

Ứng dụng của vi tích phân trong cuộc sống và trong khoa học kỹ thuật

Vũ Anh Tuấn*

*ThS. Trường Đại học Công Nghệ Đồng Nai

Received: 20/02/2024; Accepted: 28/02/2024; Published: 8/3/2024

Abstract: Calculus is one of the difficult and abstract concepts of Mathematics. However, it has many applications in life. Within the framework of the article, we would like to present the concepts of differential and integral, their applications in life and in science and technology in a simple and easy-to-understand way with the desire to help students understand and be more interested in the subject, giving it an important role among the subjects they are studying at school.

Keywords: Differential, integral, applications, life, science and technology

1. Đặt vấn đề

Vi tích phân có ứng dụng vô cùng rộng rãi trong cuộc sống cũng như trong khoa học kỹ thuật. Nếu hiểu được vi tích phân và những ứng dụng to lớn của những nó sẽ làm cho sinh viên (SV) có góc nhìn khác, sẽ hứng thú, say mê hơn với vô vàn những ứng dụng trong cuộc sống đang chờ đón sinh viên khám phá và đón nhận. Chúng ta sẽ biến những bài VP, TP khô khan thành những vấn đề thiết thực trong cuộc sống một cách tường minh[2]. Điều đó giúp SV phát triển tư duy và rèn luyện được các kỹ năng cần thiết khác phù hợp với xu thế phát triển của xã hội và hội nhập.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Phép tính vi tích phân

2.1.1. Dẫn nhập về phép tính vi tích phân. Để dễ hình dung về vi tích phân, chúng tôi xin đưa ra câu chuyện về “Trạng Lường cân voi”. Nhà bác học Lương Thế Vinh (1441- 1496) gọi là Trạng Lường.

Có một lần sứ Tàu Chu Hy đó Lương Thế Vinh cân con voi lớn ở bến đò (ở thế kỷ XV lúc đó chưa có cân lớn như bây giờ), Lương Thế Vinh cho voi xuống thuyền, đánh dấu ngăn nước ở mạn thuyền, rồi khi cho voi lên thì lại cho đá tảng xuống đúng đến mép nước đã đánh dấu. Sau đó cân các viên đá và tính được trọng lượng con voi. Khi Chu Hy xé một tờ giấy bản mỏng dính trong cuốn sách đang cầm, nhờ Trạng đo độ dày tờ giấy này (lúc đó chưa có dụng cụ đo độ mỏng chính xác như bây giờ) thì Trạng mượn cuốn sách và đo chiều dày cả cuốn sách. Sau đó chia theo số trang giấy mà tính ra độ dày một tờ giấy.

Để cho dễ hiểu chúng ta xem việc “chia” con voi ra nhiều phần, mỗi phần ứng với 1 viên đá tảng, hay chia cuốn sách ra nhiều phần, mỗi phần ứng với 1 tờ

giấy, là hình ảnh của phép toán vi phân. Còn việc cân cả đồng tăng đá để từ đó tính ra trọng lượng con voi, hay đo cả chiều dày cuốn sách để tính ra độ dày 1 tờ giấy chính là hình ảnh của phép toán tích phân.

Với cách hiểu như vậy thì trong cuộc sống của chúng ta hàng ngày, hàng giờ chúng ta đang sử dụng phép tính vi tích phân. Vậy vi phân là gì? Tích phân là gì? Theo Ngô Minh Đức[3], chúng ta cần làm rõ nghĩa của các khái niệm và các ứng dụng của nó trong đời sống cũng như trong các môn khoa học khác.

2.1.2. Khái niệm về phép tính vi tích phân.

Cũng như câu chuyện cân voi, các lí thuyết Toán học cũng như nhiều lí thuyết khác đều ra đời và phát triển xuất phát từ nhu cầu thực tiễn, nó phản ánh lại thực tiễn, giải thích và phục vụ thực tiễn. Do đó nếu giảng viên chỉ ra được điều này, SV sẽ thấy rất thú vị và hứng thú khi học Toán.

Trong toán học, vi phân là một nhánh con của vi tích phân liên quan đến nghiên cứu về sự thay đổi tốc độ của hàm số khi biến số thay đổi. Nhánh còn lại là tích phân, nghiên cứu về diện tích nằm phía dưới của một đường cong.

