develop students' mathematical thinking and reasoning capacity through teaching the topic " Trigonometry" in grade 11.*

Keywords: *Capacity; Mathematical thinking and reasoning; Trigonometric; Grade 11.*

1. Đặt vấn đề

Một trong những mục tiêu của Chương trình GDPT môn Toán năm 2018 là hình thành và phát triển năng lực (NL) toán học, bao gồm các thành tố cốt lõi: NL tư duy và lập luận toán học (NLTD&LLTH); Năng lực (NL) mô hình hóa toán học; NL giải quyết vấn đề toán học; NL giao tiếp toán học; NL sử dụng công cụ, phương tiện học toán" [2]. Như vậy, NLTD&LLTH được coi là một trong những NL cốt lõi cần được hình thành và phát triển cho học sinh (HS) trong DH môn Toán ở trường phổ thông. Thực tiễn DH Toán cho thấy, nhiều HS còn bộc lộ những hạn chế về NLTD&LLTH, áp dụng máy móc, suy nghĩ rạp khuôn,… . Do đó, DH phát triển NLTD&LLTH cho HS trong DH Toán là vấn đề cần được quan tâm nghiên cứu và triển khai.

Chủ đề "Lượng giác" là nội dung khá mới mẻ đối với HS lớp 11; nó thể hiện khá đầy đủ các kiến thức về lượng giác của toán THPT chương trình 2018. Đây là nội dung có thể phát triển NLTD&LLTH cho HS trong quá trình học toán. Bài viết này đề xuất một số biện pháp phát triển NLTD&LLTH cho HS thông qua DH chủ đề "Lượng giác" ở lớp 11.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Một số khái niệm cơ bản

NL là một khái niệm tương đối trừu tượng, cho đến nay vẫn có nhiều cách tiếp cận và cách diễn đạt khác nhau. Theo Bùi Văn Huệ (2000): "*NL là tổng hợp những thuộc tính độc đáo của cá nhân phù hợp với những yêu cầu đặc trưng của một hoạt động nhất định, nhằm đảm bảo việc hoàn thành có kết quả tốt trong lĩnh vực hoạt động đó"* [3].

Theo Chương trình GDPT môn Toán (2018): "*NL là thuộc tính cá nhân được hình thành, phát triển nhờ tố chất sẵn có và quá trình học tập, rèn luyện, cho phép con người huy động tổng hợp các kiến thức, kỹ năng và các thuộc tính cá nhân khác như hứng thú, niềm tin, ý chí,... thực hiện thành công một loại hoạt động nhất định, đạt kết quả mong muốn trong những điều kiện cụ thể*"[1]

Từ đó có thể hiểu NLTD&LLTH là quá trình hướng người học nhận thức, phản ánh, tổng hợp các kiến thức, kĩ năng về những thuộc tính bản chất, những mối quan hệ có tính chất quy luật từ đó ghi nhớ, tái hiện, trừu rượng hóa, khái quát hóa, tưởng tượng, suy luận – giải quyết vấn đề và vận dụng vào thực tiễn khi học Toán.

2.2. Một số biểu hiện của NLTD&LLTH trong DH chủ đề "Lượng giác" ở lớp 11

Theo chương trình GDPT môn Toán (2018), các tiêu chí, chỉ báo của NLTD&LLTH được thể hiện qua việc:*"- Thực hiện được các thao tác tư duy như: so sánh, phân tích, tổng hợp, đặc biệt hóa, khái quát hóa, tương tự; quy nạp, diễn dịch.*

- Chỉ ra được chứng cứ, lí lẽ và biết lập luận hợp lí trước khi kết luận.

- Giải thích hoặc điều chỉnh được cách thức giải quyết vấn đề về phương diện toán học" [2].

