Journal of educational equipment: Applied research, Volume 2, Issue 313 (May 2024)
ISSN 1859 - 0810

Sử dụng phương pháp phân tích, biến đổi đồng thời giả thiết và kết luận trong giải toán

Ngô Thị Huyền*

**ThS. Trường Đại học Sư phạm kỹ thuật Vinh*

Received:28/4/2024; Accepted: 3/5/2024; Published: 13/5/2024

Abstract: *Mathematics is considered a tool for many other subjects at all educational levels, and is also a subject with rich potential that can be exploited to develop students' thinking. Many students, although capable and have good qualities, lack creativity and do not try to find the connection between the hypothesis and the conclusion of the problem to form the best solution. Therefore, training the ability to analyze and change hypotheses and conclusions at the same time is an important issue in the process of developing learners' thinking, contributing to the formation of intellectual qualities and effective logical arguments. Physical.*

In this article, through analyzing a number of problems using knowledge of trigonometry and inequalities, we aim to help learners develop analytical capacity, the ability to self-study, self-discover and solve problems.

Keywords: *Hypothesis, conclusion, analysis, transformation, proof, directon.*

1. Đặt vấn đề

Có những bài toán mà giả thiết và kết luận vốn đã quá xa nhau. Lại có những bài toán thực tế là chúng gần nhau, nhưng để gây "khó dễ" cho người giải, tác giả bài toán cố tình làm cho chúng trở nên xa nhau hơn. Nhiệm vụ của người giải toán là tìm cách bắc những nhịp cầu logic để thu hẹp khoảng cách giữa giả thiết và kết luận, từ đó tìm ra lời giải tốt nhất.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Phương pháp quan sát và phân tích kết luận để định hướng các phép biến đổi giả thiết

Các bài toán loại này thường có dạng tổng quát $A \Rightarrow B$.

Quy trình suy luận theo phương pháp này được mô tả như sau: $A \Rightarrow A_1 \Rightarrow A_2 \Rightarrow ,,, \Rightarrow A_n \Rightarrow B$

Trong đó mỗi phép biến đổi phải được định hướng đúng đắn từ kết luận, không phải biến đổi một cách chung chung, thiếu mục đích.

<u>*Bài toán 1*</u>

Chứng minh rằng trong tam giác ABC không vuông, nếu góc $\hat{B} = 45^0$ thì:

$(1 + \cot A)(1 + \cot C) = 2$

Hướng dẫn giải

Ta xuất phát từ giả thiết $\hat{B} = 45^0$ để phân tích và biến đổi như sau:

$\hat{B} = 45^0 \Rightarrow \hat{A} + \hat{C} = 135^0$ (vì trong kết luận chỉ có A và C).

$\Rightarrow \cot(A + C) = -1$ (vì A và C nằm trong hàm cot).

$\Rightarrow \dfrac{1 - \tan A \tan C}{\tan A + \tan C} = -1$ (Vì A và C nằm trong các hàm số lượng giác riêng biệt).

$\Rightarrow 1 - \dfrac{1}{\cot A \cot C} = -\dfrac{1}{\cot A} - \dfrac{1}{\cot C}$ (vì trong kết luận chỉ chứa hàm cot)

$\Rightarrow \cot A + \cot C + \cot A \cot C = 1$ (vì trong kết luận không có dạng phân thức).

$\Rightarrow \cot A + \cot C + \cot A \cot C + 1 = 2$ (để có 2 ở vế phải đồng thời vế trái phân tích được thành nhân tử).

$\Rightarrow (1+\cot A)(1+ \cot C) = 1$. Đây chính là kết luận.

Lời giải bài toán này khá đơn giản và cũng có thể giải theo cách khác. Điều đáng nói ở đây là các phép biến đổi đều được định hướng chính xác và sau mỗi phép biến đổi thì kết quả thu được càng gần hơn với kết luận của bài toán.

<u>*Bài toán 2*</u>

Chứng minh rằng nếu a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác có chu vi bằng 2 thì:

$a^2 + b^2 + 2abc < 2$ (1)

Hướng dẫn giải

Từ giả thiết của bài toán: a,b,c là độ dài ba cạnh của một tam giác; $a + b + c = 2$ ta suy ra:

$0 < a,b,c < 1$

do đó: $(1 - a)(1 - b)(1 - c) > 0$ (2)

Việc chọn bất đẳng thức (2) dựa vào điều kiện của a,b,c trong giả thiết cũng như tính bình đẳng của a,b,c trong bất đẳng thức (1).

(2) $\Rightarrow 1-(a+b+c)+ab+bc+ca-abc>0$
$\Rightarrow a+b+c-(ab+bc+ca)+abc<1$
(do vế phải (1) là hằng số)
$2(a+b+c)-2(ab+bc+ca)+2abc<2$
(do vế phải (1) bằng 2)
$(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+2abc<2$
(thay $2=a+b+c$ để xuất hiện $(a+b+c)^2$ vì trong (1) có các biểu thức bậc hai đối với a,b,c)
$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+2abc<2.$

Từ lời giải trên ta có thể đề xuất bài toán tổng quát và phát hiện ra nguồn gốc hình thành bất đẳng thức (1).

