Journal of educational equipment: Applied research, Volume 1, Issue 308 (March 2024)
ISSN 1859 - 0810

Bất đẳng thức AM-GM và một số ứng dụng

*Nguyễn Anh**
**ThS. Đại học Tài nguyên và Môi trường Hà Nội*

Received: 15/02/2024; Accepted: 26/02/2024; Published: 5/3/2024

Abstract: *Inequality is a sharp tool of Mathematics. Equality and inequality are two means of supporting each other. The equation gives absolutely accurate results. More flexible inequalities allow considering problems, estimating results, thereby viewing mathematical practice from a broader perspective. In this article, I would like to introduce the AM-GM inequality, which is a familiar and widely applicable inequality. It is the first inequality that needs to be remembered very clearly and used proficiently.*

Keywords: *Inequality, the AM-GM inequality.*

1.Đặt vấn đề

Bất đẳng thức là một công cụ sắc bén của Toán học. Đẳng thức và bất đẳng thức là hai phương tiện hỗ trợ lẫn nhau. Đẳng thức cho kết quả chính xác tuyệt đối. Bất đẳng thức mềm dẻo hơn cho phép cân nhắc vấn đề, ước lượng kết quả,từ đó nhìn nhận thực tiễn Toán học dưới góc độ rộng hơn.Vì thế, việc vận dụng các bất đẳng thức rất uyển chuyển và linh hoạt. Trong bài viết này tôi muốn giới thiệu bất đẳng thức AM-GM đó là bất đẳng thức quen thuộc và có ứng dụng rộng rãi ,là bất đẳng thức đầu tiên cần phải ghi nhớ rất rõ và sử dụng một cách thành thạo.

2.Nội dung nghiên cứu

2.1. Bất đẳng thức AM-GM

Với mọi số thực dương $a_1, a_2,..., a_n$ ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a_1+a_2+\ldots a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1 = a_2 ,...= a_n$.

Chứng minh: Rõ ràng bất đẳng thức với n=2. Nếu bất đẳng thức đúng với n số thì cũng đúng với 2n số vì

$$a_1+a_2+\ldots+a_{2n} \geq n\sqrt[n]{a_1, a_2 \ldots a_n} + n\sqrt[n]{a_{n+1}.a_{n+2} \ldots a_{2n}}$$

$$\geq 2n\sqrt[2n]{a_1 a_2 \ldots a_{2n}}$$

Do đó bất đẳng thức cũng đúng khi n bằng một lũy thừa của 2. Mặt khác nếu bất đẳng thức đúng với n số thì cũng đúng với n-1 số.Thật vậy ta chỉ cần chọn

$$a_n = s/(n-1), s = a_1+a_2 \ldots + a_{n-1}$$

$$\Rightarrow s + \frac{s}{n-1} \geq n\sqrt[n]{\frac{a_1 a_2 \ldots a_{n-1}.s}{n-1}}$$

$$\Rightarrow s \geq (n-1)\sqrt[n-1]{a_1 a_2 \ldots . a_{n-1}}$$

Từ 2 nhận xét trên ta có điều phải chứng minh. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả các biến $a_1 = a_2 ,...= a_n$.

2.2. Một số ứng dụng

Sau đây là một số bài toán đặc trưng sử dụng bất đẳng thức AM-GM

Bài 1. Chứng minh với mọi số thực không âm a,b,c ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 3\sqrt[3]{abc}\,\frac{3}{\sqrt[3]{abc}} = 9$$

Bất đẳng thức tổng quát hơn được chứng minh hoàn toàn tương tự

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n} \geq \frac{n^2}{a_1+a_2+\ldots+a_n}$$

Bài 2 (Bất đẳng thức Nesbitt). Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b,c ta có:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$$

