Journal of educational equipment: Applied research, Volume 2, Issue 307 (February 2024)
ISSN 1859 - 0810

Sử dụng cực trị hàm nhiều biến có điều kiện trong giải quyết bài toán tối ưu hóa lợi ích tiêu dùng

Trần Thị Hằng, Phùng Thị Anh Vũ*, Nguyễn Thị Minh Nguyệt**

**Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội*

Received: 29/01/2024; Accepted: 06/02/2024; Published: 07/02/2024

***Abstract**: In economics, solving optimization problems is one of the very important issues. When solving optimization problems for consumers, two issues are raised: maximizing consumption benefits and minimizing spending. In the framework of this article, the author mentions the use of the Lagrange multiplier method in the extrema problem of a constrained multivariable function to solve the problem of optimizing consumption benefits.*

***Keywords:** Extreme value, multi-variable function extreme value with constraints, optimizing consumption benefits, optimization problem*

1. Đặt vấn đề

Đứng trước các mặt hàng, với mức thu nhập dành cho tiêu dùng cố định, người tiêu dùng cần xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng để tối đa hóa hóa lợi ích của mình. Mặt khác, với mức độ lợi ích cố định, người tiêu dùng cũng cần xác định cơ cấu mua sắm để chi phí bỏ ra là ít nhất.

Bài toán sau đây giúp người tiêu dùng xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng để tối đa hóa hóa lợi ích của mình trên cơ sở mức thu nhập đã có,

Bài toán cũng giúp người tiêu dùng xác định được cơ cấu mua sắm đối với từng mặt hàng để chi phí bỏ ra là ít nhất.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết:

Hàm cung: $Q_s = S(p)$ là lượng đơn vị hàng hoá mà người bán muốn bán ở mức giá p.

Hàm cầu: $Q_s = D(p)$ là lượng đơn vị hàng hoá mà người mua muốn mua ở mức giá p.

Hàm cung và hàm cầu *n* hàng hóa :

Hàm cung đối với hàng hóa *i* là:

$Q_{si} = S_i(p_1, p_2, \dots p_n)$ lượng cung hàng hóa *i*.

Hàm cầu đối với hàng hóa i là: $Q_{di} = D_i(p_1, p_2, \dots p_n)$ lượng cầu hàng hóa i,

p_i là giá của hàng hoá i.

Hàm lợi ích : Hàm lợi ích biểu diễn sự thoả mãn hay sự hài lòng mà người tiêu dùng đạt được từ việc tiêu dùng hàng hóa hoặc dịch vụ, hàm lợi ích có dạng: $U = U(x_1, x_2, \dots x_n)$, trong đó giỏ hàng của một khách hàng gồm có: x_1 đơn vị hàng hoá T_1, x_2 đơn vị hàng hoá T_2, x_n đơn vị hàng hoá T_n

Mô hình: Tìm cực trị của hàm số $z = f(x, y)$ trong đó *x*, *y* bị ràng buộc bởi điều kiện $g(x, y) = b$ (gọi là cực trị có điều kiện).

Tìm cực trị có điều kiện bằng phương pháp nhân tử Lagrange

Lập hàm số Lagrange:

$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda(b - g(x, y))$

Hàm số Lagrange $L(x, y, \lambda)$ có thêm một biến phụ λ, λ gọi là nhân tử Lagrange. Chú ý rằng với tất cả các điểm $M(x, y)$ thỏa mãn điều kiện $g(x, y) = b$, tức là khi xét cặp (x, y) trong miền biến thiên đã bị thu hẹp bởi điều kiện $g(x, y) = b$, hàm *z* đồng nhất với hàm L.

Giả sử các hàm số $f(x, y)$ và $g(x, y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm $M_0(x_0, y_0)$ và $g'_0(x_0, y_0) \neq 0$. Khi đó, nếu hàm số $z = f(x, y)$, với điều kiện $g(x, y) = b$ đạt cực trị tại điểm $M_0(x_0, y_0)$ thì tồn tại số λ_0 sao cho bộ ba số thực (x_0, y_0, λ_0) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} L'_x = f'_x + \lambda g'_x = 0 \\ L'_y = f'_y + \lambda g'_y = 0 \\ L'_\lambda = b - g(x, y) = 0 \end{cases} \qquad (*)$$

Giả sử (x_0, y_0, λ_0) là một nghiệm của hệ phương trình (*). Giả sử rằng các hàm số $f(x, y)$ và $g(x, y)$ có các đạo hàm riêng cấp hai liên tục tại điểm (x_0, y_0). Các đạo hàm riêng g'_x, g'_y, L''_{x^2}, L''_{xy}, L''_{yx}, L''_{y^2} được tính khi $x = x_0, y = y_0, \lambda = \lambda_0$.