Theo tiếng Hán thì chữ vi có nghĩa là nhỏ (vi trùng, vi sinh vật, vi khuẩn...) Chữ phân có nghĩa nghĩa là từng phần (như phân nhỏ, phân chia,...). Như vậy ta cứ hiểu vi phân là chia nhỏ ra từng phần. Cũng vậy theo tiếng Hán thì chữ tích có nghĩa là nghĩa là chồng lên, tổng hợp lại (như là tích lũy, tích góp...) Như vậy ta cứ hiểu tích phân là tích các phần lại hay tổng hợp các phần lại.

Theo Lê Thị Hoài Châu, Trần Thị Mỹ Dung[4]. Cội nguồn của phép tính tích phân đã có từ thời cổ đại. Là một trong những lĩnh vực nghiên cứu quan trọng của toán học, vi tích phân là thành tựu nổi bật

nhất ở giai đoạn cuối thế kỷ XVII của Isaac Newton và Gottfried Wilhelm Leibniz. Tiếp đó có sự đóng góp rất lớn vào phép tính vi tích phân của các nhà Toán học khác như Augustin Louis Cauchy, Karl Weierstrass và Bernhard Riemann để dần dần hoàn thiện.

Theo nghĩa nào đó, trong cuộc sống hàng ngày, không phải lúc nào ta cũng dùng công thức toán học được viết ra một cách chi li hình thức để tính toán, mà là bằng quan sát, ước lượng trực giác, v.v. Ví dụ như, khi ước lượng diện tích của một cái nền nhà, thể tích của một cái thùng rượu, thời gian để thực hiện một công việc v.v... là chúng ta cũng đang “tích tích phân”, chỉ có điều nó “không giống” với khái niệm tích phân mà ta đã và đang được học ở trường mà thôi. Có thể nói Tích phân thực chất là tổng của nhiều thành phần, số thành phần này có thể là vô hạn (chia nhỏ ra thành tổng của các thành phần “nhỏ li ti”), và tích phân là công cụ không thể thiếu được dùng để ước lượng hay tính toán độ lớn của vạn vật: vận tốc, thời gian, trọng lượng, độ dài, diện tích, thể tích, v.v. Ký hiệu của tích phân chính là lấy chữ S của summa (tổng) kéo dọc lên. Hiểu như vậy, ta sẽ cảm thấy vi phân, tích phân cũng không đến nỗi khó như chúng ta nghĩ. Tất nhiên, trong khoa học, khi cần sự chính xác cao thì phải dùng công thức toán học.

2.2. Một số ứng dụng của Toán học trong đời sống hàng ngày và trong khoa học kỹ thuật

Ví dụ 1: Vi tích phân trong cuộc sống hàng ngày: Với cách hiểu như trên thì trong cuộc sống hàng ngày ta đã sử dụng công cụ vi tích phân rất nhiều:

- Một bác chủ thầu xây nhà trọ sẽ phải ước lượng chiều dài, chiều rộng (đơn vị là m), diện tích (m^2), móng nhà để tính khối (m^3) cát, sỏi, gạch... để làm nhà. Việc ước lượng đó là bác chủ thầu đã sử dụng phép tính vi phân. Đến khi tổng hợp lại tổng nguyên vật liệu chính là đã sử dụng phép tính tích phân.

- Một giám đốc khi thực hiện một đề án phải phân công công việc cho các thành viên. Ta sẽ xem mỗi công việc là một phần là đã vi phân đề án. Khi tổng hợp lại các công việc thực hiện đề án là ta đã tích phân, v.v...

Ví dụ 2: Ứng dụng trong kinh tế: Để xây các hồ chứa nước lớn ta phải chắn cả những đoạn sông dài để tạo thành những con đập. Lòng hồ có chỗ lõm vào, chỗ dôi ra, chỗ sâu, chỗ cạn... ta phải dùng phép tính (vi phân) để chia lòng hồ ra rất nhiều phần, từ đó được dung tích toàn bộ lòng hồ (tích phân) để dự kiến số nguyên vật liệu xây dựng đập chứa nước (ví dụ Hồ cửa Đạt - Thanh Hoá chứa $1,5 \text{ tỷ } m^3$ nước

trời tiêu cho 86.000 ha đất nông nghiệp. Để xây các nhà máy Thủy điện đều phải dùng đến phép tính tích phân bằng phương pháp như vậy.