Trong nghiên cứu này, căn cứ vào nội dung của chủ đề "Lượng giác" tác giả xác định các biểu hiện của NLTD&LLTH gồm:

- Thực hiện được các thao tác tư duy: Quan sát, giải thích được sự tương đồng và khác biệt giữa các công thức lượng giác cơ bản, các cung có liên quan đặc biệt với các công thức lượng giác; giữa các hàm số lượng giác; giữa các dạng phương trình,… So sánh, phân tích được trường hợp nào sử dụng công thức cơ bản và khi nào sử dụng công thức lượng giác; chọn phương pháp giải phù hợp cho từng dạng bài toán và giải được các bài toán có tính chất tương tự nhau. Khái quát hóa các dạng toán và giải được các trường hợp đặc biệt.

- Chỉ ra được chứng cứ, lý lẽ và biết lập luận hợp lý khi sử dụng các công thức, hàm số lượng giác, công thức nghiệm, cách giải phương trình trước khi đưa ra kết luận.

- Giải thích được việc lựa chọn các công thức, hàm số, dạng phương trình để giải bài toán theo nhiều cách, từ đó lựa chọn cách giải tối ưu.

- Phân tích và đánh giá được các sai lầm thường gặp trong giải toán, điều chỉnh được cách giải bài toán.

- Sử dụng được kiến thức lượng giác để mô tả quan hệ thực tiễn dẫn đến mô hình toán.

2.3. Một số biện pháp phát triển NLTD&LLTH thông qua DH chủ đề "Lượng giác" ở lớp 11

2.3.1. Rèn luyện cho HS các thao tác tư duy thông qua DH chủ đề "Lượng giác"

* *Mục đích của biện pháp:* Trong quá trình DH Toán, đòi hỏi HS cần phải thường xuyên thực hiện các thao tác tư duy như phân tích, tổng hợp, so sánh, khái quát hóa, trừu tượng hóa,... Việc rèn luyện các thao tác tư duy thông qua DH chủ đề "Lượng giác" sẽ giúp HS hiểu, nắm vững và nhanh ghi nhớ các kiến thức lượng giác.

* *Cách thức thực hiện:*

- GV cần tập luyện cho HS kĩ năng tự đặt và trả lời các câu hỏi thông các bài toán, tình huống cụ thể: Đã từng gặp bài toán hay dạng toán khác tương tự hay chưa? Có thể áp dụng kiến thức nào đã học để giải toán? Hãy giải thử bài toán liên quan, bài toán tương tự hay bài toán tổng quát, xét bài toán ở các trường hợp đặc biệt?...

- GV có thể hướng dẫn HS phân tích giả thiết và kết luận, làm rõ ý nghĩa của từng yếu tố đã cho.

* *Ví dụ 1:* Sau khi học công thức cộng $\cos(\alpha + \beta)$ có thể yêu cầu HS tự tìm công thức tính $\cos 2x$ theo $\cos x$.

GV yêu cầu HS phân tích biến đổi $\cos 2x$ thành $\cos(x + x)$. Sự phân tích này diễn ra trên cơ sở tổng hợp, liên hệ biểu thức $\cos 2x$ với $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$. Từ việc phân tích, HS đưa trường hợp riêng $\cos(\alpha + \beta)$ vào biểu thức tổng quát $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ là một bước đi của khái quát hóa đi tới kiến thức đã biết, việc này thực hiện nhờ trừu tượng hóa, nêu bật các đặc điểm bản chất "hàm số cos", "đối số có dạng tổng của hai số".

GV yêu cầu HS đặc biệt hóa công thức $\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$ cho trường hợp $\alpha = x$, $\beta = x$ để đi đến công thức $\cos(x + x) = \cos^2 x - \sin^2 x$. Khi đó, HS tiếp tục phân tích để biến đổi $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Cuối cùng, HS tổng hợp dẫn tới $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

GV yêu cầu HS tự xây dựng công thức $\cos 3x$ theo $\cos x$ với cách làm tương tự.