Xét ma trận: $H = \begin{bmatrix} 0 & g'_x & g'_y \\ g'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ g'_y & L''_{yx} & L''_{y^2} \end{bmatrix}$

Ta có: $\det H = 2g'_x g'_y L''_{xy} - (g'_x)^2 L''_{y^2} - (g'_y)^2 L''_{x^2}$

là định thức của ma trận H

Khi đó, nếu $\det H > 0$ thì hàm số $z = f(x, y)$ với điều kiện ràng buộc $g(x, y) = b$ đạt giá trị cực đại tại *điểm* $M_0(x_0, y_0)$.

Nếu detH < 0 thì hàm số $z = f(x, y)$ *với điều kiện ràng buộc* $g(x, y) = b$ *đạt giá trị cực tiểu tại điểm* $M_0(x_0, y_0)$.

Mô hình tối ưu: *Mô hình phản ánh sự lựa chọn cách thức hoạt động nhằm tối ưu hóa một hoặc một số chỉ tiêu định trước. Cấu trúc cơ bản của mô hình là bài toán tối ưu. Khi phân tích mô hình tối ưu, công cụ chính là sử dụng các phương pháp tối ưu trong toán học.*

2.2. Một số mô hình kinh tế

2.2.1. Mô hình cực đại hoá lợi ích tiêu dùng

Cực đại hoá hàm lợi ích: $U = U(x_1, x_2)$ *với điều kiện:* $p_1x_1 + p_2x_2 = m$

Trong đó: (p_1, p_2) *là giá thị trường của hai mặt hàng* (x_1, x_2)*, m là thu nhập dành cho tiêu dùng.*

Ví dụ: *Xét thị trường gồm hai mặt hàng* (x_1, x_2) *với giá tương ứng là* (p_1, p_2)*. Giả sử, sở thích của người tiêu dùng được phản ánh thông qua hàm lợi ích tiêu dùng:* $U = 4x_1x_2 + 8x_1 + 12x_2$

Cho biết giá của các mặt hàng tương ứng là $p_1 = 8$; $p_2 = 20$ *($), và thu nhập dành cho tiêu dùng là 656$. Hãy xác định lượng cầu đối với mỗi mặt hàng nếu người tiêu dùng tối đa hoá lợi ích của mình.*

Lời giải:

Ta có hàm Lagrange là

$$L = 4x_1x_2 + 8x_1 + 12x_2 + \lambda(656 - 8x_1 - 20x_2)$$

và $g(x_1, x_2) = 8x_1 + 20x_2$

Ta có hệ phương trình (điều kiện cần của cực trị):

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 0 \\ L'_{x_2} = 0 \\ L'_{\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x_2 + 8 - 8\lambda = 0 \\ 4x_1 + 12 - 20\lambda = 0 \\ 656 - 8x_1 - 20x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\lambda} = 9 \\ \overline{x_1} = 42 \\ \overline{x_2} = 16 \end{cases}$$

Khi đó, ta có:

$$g'_{x_1} = 8, g'_{x_2} = 20, L''_{x_1^2} = 0, L''_{x_1x_2} = 4, L''_{x_2x_1} = 4, L''_{x_2^2} = 0$$

$$\det H = 2g'_{x_1}g'_{x_2}L''_{x_1x_2} - (g'_{x_1})^2 L''_{x_2^2} - (g'_{x_2})^2 L''_{x_1^2} = 1280 > 0$$

Suy ra, U đạt cực đại tại $(\overline{x_1} = 42, \overline{x_2} = 16)$

Vậy cơ cấu mua sắm tối đa hoá lợi ích là: $(\overline{x_1} = 42, \overline{x_2} = 16)$.