Giả thiết rằng a,b,c là ba cạnh của tam giác có chu vi là 2p, khi đó:
$(p-a)(p-b)(p-c)>0$
$\Rightarrow p^3-p^2(a+b+c)+p(ab+bc+ca)-abc>0$
$\Rightarrow p^2(a+b+c)-p(ab+bc+ca)+abc<p^3$
$\Rightarrow 2p(a+b+c)-2(ab+bc+ca)+\dfrac{2}{p}abc<2p^2$
(nhân 2 vế với $\dfrac{2}{p}>0$)
$\Rightarrow (a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)+\dfrac{2}{p}abc<2p^2$
(thay $2p=a+b+c$)
$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+\dfrac{2}{p}abc<2p^2.$ (3)

Bất đẳng thức (1) là trường hợp riêng của bất đẳng thức (3) khi $p=1$.

2.2. Phương pháp phân tích và biến đổi kết luận từ những định hướng hợp lý qua việc phân tích giả thiết

Quy trình suy luận $A\Rightarrow B$ diễn ra như sau: thay B bởi $B_1, B_2,..., B_n$ sao cho sau mỗi phép biến đổi thì kết quả thu được ngày càng gần A (phép biến đổi này là $\Leftrightarrow$); trong đó A, B đã biết, $B_1, B_2,..., B_n$ phải tìm. Khi đó, nếu B_n là A thì bài toán kết thúc. Nếu B_n chưa phải là A thì ta giải bài toán $A\Rightarrow B_n$, đơn giản hơn bài toán đã cho.

Bài toán 3

Với điều kiện $ax+by+cz=0$, hãy đơn giản biểu thức

$$P=\frac{ax^2+by^2+cz^2}{ab(x-y)^2+bc(y-z)^2+ca(z-x)^2}$$

Hướng dẫn giải

Gọi M là mẫu số. Để đơn giản được P thông thường ta phải biến đổi mẫu số thành tích sao cho phải có một thừa số là $ax^2+by^2+cz^2$. Hơn nữa ta phải biến đổi để sử dụng được giả thiết $ax+by+cz=0$

Ta biến đổi M như sau:
$M=ab(x^2-2xy+y^2)+bc(y^2-2yz+z^2)$
$\quad +ca(z^2-2zx+x^2)$
$\quad =ax^2(b+c)+by^2(c+a)+cz^2(a+b)$
$\quad -2abxy-2bcyz-2cazx$

Để tạo ra thừa số $ax^2+by^2+cz^2$, trong ba số hạng đầu của M ta thêm bớt các số hạng thích hợp để trong ngoặc đều là $a+b+c$. Khi đó ta có:
$M=ax^2(a+b+c)+by^2(a+b+c)+cz^2(a+b+c)$
$\quad -(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)+2abxy+2bcyz+2cazx)$
$\quad =(ax^2+by^2+cz^2)(a+b+c)-(ax+by+cz)^2$
$\quad =(ax^2+by^2+cz^2)(a+b+c)$
(do $(ax+by+cz)=0$).

Vậy $P=\dfrac{1}{a+b+c}$.

Bài toán 4

Cho tam giác ABC bất kì có các cạnh $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$. Chứng minh với mọi $x\in R$ ta đều có:

$$1+\frac{1}{2}x^2\geq \cos A+x(\cos B+\cos C) \quad (4)$$

$$b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2>0. \quad (5)$$

Hướng dẫn giải

Nhận xét rằng các bất đẳng thức (4) và (5) sau phép biến đổi và thu gọn đều có dạng:
$f(x)=Mx^2+Nx+P\geq 0$
hoặc $f(x)=Mx^2+Nx+P>0$
trong đó $M=\dfrac{1}{2}$ hoặc $M=b^2$ đều là số dương. Khi đó, theo định lý thuận về dấu của tam thức bậc hai, thay vì giải bài toán ban đầu, ta giải bài toán điều kiện đủ.

Chứng minh $\Delta\leq 0$ cho (4) hoặc $\Delta<0$ cho (5).

Với bất đẳng thức (4), ta có:

$$(4)\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2+(\cos B+\cos C)x+1-\cos A\geq 0$$

$$\Delta=(\cos B+\cos C)^2-2(1-\cos A)$$

$$=4\cos^2\frac{B+C}{2}\cos^2\frac{B-C}{2}-4\sin^2\frac{A}{2}$$

$$=4\sin^2\frac{A}{2}\left(\cos^2\frac{B-C}{2}-1\right).$$

Rõ ràng $\Delta\leq 0$

Với bất đẳng thức (5), ta có:

$$\Delta=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2$$

$$=4b^2c^2(\cos^2 A-1)$$

Do $0<A<\pi\Rightarrow \cos^2 A<1$.

