Journal of educational equipment: Education management, Volume 1, Issue 314 (June 2024)
ISSN 1859 - 0810

Sử dụng mô hình bài toán dự báo để giải quyết một số tình huống thực tế trong giảng dạy Toán cao cấp ở trường đại học

Vi Diệu Minh*

**Trường Đại học Nông Lâm - Đại học Thái Nguyên.*
Received:19/5/2024; Accepted: 24/5/2024; Published: 29/5/2024

Abstract: *This article researches the use of prediction problem models to solve some real situations in teaching advanced mathematics at universities. We study prediction problem models using differential equations and How to solve differential equations to find the relationship function between known quantities and unknown quantities, thereby predicting future results.*

Keywords: *Differential equation, Separation of variables differential equation, predicting problem, mathamatical model.*

1. Đặt vấn đề

Có rất nhiều định nghĩa về khái niệm mô hình hóa toán học, tùy theo quan điểm lý thuyết mà mỗi tác giả lựa chọn nhưng có thể nói một cách ngắn gọn thì mô hình hóa toán học là quá trình giải quyết những tình huống thực tế bằng công cụ toán học. Mô hình hóa toán học giúp người học hiểu được mối quan hệ giữa toán học với cuộc sống, môi trường xung quanh và các môn học khác, giúp cho việc học toán trở nên ý nghĩa hơn. Để mô tả các hiện tượng tự nhiên hay các vấn đề thực tế cần sử dụng các công cụ toán học một cách logic, nói tóm gọn đó chính là các phương trình toán học và các điều kiện toán học.

Bài toán dự báo là một dạng bài toán ước lượng giá trị gần đúng của một đại lượng nào đó hoặc kết luận cho một tình huống nào đó trong tương lai thông qua một biểu thức toán học. Trong khuôn khổ bài báo, chúng tôi nghiên cứu mô hình bài toán dự báo mà trong đó sử dụng phương trình vi phân và cách giải phương trình vi phân để tìm hàm số liên hệ giữa đại lượng đã biết và đại lượng chưa biết, từ đó dự báo kết quả trong tương lai.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Một số khái niệm về mô hình hóa toán học và quá trình mô hình hóa toán học

Tác giả Swetz & Hartzler (1991) nhận định, mô hình là một mẫu, một đại diện, một minh họa được thiết kế để mô tả cấu trúc, cách vận hành của một sự vật, hiện tượng hay hệ thống. Quá trình mô hình hóa trong toán học có thể được định nghĩa là quá trình nghiên cứu trong đó bao gồm công đoạn quan sát hiện tượng trong tự nhiên, phân tích mối quan hệ của các yếu tố trong hiện tượng, sử dụng các công cụ toán học để giải thích hiện tượng như phương trình, biến, đồ thị hàm số… từ đó đạt được kết quả về toán và vận dụng kết quả này để giải thích lại các hiện tượng. Tác giả Edward và Hamson (2001) cho rằng, mô hình hóa toán học là chuyển một vấn đề thực tế sang một vấn đề toán học, bằng cách thiết lập và giải quyết các mô hình toán học, thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tế, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận. Theo Lê Thị Hoài Châu, mô hình toán học là sự giải thích bằng toán học cho một hệ thống ngoài toán học với những câu hỏi xác định mà người ta đặt ra trên hệ thống này. Quá trình mô hình hóa toán học là một quá trình thiết lập mô hình toán học cho vấn đề ngoài toán học, giải quyết vấn đề trong mô hình đó, thể hiện và đánh giá lời giải trong ngữ cảnh thực tế, cải tiến mô hình nếu cách giải quyết không thể chấp nhận.

Như vậy, mô hình toán học là một phương pháp sử dụng các công thức và biểu đồ để mô tả và giải thích một vấn đề trong thực tế. Các mô hình toán học thường được biểu diễn dưới dạng phương trình, hệ phương trình, đồ thị, bảng số liệu và các biểu đồ khác. Các mô hình này được sử dụng để mô tả một hệ thống hoặc quá trình bằng cách sử dụng các biến, tham số và phương trình để mô tả các mối quan hệ giữa chúng. Mô hình hóa toán học có thể được sử dụng để giải quyết các vấn đề liên quan đến khoa học, kỹ thuật, kinh tế, tài chính, y học, xã hội học và nhiều lĩnh vực khác. Ví dụ như mô hình tài chính để dự đoán giá cổ phiếu, mô hình sinh học để mô tả sự phát triển của một loài trong tự nhiên, mô hình động lực học để mô tả sự thay đổi của một hệ thống theo thời gian, và mô hình kinh tế để mô tả tương tác giữa các yếu tố trong kinh tế...