Nhận xét: *Nhân tử Lagrange* $\overline{\lambda} = 9$ *chứng tỏ có thêm 1$ thu nhập (tức là m tăng từ 656$ lên 657$) thì lợi ích tối đa của người tiêu dùng tăng thêm 9.*

2.2.2. Mô hình tối thiểu hoá chi tiêu

Giả sử, một người tiêu dùng cần mua các mặt hàng (x_1, x_2) với giá tương ứng là (p_1, p_2). Sở thích của người tiêu dùng được biểu diễn qua hàm lợi ích là $U = U(x_1, x_2)$. Người tiêu dùng sẽ lựa chọn giỏ hàng (x_1, x_2) với chi phí ít nhất nhưng vẫn giữ được mức độ lợi ích $U = U_0$ cố định. Khi đó bài toán đặt ra như sau:

Cực tiểu hoá hàm số: $m = p_1x_1 + p_2x_2$*, với điều kiện:* $U(x_1, x_2) = U_0$

Ví dụ: *Xét thị trường gồm hai mặt hàng* (x_1, x_2) *với giá tương ứng là* (p_1, p_2)*. Giả sử, sở thích của người tiêu dùng được phản ánh thông qua hàm lợi ích tiêu dùng:* $U = x_1^{0,4}x_2^{0,6}$.

Người tiêu dùng mua sắm hai mặt hàng có giá tương ứng là $p_1 = 16; p_2 = 12$ *($). Hãy xác định cơ cấu mua sắm với chi phí ít nhất? Cho biết mức độ lợi ích cố định* $U_0 = 15.2^{0,6}$.

Lời giải: Bài toán này dẫn đến vấn đề cần giải quyết là:

Cực tiểu hoá hàm số $m = 16x_1 + 12x_2$ *với điều kiện:* $x_1^{0,4}x_2^{0,6} = 15.2^{0,6}$

Ta có hàm Lagrange là:

$$L = 16x_1 + 12x_2 + \lambda\left(15.2^{0,6} - x_1^{0,4}x_2^{0,6}\right)$$

và $g(x_1, x_2) = x_1^{0,4}x_2^{0,6}$

Ta có hệ phương trình (điều kiện cần của cực trị):

$$\begin{cases} L'_{x_1} = 0 \\ L'_{x_2} = 0 \\ L'_{\lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16 - 0,4\lambda x_1^{-0,6}x_2^{0,6} = 0 \\ 12 - 0,6\lambda x_1^{0,4}x_2^{-0,4} = 0 \\ x_1^{0,4}x_2^{0,6} = 15.2^{0,6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \overline{\lambda} = 40.2^{-0,6} \\ \overline{x_1} = 15 \\ \overline{x_2} = 30 \end{cases}$$

Khi đó, ta có (điều kiện đủ của cực trị):

$$g'_{x_1} = 0,4x_1^{-0,6}x_2^{0,6}, g'_{x_2} = 0,6x_1^{0,4}x_2^{-0,4},$$

$$L''_{x_1^2} = 0,24\lambda x_1^{-1,6}x_2^{0,6}, L''_{x_1x_2} = L''_{x_2x_1} = -0,24\lambda x_1^{-0,6}x_2^{-0,4},$$

$$L''_{x_2^2} = 0,24\lambda x_1^{0,4}x_2^{-1,4}$$

$$\det H = 2g'_{x_1}g'_{x_2}L''_{x_1x_2} - (g'_{x_1})^2 L''_{x_2^2} - (g'_{x_2})^2 L''_{x_1^2} < 0$$

Suy ra m đạt cực tiểu tại $(\overline{x_1} = 15, \overline{x_2} = 30)$.

Vậy cơ cấu mua sắm với chi phí ít nhất là: $(\overline{x_1} = 15, \overline{x_2} = 30)$

3. Kết luận

Đối với người tiêu dùng thì tối ưu hóa lợi ích tiêu

Journal of educational equipment: Applied research, Volume 2, Issue 307 (February 2024)
ISSN 1859 - 0810

dùng chính là cực đại hóa lợi ích tiêu dùng và tối thiểu hóa chi tiêu. Sử dụng sử dụng phương pháp nhân tử Lagrange trong bài toán cực trị của hàm nhiều biến có ràng buộc là một trong những công cụ hữu hiệu để giải quyết các bài toán tối ưu hóa lợi ích tiêu dùng. Nhờ vậy, giúp người tiêu dùng xác định được lượng cầu đối với mỗi mặt hàng để lượng chi phí bỏ ra là ít nhất và cực đại hóa hóa lợi ích tiêu dùng của mình.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Quang Dong, Ngô Văn Thứ , Hoàng Đình Tuấn, (2006), *Mô hình toán kinh tế* , NXB Thống kê.