Ví dụ 3: Tính hao hụt sản phẩm trong kinh tế: Một cái máy công nghiệp nếu bán thì giá của nó giảm dần với tốc độ $220(x-10)$ đôla. Nếu mua lúc đầu là 12000 đôla, thì 10 năm sau máy sẽ bán giá là bao nhiêu?

Giải vấn đề: Nếu gọi $V(x)$ là giá trị của máy khi nó x tuổi. Vậy theo giả thiết ta có: $V'(x) = 220(x-10)$

Để tìm V , ta tích phân hai vế sẽ được: $V(x) = 110x^2 - 2200x + C$

Nếu $C = 12000$, nghiệm tương ứng tìm được là 1000 (đôla).

Ví dụ 4: Sử dụng tích phân trong may mặc trên dây chuyền công nghiệp: Việc đo chiều dài các đường cổ áo, nách áo, đường đũng quần... rất quan trọng vì đây là các đường cong. Để khi may có thể lắp ghép sao cho ăn khớp, thì phải đo cắt chính xác, có như vậy mới tiết kiệm được nguyên phụ liệu, lại có tính thẩm mỹ, nhất là may với số lượng lớn trên dây chuyền. Vì vậy, ứng dụng tích phân ta có thể tính toán chính xác chiều dài của các đường cong trên mẫu, rồi mới cắt, ráp theo mẫu. Ví dụ sau đây là ta đã vận dụng tích phân tính chiều sâu cổ áo trong may mặc trên dây chuyền sản xuất.

Cổ áo là nơi hay bị bai dãn và bị dúm. Để viền được một cổ áo đẹp thì phải tính được chiều dài đường viền một cách chính xác.

Giả sử khi hạ cổ áo hình trái tim có chiều rộng 4cm, chiều cao 16cm, như vậy đường cổ áo chính sẽ là đường parabol $y = \frac{1}{2}x^2; -4 \leq x \leq 4$ theo hệ trục

xOy với đơn vị cm. Nếu gọi AB là khoảng cách đường vòng cung cổ áo. Ta tính chiều dài cung của đường cổ áo từ A tới B . Đó là đường viền cổ chiếc áo này.

$$L_{AB} = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \\ = \int_{-5}^5 \sqrt{1 + x^2} dx = 27,8$$

Vậy chiều dài cung của cổ áo gần bằng 27,8 cm. Chiếc cổ áo khi ráp sẽ rất chính xác và đẹp.

Ví dụ 5: Vận dụng tính số vải (diện tích) đủ may mái vòm để tổ chức một sự kiện: Mái vòm cho hội nghị ngoài trời có bán kính 4m và mặt phẳng chứa bán kính đến đỉnh vòm cao 2m. Coi chiếc dù là một vật thể tròn xoay được tạo bởi hình phẳng giới hạn

bởi các đường $y = 2 - \frac{x^2}{8}$ và đường thẳng $y=0$ quay quanh trục Oy với hệ trục xOy, đơn vị là mét.

- Tính diện tích hình phẳng trên.
- Tính diện tích vải cần thiết để may một chiếc dù.

Giải:

- Diện tích hình phẳng là:

$$S = \int_{-4}^4 \left(2 - \frac{x^2}{8}\right) dx = 2 \int_0^2 \left(2 - \frac{x^2}{8}\right) dx = \frac{32}{3}$$

- Diện tích xung quanh của chiếc dù khi quay nửa hình phẳng quanh trục Oy là:

$$S_{xq} = 2\pi \int_0^2 \sqrt{16-8y} \sqrt{1 + \frac{16}{16-8y}} dy \\ = 2\pi \int_0^2 \sqrt{32-8y} dy = \frac{32}{3} (\sqrt{8} - 1) \approx 61,3$$

Vậy diện tích vải cần thiết để may chiếc dù là $61,3m^2$.

Ví dụ 6: Ứng dụng của tích phân, *tính thể tích* khinh khí cầu phục vụ du lịch hoặc chuyên chở hàng.

Khinh khí cầu có thể dùng chở người hoặc hàng hoá ở khoang chứa. Nếu tính được thể tích không khí trong khoang chứa thì sẽ biết được trọng lượng khinh khí cầu mang theo. Giả sử đây là chiếc khinh khí cầu được tạo bởi nửa trên mặt cầu có công thức:

$x^2 + y^2 + z^2 = 1$ và một phần mặt nón $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ với hệ trục oxyz đơn vị là $10m^3$

Với các thông số trên ta, bằng công cụ TP ta sẽ tính được thể tích không khí trong khoang chứa là $3,9m^3$.