Quá trình dạy học bằng mô hình hóa, hay viết

ngắn gọn là quy trình mô hình hóa, gồm các bước thực hiện như sau:

Bước 1: Nghiên cứu tình huống thực tế, xác định dữ liệu đầu vào và kết quả đầu ra cần đạt được;

Bước 2: Chuyển vấn đề từ tình huống thực tế đã nghiên cứu thành một mô hình toán;

Bước 3: Sử dụng các kiến thức toán để tìm lời giải cho tình huống;

Bước 4: Đánh giá lại kết quả đạt được từ mô hình và hiệu chỉnh mô hình cho phù hợp với yêu cầu đặt ra của tình huống.

2.2. Mô hình bài toán dự báo

2.2.1. Mô hình bài toán dự báo tổng quát

Quy trình mô hình hóa bài toán dự báo tổng quát được thực hiện theo các bước như sau:

Bước 1: Nghiên cứu tính huống thực tế: Mặc dù không biết hàm số cụ thể nhưng có thông tin về tốc độ thay đổi của một đại lượng nào đó như tốc độ tăng trưởng, tốc độ phân rã, tốc độ phát triển...chính là đạo hàm của đại lượng tương ứng.

Bước 2: Mô tả tình huống thực tế về dạng toán học: Tìm đại lượng F phụ thuộc vào biến số x biết tốc độ thay đổi của F theo x được mô tả bởi mô hình:

Bước 3: Sử dụng các kiến thức toán để tìm lời giải cho tình huống:

Giải phương trình vi phân: $\frac{dF}{dx} = g(x)$, ta đưa về dạng phương trình vi phân có biến số phân ly:

$dF = g(x)dx(*)$

Tích phân hai vế (*) ta được

Dựa vào điều kiện ban đầu, tìm giá trị . Khi đó mô hình biểu thị mối quan hệ giữa đại lượng F và biến số x là: $F(x) = G(x) + c_0$

Bước 4: Dựa vào mô hình để dự đoán giá trị của F tại trong tương lai.

Ví dụ 1: Doanh thu biên (tốc độ thay đổi của doanh thu) của một xưởng sản xuất nồi cơm điện tính theo số lượng sản phẩm được cho bởi phương trình:

$$\frac{dR}{dx} = -3x^2 + 900x + 52500,$$

Trong đó, x là số lượng sản phẩm được sản xuất ($x > 0$). Biết rằng xưởng sản xuất 0 sản phẩm thì doanh thu bằng 0. Hãy ước tính doanh thu (theo đơn vị đô la) của xưởng khi sản xuất 300 sản phẩm.

Bước 1: Nghiên cứu tình huống thực tế: Khi xưởng sản xuất 0 sản phẩm thì doanh thu bằng 0. Mặc dù chưa có hàm số liên hệ giữa doanh thu và số lượng sản phẩm được sản xuất nhưng có thông tin về tốc độ thay đổi của doanh thu theo số lượng sản phẩm.

Bước 2: Mô tả tình huống thực tế dưới dạng mô hình toán học:

Vì tốc độ thay đổi của doanh thu chính là đạo hàm của hàm doanh thu nên mô hình toán học của bài toán là tìm hàm doanh thu R phụ thuộc vào số lượng sản phẩm được sản xuất biết rằng:

$$\frac{dR}{dx} = -3x^2 + 900x + 52500,$$

Bước 3: Giải phương trình vi phân trên bằng cách đưa về phương trình vi phân có biến số phân ly. Ta có: $dR = (-3x^2 + 900x + 52500)dx.$

Tích phân hai vế ta được:

$$\int dR = \int (-3x^2 + 900x + 52500)dx \Leftrightarrow R = -x^3 + 450x^2 + 52500x + c$$

Với C là hằng số bất kỳ. Ta có, khi $x = 0$ thì $R = 0$ nên $C = 0$. Suy ra mô hình hàm doanh thu là: $R = -x^3 + 450x^2 + 52500x + c$

Bước 4: Dựa vào mô hình trên ta có thể dự đoán doanh thu của xưởng khi sản xuất 300 sản phẩm là:

$R = -300^3 + 450.300^2 + 52500.300 = 29250000$ (đô la)

Vậy có thể dự tính doanh thu của xưởng khi sản xuất 300 sản phẩm là 29 250 000 đô la.