Lời giải.Xét các biểu thức sau

$$S = \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$

$$M = \frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+a}+\frac{a}{a+b}$$

$$N = \frac{c}{b+c}+\frac{a}{c+a}+\frac{b}{a+b}$$

Ta có M + N = 3. Mặt khác theo bất đẳng thức AM-GM thì:

$$M+S = \frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+a}+\frac{c+a}{a+b} \geq 3$$

$$N+S = \frac{a+c}{b+c}+\frac{a+b}{c+a}+\frac{b+c}{a+b} \geq 3$$

Vậy $M + n + 2s \geq 6$ suy ra $2s \geq 6$. Đây là điều phải chứng minh

Bài 3 (bất đẳng thức Nesbitt 4 biến). Chứng minh rằng với mọi số thực không âm a,b,c ta có bất đẳng thức:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2$$

Lời giải. Đặt

$$S=\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}$$

$$M=\frac{b}{b+c}+\frac{c}{c+d}+\frac{d}{d+a}+\frac{a}{a+b}$$

$$N=\frac{c}{b+c}+\frac{d}{c+d}+\frac{a}{d+a}+\frac{b}{a+b}$$

Ta có M+N = 4.Theo bất đẳng thức AM-GM thì

$$M+S=\frac{a+b}{b+c}+\frac{b+c}{c+d}+\frac{c+d}{d+a}+\frac{d+a}{a+b}\geq 4$$

$$N+S=\frac{a+c}{b+c}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{a+c}{d+a}+\frac{b+d}{a+b}$$
$$=\frac{a+c}{b+c}+\frac{a+c}{a+d}+\frac{b+d}{c+d}+\frac{b+d}{a+b}$$
$$\geq\frac{4(a+c)}{a+b+c+d}+\frac{4(b+d)}{a+b+c+d}=4$$

Vậy $M + n + 2s \geq 2$ suy ra $S \geq 2$. Đẳng thức xảy ra khi $a = b = c = d$

Bài.4. Giả sử $a_1, a_2,...= a_n$ là các số thực dương sao cho $a_1+a_2...a_n = n$.

Chứng minh $a_1^k+a_2^k+....a_n^k\geq a_1^{k-1}+a_2^{k-1}+...a_n^{k-1}$

Lời giải: Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$(k-1)a^k+1=a^k+a^k+...+a^k+1\geq k\sqrt[k]{a^{k(k-1)}}=ka^{k-1}$$

Thay a bởi $a_1, a_2,...= a_n$ rồi cộng các bất đẳng thức lại ta được

$$(k-1)(a_1^k+a_2^k+...+a_n^k)+n\geq k\left(a_1^{k-1}+a_2^{k-1}+....+a_n^{k-1}\right)$$

Vậy ta chỉ cần chứng minh:

$$a_1^{k-1}+a_2^{k-1}+....+a_n^{k-1}\geq n$$

Sử dụng bất đẳng thức AM-GM

$$a^{k-1}+(k-2)=a^{k-1}+1+1+...+1\geq(k-1)\sqrt[k-1]{a^{k-1}}=(k-1)a$$

Thay a bởi $a_1, a_2,...= a_n$ rồi cộng các bất đẳng thức dạng trên lại ta được

$$a_1^{k-1}+a_2^{k-1}+...a_n^{k-1}+n(k-2)\geq(k-1)(a_1+a_2+....+a_n)=(k-1)n$$
$$\Rightarrow a_1^{k-1}+a_2^{k-1}+...a_n^{k-1}\geq n$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a_1=a_2=....a_n = 1$

Nhận xét. Từ các chứng minh trên ta suy ra

$$\frac{a_1^k+a_2^k+...+a_n^k}{n}\geq\left(\frac{a_1+a_2+....a_n}{n}\right)^k$$

Với mọi số nguyên dương k. Ngoài ra cả 2 bất đẳng thức này đều đúng khi $k \leq 1$ là một số thực.Nếu xét $k < 1$ ta có bất đẳng thức

$$\sqrt[m]{\frac{a_1+a_2+....+a_n}{n}}\geq\frac{\sqrt[m]{a_1}+\sqrt[m]{a_2}+...+\sqrt[m]{a_n}}{n}$$

Với mọi số thực dương $m \leq 1$. Ta có thể chứng minh bất đẳng thức này bằng phương pháp ở trên, thực chất nó chỉ là hệ quả trực tiếp.