Ví dụ 7: Vận dụng tích phân tính thể tích của khối trụ cong: Trong thực tế có nhiều khối có hình dạng phi tiêu chuẩn. Để tính được các khối đó ta phải chia thành các khối nhỏ rồi tính tích phân các khối nhỏ đó. Có khi một khối nhỏ lại chia ra nhiều những phần nhỏ khác để tính.

Ví dụ 8: Vận dụng tích phân trong làm mặt dây chuyền, mặt nhẫn: Giả sử ta cần các mặt dây chuyền có thiết diện như hình Ô van, ta sẽ có ý tưởng là cho một hình phẳng đã cho xoay quanh trục oy trong không gian 3 chiều. Từ ý tưởng đó ta sẽ bỏ một khối vật liệu vào máy tiện và xoay, mài nó, cắt tia cạnh cho đến khi ta được mẫu ưng ý hoàn thiện. Với cách nhìn của toán học, ta đã cắt vật thể theo chiều ngang (vô hạn lần) thành khối hình trụ siêu mỏng, sau đó ta cộng thể tích các khối siêu mỏng này lại, ta sẽ có

được thể tích của mặt dây chuyền. Để thực hiện được các công đoạn này, phải dùng công cụ tích phân.

Ví dụ 9: Sử dụng tích phân trong các bộ môn khoa học khác:

- Tính toán trong bộ môn Xác suất thống kê: Phương sai, giá trị trung bình, Phân phối xác suất của Vector ngẫu nhiên liên tục.

- Tính toán trong máy tính: Vi tích phân còn sử dụng để tính toán các giá trị số trong thuật toán và phần mềm máy tính khác nhau.

- Giải các bài toán kinh tế. Tính toán giá trị trung bình, phương sai và hệ số tương quan của các biến.

- Tính toán các giá trị quan trọng trong Vật lý như quãng đường, vận tốc, gia tốc, lực... Ví dụ vận tốc vật thể rơi tự do theo thời gian. Tính quãng đường vật thể chuyển động trong không gian.

- Các ứng dụng khác trong nhiều lĩnh vực như Hoá học, sinh học, vật liệu, kỹ thuật...

3. Kết luận

Để đưa một khái niệm khó, trừu tượng và các ứng dụng của vi tích phân trong đời sống, trong khoa học kỹ thuật cho sinh viên mà sinh viên hiểu được rồi hứng thú và yêu thích môn học, không phải là công việc ngày một, ngày hai, nhưng là một việc vô cùng cần thiết và thực tế. Với sự phát triển mạnh mẽ của khoa học, của công nghệ, vi tích phân chắc chắn sẽ còn được ứng dụng vô cùng rộng rãi trong mọi lĩnh vực.

Để học tốt phép tính vi tích phân, SV chỉ có thể phải cố gắng, chủ động trong học tập, có thái độ học tập, có thói quen tự học và tương tác tốt để phát huy hết khả năng, năng lực tư duy, sáng tạo của mình. Chỉ có như vậy mới có thể đáp ứng được yêu cầu của xã hội và thời đại hiện nay.

Tài liệu tham khảo

[1]. Phạm Thị Hồng Hạnh, Phạm Thế Quân (2021), *Dạy học theo dự án chủ đề “tích phân” gắn với định hướng nghề nghiệp cho học sinh*. Trường Đại học SP Hà Nội 2. Tạp chí Khoa học. Kỳ 1- tháng 5: 501

[2]. Nguyễn Thị Huệ, Lê Thu Trang, Dương Thuỳ Linh (2021). *Thể tích khối tròn xoay - ứng dụng của tích phân*. Trường Đại học Thủ đô Hà Nội. Tạp chí Khoa học số 55.

[3]. Ngô Minh Đức (2017). *Quan điểm tích hợp trong dạy học khái niệm tích phân*. Tạp chí Khoa học. Trường ĐHSPTP HCM Tập 14 số 4: 20-28

[4]. Lê Thị Hoài Châu, Trần Thị Mỹ Dung (2024), *Phép tính tích phân và vi phân trong lịch sử*. Tạp chí Khoa học, Đại học sư phạm TP.HCM. Số 4-2024.