Equipment with new general education program, Volume 2, Issue 313 (May 2024)
ISSN 1859 - 0810

# Ứng dụng Maple trong giảng dạy Khái niệm tích phân xác định

***Nguyễn Thị Nga****

**TS. Khoa Giáo dục đại cương, Trường Đại học Lao động Xã hội*

*Received: 25/4/2023; Accepted: 02/5/2024; Published: 10/5/2024*

***Abstract:*** *Integral is one of the main contents taught in advanced mathematics courses for university students. Integral is one of the difficult contents, highly abstract and of little interest to students. Therefore, when teaching the concept of integral, it is necessary to have visual and vivid images to make the concept easy to understand. Maple is one of the software that can support this content very well. This article introduces the application of Maple software to teaching definite integrals at universities.*

***Kwywords:*** *Definite integrals, Maple software, teaching definite integrals at universities.*

## 1. Đặt vấn đề

Tích phân là một trong những nội dung chính được giảng dạy trong học phần Toán cao cấp của sinh viên (SV) các trường Đại học. Tích phân là một trong những nội dung khó, có tính trừu tượng cao và ít gây được hứng thú với SV.Tuy nhiên, tích phân lại có những ứng dụng rất cụ thể và hiệu quả trong cuộc sống như đo chiều dài của một đường cong, tính diện tích của một hình phẳng, tính diện tích bề mặt và thể tích của một vật thể,... Nhiều SV có thể ứng dụng công thức tích phân để làm các bài toán tích phân rất tốt nhưng lại không biết ứng dụng ý tưởng của tích phân vào giải quyết các bài toán thực tế. Ví dụ khi phải tích diện tích của một thửa ruộng, diện tích mảnh vải áo trong thiết kế áo, diện tích của một chi tiết máy,....Nếu các hình tính diện tích này không phải là các hình chữ nhật, tam giác hay hình thang, hình tròn có sẵn công thức tinh toán thì nhiều SV lúng túng không biết làm thế nào. Để các em SV có thể vận dụng tư tưởng của tích phân Riemann vào ngành học của mình, đồng thời giúp các em thấy được vai trò, ý nghĩa quan trọng của tích phân trong đời sống thực tiễn, thì khi dạy khái niệm tích phân cần có những hình ảnh trực quan, sinh động để khái niệm được trở nên dễ hiểu và tư tưởng của Riemann dễ được thấm nhuần trong ứng dụng. Maple là một trong những phần mềm có thể hỗ trợ rất tốt cho nội dung này.

## 2. Nội dung nghiên cứu

### *2.1. Maple là gì*

Maple là một hệ thống tính toán trên các biểu thức đại số và minh họa toán rất mạnh mẽ được phát triển bởi các nhà nghiên cứu của Đại học Waterloo (Canada) từ năm 1980 và được thương mại hoá bởi công ty Warterloo Maple Inc. Phiên bản Maple đầu tiên ra đời năm 1980, đến nay đã phát triển đến phiên bản 13 (2009) và ngày càng hoàn thiện hơn. Maple có cách cài đặt đơn giản, chạy được trên tất cả các hệ điều hành, cấu trúc linh hoạt dễ sử dụng, đặc biệt có trình trợ giúp Help nên tạo điều kiện cho người dùng dể sử dụng. Maple trở thành sự lựa chọn sử dụng trong dạy học của nhiều nước trên thế giới.

Maple có một số tính năng cơ bản của như sau:

Là một hệ thống tính toán trên các biểu thức đại số;

Có thể thực hiện hầu hết các phép toán cơ bản trong chương trình toán học phổ thông và đại học;

Cung cấp các công cụ minh họa hình học thuận tiện như: Vẽ đồ thị tĩnh hoặc động của các đường, các mặt được cho bởi các hàm tùy ý trong nhiều hệ trục tọa độ khác nhau;

Ngôn ngữ lập trình đơn giản và mạnh mẽ có khả năng tương tác với các ngôn ngữ khác như Latex, Word, HTML,...

Một công cụ biên soạn giáo án và bài giảng điện tử, thích hợp với các lớp học tương tác trực tiếp;

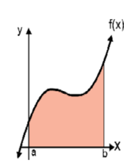
### *2.2. Khái niệm tích phân xác định*

a)Tình huống có vấn đề

Giả sử cho hàm số y=f(x) xác định và liên tục trên một khoảng đóng [a,b] , giả sử f(x) không âm trên [a,b] . Bài toán tìm diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm số f(x) , trục hoành và các đường thẳng x=a; x=b

Giả sử $f$ là một hàm số không âm bị chặn xác định trên đoạn $[a,b]$.

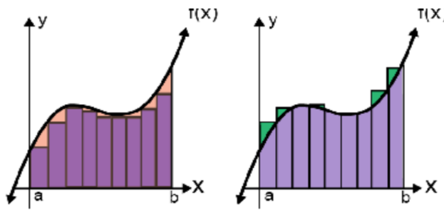
Tính diện tích $A(R_f)$ của miền $R_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \le x \le b, 0 \le y \le f(x)\}$.