2. Lê Đình Thúy (2012), *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế* , Đại học Kinh tế Quốc dân.

3. Nguyễn Quang Dong (2008), *Kinh tế lượng*, Trường Đại học Kinh tế quốc dân, NXB Giao thông Vận tải,.

4. Nguyễn Quảng, Nguyễn Thượng Thái (2007), *Toán kinh tế*, Học viện Công nghệ bưu chính viễn thông,.

5. Nguyễn Hải Thanh (2008), *Các phương phápToán kinh tế*, Trường Đại học Nông nghiệp Hà Nội.

6. Lê Đình Thúy(Chủ biên) (2012), *Toán cao cấp cho các nhà kinh tế,* NXB Đại học Kinh tế quốc dân.

Thiết kế và sử dụng Infographic trong dạy học... *(tiếp theo trang 3)*

Vận động người thân trong gia đình thực hiện đạo đức kinh doanh	***- Tên infographic***: Một số biện pháp thực hiện và nâng cao đạo đức kinh doanh ***- Nội dung infographic***: • Về phía nhà nước: Xây dựng, hoàn thiện một hành lang pháp lí đủ mạnh, có tính răn đe cao; Tăng cường giám sát xã hội và vai trò của các tổ chức đoàn thể, hiệp hội ngành nghề. • Về phía doanh nghiệp và cộng đồng doanh nghiệp: Bản thân đội ngũ doanh nhân phải tự nâng cao năng lực, phẩm chất; Tích cực tham gia cùng Đảng, Nhà nước và hiệp hội ngành nghề trong kiến tạo và duy trì môi trường kinh doanh lành mạnh, tích cực, tuân thủ pháp luật và đạo đức kinh doanh. • Về phía người tiêu dùng, cộng đồng xã hội: Ủng hộ và ưu tiên sử dụng hàng hóa của những doanh nghiệp kinh doanh có đạo đức; Có thái độ phê phán, lên án những biểu hiện vi phạm đạo đức kinh doanh. • Châm ngôn tuyên truyền: “Kinh doanh thật thà – Không ngừng vươn xa”.	

Như vậy, sau một khoảng thời gian ngắn từ lượng nội dung, kiến thức khá nhiều có trong Bài 8: Đạo đức kinh doanh, nhóm tác giả đã tóm gọn và hoàn thiện xong việc thiết kế *infographic*, nhìn sơ bộ chúng ta có thể thấy rằng bằng việc trình bày ngắn gọn, súc tích, đi kèm theo nhiều hình ảnh minh họa, phong phú về màu sắc, bắt mắt, dễ nhìn, dễ nhớ thì các nội dung dù có khó hiểu đến mấy cũng sẽ thu hút được HS chú ý lắng nghe và có sự tò mò về bài giảng của GV.

3. Kết luận

Sử dụng *infographic* là một trong những biện pháp quan trọng góp phần đổi mới và nâng cao chất lượng dạy học môn GDKT&PL 11 tại thành phố Hồ Chí Minh, phù hợp với việc gắn học tập vào thực tiễn, nâng cao năng lực thực hành cho HS. Tuy nhiên, đối với GV, việc sử dụng hay tự thành lập *infographic* vẫn còn mới lạ, chưa có nhiều kinh nghiệm được công bố, đòi hỏi sự nỗ lực, sáng tạo của cả GV và HS trong quá trình dạy học, cũng như những điều kiện cơ sở vật chất cần thiết. Vì vậy, bài viết này giới thiệu một số *infographic* có thể sử dụng trong giảng dạy, với mong muốn giới thiệu sản phẩm của nhóm tác giả trước hội thi.

Tài liệu tham khảo

[1] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018), Chương trình GDPT – Chương trình tổng thể (Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo) NXB Đại học sư phạm, Hà Nội.

[2] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018), Chương trình GDPT môn Giáo dục công dân (Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26/12/2018 của Bộ Giáo dục và Đào tạo) NXB Đại học sư phạm, Hà Nội.

[3] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2022), Sách Giáo dục kinh tế và pháp luật 11 (Quyết định số 4979/QĐ-BGDĐT ngày 30 tháng 9 năm 2022 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo), NXB Giáo dục Việt Nam.

[4] Lã Phương Thúy (2018), Thiết kế và sử dụng *infographic* trong dạy học đọc hiểu văn bản thông tin ở trường THCS.