Vậy $\Delta<0$.

Các bài toán được giải bằng cách phân tích, biến đổi kết luận rồi thay bài toán đã cho bởi các bài toán tương đương hoặc bài toán điều kiện đủ.

2.3. Phân tích, biến đổi đồng thời giả thiết, kết luận và các dữ liệu liên quan trong bài toán

Giả thiết và kết luận bao giờ cũng có mối liên hệ với nhau. Việc bắc cầu chỉ từ một phía đôi khi không cho ta hướng giải quyết bài toán trong trường hợp mối liên hệ giữa giả thiết và kết luận quá phức tạp. Chúng đòi hỏi người giải toán phải đồng thời quan sát kết luận để định hướng đúng phép biến đổi cho giả thiết và phải căn cứ vào giả thiết để có định hướng đúng phép biến đổi kết luận.

Bài toán 5

Giả sử rằng tan α và tan β là các nghiệm của phương trình:

$x^2 + px + q = 0$

Hãy tính số trị của biểu thức sau theo p và q:

$$M = \sin^2(\alpha+\beta) + p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) + q\cos^2(\alpha+\beta)$$

Hướng dẫn giải

Trước hết, do M chứa hàm số lượng giác của các góc nên ta biến đổi giả thiết đã cho về dạng:

$\tan\alpha + \tan\beta = -p$

$\tan\alpha.\tan\beta = q$

(Áp dụng định lý Vi – ét).

Lại do trong biểu thức M chứa các hàm lượng giác của góc $\alpha + \beta$ nên ta tiếp tục biến đổi giả thiết về dạng:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{-p}{1-q}$$

(với giả thiết $q \neq 1$)

Từ đó, để tính M ta tìm cách biểu diễn M qua tan $(\alpha + \beta)$:

$$M = \cos^2(\alpha+\beta)[\tan^2(\alpha+\beta) + p\tan(\alpha+\beta) + q]$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2(\alpha+\beta)}[\tan^2(\alpha+\beta) + p\tan(\alpha+\beta) + q]$$

chỉ việc thay $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{-p}{1-q}$ vào M ta được:

$$M = \frac{1}{1+\dfrac{p^2}{(1-q)^2}}\left[\left(-\frac{p}{1-q}\right)^2 + p\left(-\frac{p}{1-q}\right) + q\right]$$

$$= \frac{1}{p^2 + (1-q)^2}\left[qp^2 + q(1-q)^2\right] = q$$

$M = q.$

Trường hợp $q = 1$:

Khi đó $\tan(\alpha+\beta) = 1 \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = 0 \Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = 1$

và $M = \sin^2(\alpha+\beta) = 1.$

Vậy với mọi q ta đều có: $M = q.$

2.4. Bài tập đề nghị

Bài toán 6

Các số a, b, c, d theo thứ tự đó lập thành một cấp số cộng. Chứng minh rằng nếu lấy số m sao cho:

$2m \geq | d \ - b \ |$

thì với mọi x ta có:

$(x - a)(x - b)\ (x - c)\ (x - d) + m^2 \geq 0$

Bài toán 7

Gọi a, b, c là độ dài các cạnh và x, y, z là độ dài các đường phân giác trong của tam giác ABC. Hãy chứng minh:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} > \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Bài toán 8

Tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn với các cạnh AB = a, BC = b,

CD = c, DA = d. Chứng minh rằng:

$$\tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}$$

trong đó $p = \dfrac{1}{2}(a+b+c+d)$

Bài toán 9

Chứng minh rằng trong tam giác ABC, nếu:

$a^2 + b^2 = c^2 + 4R^2$

thì $\dfrac{\tan A \tan B + 1}{\tan A \tan B - 1} = \tan^2 C.$

3. Kết luận

Việc tìm cách làm cho kết luận và giả thiết xích lại gần nhau là việc làm ngược chiều của người giải toán so với tác giả bài toán (tác giả bài toán luôn tìm cách làm cho kết luận xa thêm với giả thiết). Để làm được việc này, người giải toán phải đoán được ý đồ của tác giả, từ đó có thể tổng quát hoá bài toán hoặc xây dựng hệ thống bài toán tương tự, góp phần phát triển khả năng khái quát hoá, khả năng suy luận logic cho người làm toán.

Tài liệu tham khảo

[1]. Nguyễn Thái Hòe (2001), *Rèn luyện tư duy qua việc giải bài tập toán*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[2]. Vũ Tuấn (2007), *Bài tập đại số và giải tích*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[3]. Trần Văn Hạo (2002), *Chuyên đề lượng giác luyện thi vào đại học*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[4]. Trần Chí Hiếu, Nguyễn Danh Phan (1999), *Các chuyên đề toán THPT đại số 10*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

[5]. G. Polya (1997), *Giải bài toán như thế nào*, NXB Giáo dục, Hà Nội.