Hình vẽ minh họa miền $R_f$.

Đây là một hình chưa có công thức tính diện tích như hình chữ nhật , hình tam giác hay hình tròn. Vậy làm thế nào để tính được?

Tư tưởng của tích phân Riemann là muốn tìm diện tích S của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm số f(x), trục hoành và các đường thẳng x=a; x=b, thì chia diện tích S thành các hình chữ nhật sau đó tính tổng diện tích các hình chữ nhật. Khi số hình chữ nhật tăng lên thì tổng diện tích của các hình chữ nhật tính được sẽ ngày càng gần bằng với diện tích chính xác của hình S.

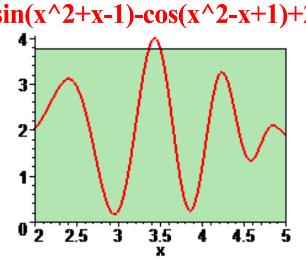



Ví dụ: Tìm diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm $f(x)=\sin\left(x^2+x-1\right)-\cos\left(x^2-x+1\right)+2$, trục hoành và các đường thẳng x=2; x=5

Dùng phần mền Maple ta có hình của miền giới hạn đó như sau

> **with(student):**

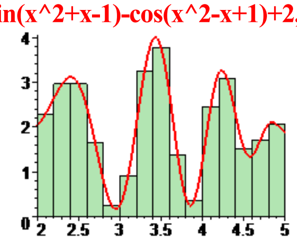
> **middlebox(sin(x^2+x-1)-cos(x^2-x+1)+2,x=2..5,1);**




Hình (1)

Gọi diện tích hình phải tính là S. Nếu chia đoạn [2, 5] thành 15 đoạn bằng nhau thì diện S được chia tương ứng thành 15 hình chữ nhật như hình hình (2)

> **middlebox(sin(x^2+x-1)-cos(x^2-x+1)+2,x=2..5,15);**

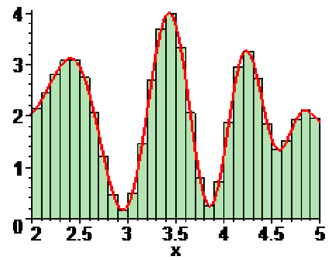



Hình (2)

Ta có thể thấy diện tíc S gần bằng tổng diện tích 15 hình chữ nhật

- Nếu chia đoạn [2, 5] thành 30 đoạn bằng nhau thì diện S được chia tương ứng thành 30 hình chữ nhật như hình hình (3)

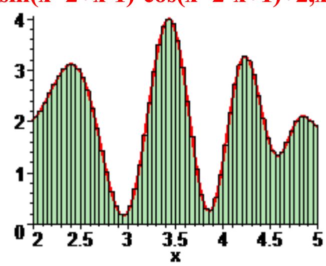
> **middlebox(sin(x^2+x-1)-cos(x^2-x+1)+2,x=2..5,30);**




Hình (3)

- Nếu chia đoạn [2, 5] thành 60 đoạn bằng nhau thì diện S được chia tương ứng thành 60 hình chữ nhật như hình hình (4)

> **middlebox(sin(x^2+x-1)-cos(x^2-x+1)+2,x=2..5,60);**




Hình (4)

Như vậy càng chia nhỏ đoạn [2, 5] thì diện tích S càng gần bằng tổng diện tích của các hình chữ nhật.

Xuất phát từ ý tưởng tính gần đúng bằng cách chia nhỏ hình rồi cộng lại ở trên, khái niệm tích phân xác định cho các hàm số một biến số do nhà toán học người Đức tên là Bernhard Riemann đề xuất và hoàn chỉnh bởi nhà toán học pháp Darboux.đã ra đời.

**b) Phân hoạch của** $[a, b]$

**Cho** $[a, b]$ là một đoạn trong R. Một phân hoạch $\prod$ của $[a, b]$

Là một sự phân chia đoạn đó thành *n* đoạn nhỏ bởi các điểm chia lần lượt là:

$$x_0=a<x_1<x_2<....<x_n=b$$

**Các điểm** $x_0, x_1, x_2, ...., x_n$ gọi là các điểm chia của phân hoạch $\prod$

$d\left(\prod\right)=\max\limits_{1\le k\le n}\left|x_k-x_{k-1}\right|$ gọi là độ dài của phân hoạch $\prod$. Họ tất cả các phân hoạch của $[a, b]$ được viết là $\Im[a,b]$.

**c) Lập tổng tích phân Riemann**

cho hàm $f(x)$ xác định dương trên đoạn $[a, b]$ và một phân hoạch $\prod$ của $[a, b]$bởi các điểm chia

$$x_0=a<x_1<x_2<....<x_n=b.$$

Trên mỗi đoạn chia $\left[x_k-x_{k-1}\right], 1\le k\le n$ chọn tùy ý một điểm $\xi_k$ .

Tổng $S_n\left(\xi_1,...,\xi_n\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}f\left(\xi_k\right).\left|x_k-x_{k-1}\right|$

gọi là tổng tích phân Riemann của $f(x)$ ứng với phân hoạch $\prod$ và các điểm chọn $\xi_k$, $1 \le k \le n$. Khi phân hoạch $\prod$ cùng các điểm chia thay đổi ta được ta được một họ các $S_n$ (không đếm được).