Bài 5 (IMO Shortlist 1998). Với x,y,z là các số thực dương có tích bằng 1, chứng minh bất đẳng thức sau

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{3}{4}$$

Lời giải. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM cho 3 số

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{1+y}{8}+\frac{1+z}{8}\geq\frac{3}{4}x$$

Tương tự ta có 2 bất đẳng thức với y,z rồi cộng lại suy ra

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+z)(1+x)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\geq\frac{x+y+z}{2}-\frac{3}{4}$$

Mặt khác $x+y+z\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$ nên ta có đpcm.

Bài 6 (IMO Shortlist 1990). Giả sử a,b,c ,d là các số thực không âm thỏa mãn $ab + bc + cd + da = 1$. Chứng minh

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{1}{3}$$

Lời giải.Sử dụng bất đẳng thức AM-Gm cho 4 số

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b+c+d}{18}+\frac{a}{6}+\frac{1}{12}\geq\frac{2a}{3}$$

Hoàn toàn tương tự ta có thêm 3 bất đẳng thứ b,c,d sau đó cộng lại được

$$\frac{a^3}{b+c+d}+\frac{b^3}{c+d+a}+\frac{c^3}{a+b+d}+\frac{d^3}{a+b+c}\geq\frac{a+b+c+d}{3}-\frac{1}{3}$$

Chú ý rằng $ab + bc + cd + da = (a + c)(b + d)$ nên

$$(a+b+c+d)^2\geq 4(ab+bc+cd+da)=4\Rightarrow a+b+c+d\geq 2$$

Thay kết quả này vào bất đẳng thức ở trên ta có dpcm. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$a = b = c = d = 1/2$

Bài 7 (Komal Magazine). Chứng minh với mọi a,b,c dương

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)}\geq\frac{27}{2(a+b+c)^2}$$

Lời giải.Sử dụng trực tiếp bất đẳng thức AM-GM cho vế trái

$$\frac{1}{a(a+b)}+\frac{1}{b(b+c)}+\frac{1}{c(c+a)}\geq\frac{3}{\sqrt[3]{abc(a+b)(b+c)(c+a)}}$$

Do đó ta chỉ cần chứng minh:

$$3^6abc(a+b)(b+c)(c+a)\leq 8(a+b+c)^6$$

Theo bất đẳng thức AM-GM:

$$3^3abc\leq(a+b+c)^3$$

$$3^3(a+b)(b+c)(c+a)\leq(a+b+c+c+a)^3=8\left(a+b+c\right)^3$$

Nhân theo vế 2 bất đẳng thức trên ta được điều phải chứng minh

Bài 8 Cho các số thực a,b,c thõa mãn $a^2+b^2+c^2=3$. Chứng minh bất đẳng thức sau:

$$|a|+|b|+|c|-abc\leq 4$$

Lời giải. Ta cũng áp dụng trực tiếp bất đẳng thức AM-GM như sau

$$a^2b^2c^2\leq\left(\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\right)^3=1\Rightarrow -abc\leq 1$$

$$(|a|+|b|+|c|)^2\leq 3(a^2+b^2+c^2)=9\Rightarrow|a|+|b|+|c|\leq 3$$

Cộng vế 2 bất đẳng thứ trên ta có điều phải chứng minh.Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi trong 3 số a,b,c có 2 số bằng 1 và 1 số bằng -1

Nhận xét.Nếu bài toán trên nếu ta bỏ đi các dấu giá trị tuyệt đối ,ta có bài toán tìm max của a + b + c- abc ?