2.2.2. Mô hình bài toán tăng trưởng và mô hình bài toán phân rã

Mô hình bài toán dự báo có rất nhiều ứng dụng trong thực tế như mô hình về sự gia tăng dân số, mô hình về số tiền lãi ngân hàng, về sự phân rã của chất phóng xạ…Các bài toán này ta có thể gộp chung thành dạng mô hình bài toán tăng trưởng và mô hình bài toán phân rã. Quy trình mô hình hóa hai bài toán này cũng được thực hiện theo 4 bước như sau:

Bước 1: Nghiên cứu tính huống thực tế: Mặc dù không biết hàm số cụ thể nhưng có thông tin về tốc độ tăng trưởng hoặc tốc độ phân rã (giảm) của một đại lượng nào đó theo thời gian với hằng số tỷ lệ k.

Bước 2: Mô tả tình huống thực tế về dạng toán học: Tìm đại lượng F phụ thuộc vào thời gian t biết tốc độ tăng trưởng (phân rã) của F theo t được mô tả bởi mô hình: $\frac{dF}{dt} = kF$ (lưu ý rằng với bài toán tăng trưởng thì $k > 0$, với bài toán phân rã thì $k < 0$).

Bước 3: Giải phương trình vi phân: $\frac{dF}{dt} = kF$

Để giải phương trình trên, ta đưa phương trình về dạng phương trình có biến số phân ly.

$$\frac{dF}{dt} = kF \Leftrightarrow \frac{dF}{F} = kdt$$

Tích phân hai vế ta được:

$$\int \frac{dF}{F} = \int kdt \Leftrightarrow \ln|F| - \ln|C| = kt \Leftrightarrow F = c.e^{kt}.$$

với C là hằng số bất kỳ.

Dựa vào điều kiện ban đầu, tìm giá trị c_0. Khi đó

mô hình biểu thị mối quan hệ giữa đại lượng F và thời gian t là: $F(t) = c_0.e^{kt}$

Bước 4: Dựa vào mô hình $F(t)$ để dự đoán kết quả tại thời điểm $t_0$trong tương lai.

Ví dụ 2: Một tài khoản gửi tiết kiệm ngân hàng với số tiền ban đầu là 200 triệu đồng, được hưởng lãi suất liên tục là 5% mỗi năm. Biết rằng chủ tài khoản không rút bất cứ lượng tiền nào khỏi tài khoản của mình trong suốt thời gian gửi tiền cho tới khi tất toán. Vậy số dư tài khoản sau thời gian là 10 năm là bao nhiêu?

Bước 1: Nghiên cứu tình huống thực tế:

Do tài khoản được hưởng lãi suất liên tục 5% mỗi năm mà không rút bất cứ một lượng tiền nào khỏi tài khoản cho tới khi tất toán nên ta có:

Tốc độ tăng của số dư tài khoản mỗi năm = 5%. Số dư hiện tại.

Bước 2: Mô tả tình huống thực tế về dạng toán học:

Gọi B là số dư tài khoản tại thời điểm t (tính bằng năm). Khi đó, tốc độ thay đổi của số dư theo thời gian là: $\frac{dB}{dt}$

Dựa vào tình huống thực tế ta đưa về mô hình toán học dạng phương trình vi phân: $\frac{dB}{dt} = 0,05B$

Bước 3: Giải phương trình vi phân trên bằng cách đưa về phương trình vi phân có biến số phân ly:

$$\frac{dB}{dt} = 0,05B \Leftrightarrow \frac{dB}{B} = 0,05.dt \Rightarrow \int \frac{dB}{B} = \int 0,05.dt \Leftrightarrow \ln|B| - \ln|C| = 0,05.t$$
$$\Leftrightarrow B = C.e^{0,05.t}$$

Tại thời điểm ban đầu ứng với $t = 0$ thì $B = 200$ thì ta có: $200 = C.e^{0.t} \Leftrightarrow C = 200$

Vậy mô hình mô tả tốc độ tăng lên của số dư tài khoản là: $B = 200.e^{0,05.t}$

Bước 4: Sau 10 năm, $t = 10$ thì

$B = 200.e^{0,05.10} \approx 329,27$ (triệu đồng)

Như vậy sau 10 năm thì số dư trong tài khoản tiết kiệm trên sẽ là 329,74 triệu đồng.