2.3.2. Hướng dẫn HS sử dụng kiến thức lượng giác xét bài toán dưới nhiều góc độ để tìm được các cách giải khác nhau, từ đó chọn cách giải tối ưu

* *Cách thức thực hiện:* GV đưa ra một bài toán, hướng dẫn HS cách phân tích bài toán theo các hướng khác nhau để tìm nhiều cách giải cho bài toán, từ đó có thể chọn cách giải tối ưu.

* *Ví dụ 2:* Khi HS giải bài toán: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá nhỏ nhất của hàm số $y = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2M - 3m$.

GV yêu cầu HS nhận xét hàm số, từ đó gợi cho HS huy động một số kiến thức liên quan để hỗ trợ HS đưa biểu thức $\sqrt{3}\sin x - \cos x$ về biểu thức quen thuộc chỉ còn một hàm số lượng giác hoặc thực hiện biến đổi đưa hàm số về phương trình dạng $\sqrt{3}\sin x - \cos x = y - 2$ là phương trình bậc nhất đối với hàm số $\sin x$, $\cos x$. Từ đó HS định hướng hai cách giải như sau:

Cách 1: Sử dụng công thức lượng giác và tập giá trị của hàm số lượng giác.

HS sử dụng các công thức lượng giác để biến đổi biểu thức $\sqrt{3}\sin x - \cos x$ như sau:

$$\sqrt{3}\sin x - \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x\right) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$$

. Như vậy HS đã biến đổi hàm số đã cho thành $y = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 2$

GV yêu cầu HS nhắc lại tập giá trị hàm số sin và giải bài toán.

HS: Với mọi $x \in \mathbb{R}$, ta luôn có $-1 \le \sin x \le 1$, từ điều này dẫn đến sự biến đổi hàm số trên trở thành $0 \le y \le 4$. Suy ra $M = 4$ và $m = 4$. Vậy $P = 8$.

Cách 2: Sử dụng điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất đối với sinx, cosx.

GV yêu cầu HS nêu điều kiện có nghiệm của phương trình $a\sin x + b\cos x = c$. Từ đó đưa ra lời giải bài toán.

HS: Điều kiện có nghiệm của phương trình $a\sin x + b\cos x = c$ là $a^2 + b^2 \ge c^2$ (*). Giả sử y_0 là một giá trị của hàm số, khi đó tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho

$y_0 = \sqrt{3}\sin x - \cos x + 2$, hay là phương trình $\sqrt{3}\sin x - \cos x = y_0 - 2$ có nghiệm. Từ điều kiện $a^2 + b^2 \geq c^2$, HS biến đổi được $y_0^2 + 4y_0 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq y_0 \leq 4$ rồi kết luận $M = 4$ và $m = 0$. Do đó $P = 8$.

Ở cách giải 1, các kiến thức HS cần huy động để giải bài toán gần gũi với các em. Nội dung lượng giác ở lớp 11 theo chương trình giáo dục môn Toán năm 20218 được tin gọn và dễ hơn, nhất là phần phương trình lượng giác chỉ giảng dạy phương trình giác cơ bản. Do đó, ở cách giải 2 kiến thức huy động để giải bài toán sẽ khó hơn, HS cần có sự hỗ trợ nhiều hơn từ GV. Như vậy, đối với HS cách giải 1 sẽ dễ làm, tiếp thu dễ dàng hơn cách giải 2.

2.2.3. Tổ chức hoạt động cho HS phân tích, đánh giá các sai lầm, khắc phục và sữa chữa sai lầm thường gặp khi giải toán

* *Mục đích biện pháp:* Trong quá trình giải toán, việc phát hiện được các sai lầm và vạch rõ được nguyên nhân sai lầm của HS sẽ giúp HS đưa ra các quyết định điều chỉnh có hiệu quả.

* *Cách thức thực hiện:* GV lựa chọn bài toán có chứa sai lầm, tổ chức HS phát hiện sai lầm, hướng dẫn HS sữa chữa sai lầm.

* *Ví dụ 3:* Cho cosα $= \dfrac{3}{5}$ với $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Tìm sinα, tanα và cotα.