Bài 9(Iran MO 1998). Cho các số thực dương a,b,c,d thõa mãn abcd=1 chứng minh rằng:

$$a^3+b^3+c^3+d^3\geq\max\left(a+b+c+d,\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right)$$

Lời giải. Ta phải chứng minh 2 bất đẳng thức sau

$$a^3+b^3+c^3+d^3\geq a+b+c+d$$

$$a^3+b^3+c^3+d^3\geq abc+bcd+cda+dab$$

Bất đẳng thức (1) được chứng minh tương tự như trong bài tập 4 mục 2.2.4. Bất đằng thức (2) có được bằng tổng các bất đẳng thức sau:

$$a^3+b^3+c^3\geq 3abc$$

$$b^3+c^3+d^3\geq 3bcd$$

$$c^3+d^3+a^3\geq 3cda$$

$$d^3+a^3+b^3\geq 3dab$$

Chỉ có đẳng thức khi $a=b=c=d=1$.

Bài.10(USA MO 1998). Chứng minh với mọi số thực dương a,b,c

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}$$

Lời giải.Ta có nhận xét sau

$$a^2+b^2\geq 2ab\Rightarrow a^3+b^3\geq ab(a+b)$$

$$\Rightarrow\frac{abc}{a^3+b^3+abc}\leq\frac{abc}{ab(a+b)+abc}=\frac{c}{a+b+c}$$

Xây dựng thêm 2 bất đẳng thức tương tự rồi cộng lại suy ra điều phải chứng minh:

$$\frac{abc}{a^3+b^3+abc}+\frac{abc}{b^3+c^3+abc}+\frac{abc}{c^3+a^3+abc}\leq 1$$

Đẳng thức xảy ra khi a = b = c

Bài.11 (IMO Shortlist 1996). Các số dương x,y,z có tích bằng 1. chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{xy}{x^5+xy+y^5}+\frac{yz}{y^5+yz+z^5}+\frac{zx}{z^5+zx+x^5}\leq 1$$

Lời giải. Ta có nhận xét sau

$$x^2+y^2\geq 2xy\Rightarrow x^5+y^5\geq x^2y^2(x+y)$$

$$\Rightarrow\frac{xy}{x^5+xy+y^5}\leq\frac{xy}{xy+x^2y^2(x+y)}=\frac{1}{1+xy(x+y)}=\frac{z}{x+y+z}$$

Xây dựng 2 bất đẳng thức tương tự với x,y rồi cộng vế cả 3 bất đẳng thức ta có điều phải chứng minh .đẳng thức xảy ra chỉ khi x = y = z = 1

3. Kết luận

Có nhiều cách chứng minh bất đẳng thức AM-GM.cách chứng minh hay nhất là cách chứng minh sử dụng phương pháo quy nạp Cauchy.Có lẽ vì vậy mà nhiều người nhầm lẫn rằng Cauchy phát hiện ra bất đẳng thức này. Ông chỉ là người đưa ra chứng minh rất hay của mình chứ không phải là người phát hiện ra đầu tiên. Bất đẳng thức mà chúng ta quen gọi là bất đẳng thức Bunhiacopxki thực chất là phát minh của 3 nhà toán học Schwar.z BunhiaCopxki và Cauchy.Theo cách gọi tên chung của thế giới,bất đẳng thức BunhiaCopxki có tên là bất đẳng thức Cauchy- Schwar.z,còn bất đẳng thức Côsi (hay Cauchy) có tên là bất đẳng thức AM-GM (Arithmetic Means-Geometric Means).

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Vũ Lương, Nguyễn Ngọc Thắng, *Các bài giảng về bất đẳng thức Côsi, Bunhiacopxki*. NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

2. Tạp chí toán học và tuổi trẻ (1998), *Tuyển tập 30 năm*, NXB Giáo dục Hà Nội.

3.Nguyễn Văn Mậu (2006), *Bất dẳng thức: Định lý và áp dụng,* NXB Giáo dục. Hà Nội.

4. Nguyễn Ngọc Sang (2009), *Phương pháp chứng minh bất đẳng thức AM - GM,* Sáng kiến kinh nghiệm, Trường THPT Nguyễn Huệ, Thanh Hóa.

5. Nguyễn Ngọc Duy, Nguyễn Tăng Vũ, *Bất đẳng thức AM - GM,* Trung tâm bồi dưỡng kiến thức Quang Minh, Thành phố Hồ Chí Minh.