Ta nói họ các tổng trên có giới hạn $C \in R$ khi $d(\prod) \to 0$ hay $n \to \infty$ và viết

$$\lim_{d(\Pi) n\to 0} S_n(\xi_1,...,\xi_n) = \lim_{d(\Pi) n\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k).|x_k - x_{k-1}| = S$$

hay $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ (2)

nếu $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall \prod \in \Im[a,b], d(\prod) < \delta$

thì $|S_n - S| < \varepsilon$

Với mọi cách chọn $\xi_k$, $1 \le k \le n$.

**d) Định nghĩa:** *Nếu giới hạn (2) tồn tại hữu hạn ta nói S là tích phân xác định hay tích phân Riemann của hàm $f(x)$ trên đoạn $[a, b]$ và viết là*

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

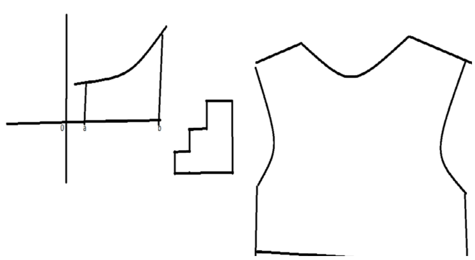
*Hàm $f(x)$ khi đó gọi là khả tích Riemann hay đơn giản là khả tích.*

Chú ý : $f(\xi_k).|x_k - x_{k-1}|$ chính là diện tích hình chữ nhật có độ dài 2 cạnh là $|x_k - x_{k-1}|$ và $f(\xi_k)$

$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k).|x_k - x_{k-1}|$ là tổng diện tích $n$ hình chữ nhật ứng với phân hoạch chia $[a, b]$ thành $n$ đoạn thẳng.

Như vậy tư tưởng chính của tích phân là chia nhỏ các khái niệm như "phân hoạch", "tính tổng" và "chuyển qua giới hạn". Hiểu rõ tư tưởng của tích phân sẽ giúp SV biết vận dụng sáng tạo tư tưởng đó vào việc tính diện tích của các bài toán thực tế.

***2.3.Ví dụ tính diện tich các hình***



Các hình trên không phải là các hình đã biết công thức tính diện tích. Vận dụng tư tưởng của tích phân Riemann SV có thể biết cách tính gần đúng bằng cách chia hình đã cho thành các hình chữ nhật và hình tam giác, hình thang, rồi cộng các diện tích hình chữ nhật, hình tam giác,hình thang lại ta có số đo gần đúng của diện tích hình cần tìm.

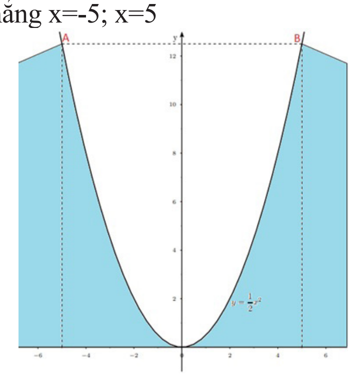
Tuy nhiên sau khi học xong định nghĩa tích phân xác định và công thức Newton- Leibnitz thì ta có thể giải toán tìm diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm số f(x) , trục hoành và các đường thẳng x=a; x=b một các dễ dàng và chính xác qua việc tính tích phân

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

Ví dụ 1: Tính diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = x^2$, trục hoành và các đường thẳng x=0; x=1

$$S = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

Ví dụ 2: Tính diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, trục hoành và các đường thẳng x=-5; x=5




$$S = 2\int_0^5 \frac{1}{2}x^2 dx = 125/3$$

**3. Kết luận**

Để toán học gần hơn và dễ áp dụng hơn trong thực tế cuộc sống và trong công việc của mỗi SV khi ra trường, thì khi dạy các khái niệm trừu tượng và khó như khái niệm tích phân xác định, giảng viên cần biết sử dụng các công cụ của công nghệ thông tin như phần mềm Maple để hỗ trợ bài giảng. Hình ảnh trực quan và sinh động sẽ giúp SV hiểu được ý nghĩa và vai trò của khái niệm một cách tổng quát hơn và dễ dàng hơn.

**Tài liệu tham khảo**

1.Nguyễn Đình Trí (*chủ biên*), Tạ Văn Đĩnh, Nguyễn Hồ Quỳnh (2007),*Toán học cao cấp tập 1*, Nhà xuất bản giáo dục.

2. Nguyễn Bá Kim, 2007. Phương pháp dạy học môn toán. NXB Giáo dục.

3. Nguyễn Văn Khuê ( chủ biên), Phạm Ngọc Thao- Lê Hải Mậu- Nguyễn Đình Sang,(1997), *Toán học cao cấp tập 1.* NXB Giáo dục.

4. Stewart, J., 2010. Calculus Early Transcendentals. Seventh edition. McMaster University and University of Toronto. United States. 1170 pp.