▪ *Lời giải sai lầm thường gặp:*

HS: Ta có:

$$\Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Do đó $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{4}{3}$ và $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \dfrac{3}{4}$.

▪ *HS kiểm tra bài toán và phát hiện sai lầm:*

HS: Kiểm tra $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ lại dấu các giá trị lượng giác, vì góc α thỏa điều kiện $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên điểm cuối của góc α thuộc góc phần tư thứ IV, khi đó ta có sinα < 0, tanα < 0 và cotα < 0. Đối chiếu với kết quả của lời giải trên không đúng với điều kiện về góc.

▪ *Giải thích nguyên nhân*

GV: Đa số HS đều cho rằng từ

$\sin^2 x = 1 - \cos^2 x \Rightarrow \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$.

Cần lưu ý rằng: $a^2 = b \geq 0 \Leftrightarrow |a| = \sqrt{b} \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{b}$

▪ *Điều chỉnh và lời giải đúng*

HS: Ta có: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\frac{9}{25}} = \pm\frac{4}{5}.$$

Vì $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ nên $\sin\alpha < 0$. Vậy $\sin\alpha = -\dfrac{4}{5}$.

Do đó $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\dfrac{4}{3}$ và $\cot\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\dfrac{3}{4}$.

▪ *GV lưu ý với HS:*

i) Phép biến đổi $a^2 = b \geq 0 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{b}$.

ii) Để xét dấu các giá trị lượng giác của góc *á* với *á* = (*OA, OM*) ta cần xem điểm *M* thuộc góc phần tư thứ mấy của đường tròn lượng giác.

Như vậy, trong quá trình giải toán GV cần chỉ ra cho HS các bước lập luận thiếu cơ sở, không chính xác, nguyên nhân dẫn đến các sai lầm. Tập cho HS thói quen giải toán phải có cơ sở lý luận và phải thật đầy đủ.

2.2.4. Tập luyện cho HS vận dụng kiến thức lượng giác vào giải một số bài toán có nội dung thực tiễn

* *Mục đích biện pháp:* giúp HS thấy được mối quan hệ giữa các kiến thức lượng giác đã học với thực tiễn, vận dụng của lượng giác trong giải bài toán có nội dung thực tiễn.

* *Cách thức thực hiện:* GV tổ chức cho HS thực hiện các hoạt động mô hình hóa Toán học trong quá trình học toán. GV tìm và tạo bối cảnh hay tình huống thực tiễn cho các bài toán có thể dựa vào bối cảnh trong lịch sử Toán học; bối cảnh trong cuộc sống thực (trò chơi, mua sắm, …); các vấn đề xã hội (giao thông, dự báo thời tiết, …); giáo dục tích hợp hoặc giáo dục STEM (Toán học về Vật lí, Hóa học, Công nghệ, Tin học) …

3. Kết luận

Phát tiển NL cho HS là nhiệm vụ trọng tâm trong đổi mới chương trình GDPT hiện nay. Để quá trình đổi mới giáo dục đạt hiệu quả cao thì một trong những nhiệm vụ quan trọng là cần phải xác định được các biểu hiện cụ thể của mỗi thành tố NL trong từng chủ đề DH, đồng thời xây dựng các biện pháp DH tương thích với các thành tố đó. Trong bài viết này, các biện pháp sư phạm được đề xuất dựa trên cơ sở lí luận và các biểu hiện của NLTD&LLTH. Do đó trong quá trình thực hiện biện pháp, GV cần chú ý dẫn dắt HS theo hướng tích cực hóa hoạt động học tập nhằm hiện thực hóa các biện pháp trong thực tiễn của quá trình DH.

Tài liệu tham khảo

[1] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018a), *Chương trình GDPTChương trình tổng thể* (Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018) Hà Nội.

[2] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018b), *Chương trình GDPT môn Toán* (Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018). Hà Nội.

[3] Bùi Văn Huệ (2000), Tâm lý học, NXB ĐHQG HN, Hà Nội.