Ví dụ 3: Morphine được truyền cho một bệnh nhân ung thư qua đường tĩnh mạch ở tốc độ 2,5mg mỗi giờ. Khoảng 34,7% lượng Morphine truyền vào bị chuyển hóa và đào thải khỏi cơ thể mỗi giờ. Hãy ước tính lượng Morphine trong cơ thể bệnh nhân sau 5 giờ.

Bước 1: Nghiên cứu tình huống thực tế:

Tốc độ thay đổi của lượng Morphine trong cơ thể bệnh nhân = Tỷ lệ truyền vào – tỷ lệ đào thải.

Ta có: Tốc độ đào thải = 34,7%. Lượng Morphin truyền vào.

Tốc độ truyền vào = 2,5 (mg/giờ).

Bước 2: Mô tả tình huống thực tế về dạng toán học:

Gọi M là lượng Morphine (mg) trong cơ thể bệnh nhân theo thời gian t (tính bằng giờ). Khi đó, tốc độ thay đổi của lượng Morphine theo thời gian là: $\frac{dM}{dt}$.

Dựa vào tình huống thực tế ta đưa về mô hình toán học dạng phương trình vi phân:

$\frac{dM}{dt} = 2,5 - 0,37M$

Bước 3: Giải phương trình vi phân trên bằng cách đưa về phương trình vi phân có biến số phân ly:

$$\frac{dM}{dt} = 2,5 - 0,37M \Leftrightarrow \frac{dM}{2,5 - 0,347M} = dt \Rightarrow \int \frac{dM}{2,5 - 0,347M} = \int dt$$
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{0,347}\int \frac{dM}{2,5 - 0,347M} = \int dt \Leftrightarrow \ln|2,5 - 0,347M| - \ln|C| = -0,347t$$
$$\Leftrightarrow M = C.e^{-0,347t} + 7,205.$$

Tại thời điểm ban đầu ứng với $t = 0$ thì $M = 0$ thì ta có: $0 = C + 7,205 \Leftrightarrow C = -7,205.$

Vậy mô hình mô tả tốc độ thay đổi của lượng Morphine trong cơ thể bệnh nhân là:

$M = -7,205.e^{-0,347.t} + 7,205.$

Bước 4: Sau 5 giờ, $t = 5$ thì

$M = -7,205.e^{-0,347.5} + 7.205 \approx 5,934$ (mg)

Như vậy sau 5 giờ truyền Morphine thì lượng Morphine trong cơ thể bệnh nhân là 5,934 mg.

3. Kết luận

Mô hình bài toán dự báo là một trong số rất nhiều mô hình toán học được sử dụng trong giảng dạy môn toán, mô hình bài toán dự báo không chỉ giúp sinh viên giải quyết những tình huống thực tế dựa vào kiến thức toán học mà còn giúp sinh viên hướng tới việc tìm ra câu trả lời mà con người nói chung luôn muốn hướng tới, đó là: "dự báo tương lai". Việc xây dựng mô hình bài toán dự báo để giải quyết các tình huống thực tế mà trong đó có sử dụng phương trình vi phân và cách giải phương trình vi phân sẽ tạo động lực và hứng thú cho sinh viên khi học môn Toán cao cấp ở trường Đại học.

Tài liệu tham khảo

[1]. Swetz, F., Hartzler, J. S. (Eds). (1991), "Mô hình toán học trong chương trình trung học cơ sở". *Reston, VA: Hội giáo viên toán học quốc gia.*

[2]. Edwards, D., Hamson, M. J. (2001), Hướng dẫn mô hình hóa toán học, *Ấn phẩm thứ hai*, *Hướng dẫn toán học London Palgrave.*

[3]. Lê Thị Hoài Châu (2014), "*Mô hình hóa trong dạy học khái niệm đạo hàm",* Tạp chí Khoa học Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, (65), 8-15.

[4]. Bộ môn Toán Lý, Trường Đại học Nông Lâm Thái Nguyên (2018), *Bài giảng Toán cao cấp,* Tài liệu lưu hành nội bộ.