

# TÍCH HỢP GIÁO DỤC TOÁN THỰC VÀ MÔ HÌNH HÓA TOÁN HỌC DƯỚI SỰ HỖ TRỢ CỦA GEOGEBRA TRONG DẠY HỌC GIẢI TOÁN ỨNG DỤNG TÍCH PHẦN

INTEGRATING REAL MATHEMATICS EDUCATION AND MATHEMATICAL MODELING WITH THE SUPPORT OF GEOGEBRA IN TEACHING APPLIED MATHEMATICS PROBLEM SOLVING: INTEGRATION

Diệp Hoàng Ân

Trường Đại học An Giang

Received: 02/6/2026; Accepted: 12/6/2026; Published: 22/6/2026

**Tóm tắt:** Bài báo trình bày một hướng tiếp cận dạy học hiện đại thông qua việc tích hợp Giáo dục toán thực và Mô hình hóa toán học dưới sự hỗ trợ của GeoGebra trong dạy học giải các bài toán ứng dụng tích phân. Trên cơ sở phân tích đặc điểm của bài toán ứng dụng tích phân trong chương trình phổ thông, tác giả đề xuất quy trình dạy học giải toán ứng dụng tích phân gồm các bước: tổ chức tình huống thực tiễn, xây dựng mô hình, toán học hóa và vận dụng tích phân, giải toán và kiểm chứng, diễn giải và khái quát hóa. Việc sử dụng GeoGebra giúp học sinh trực quan hóa đồ thị, miền tích phân và các quá trình biến thiên, từ đó hiểu sâu bản chất “tích lũy” của tích phân. Kết quả cho thấy cách tiếp cận này góp phần phát triển năng lực mô hình hóa, tư duy toán học và khả năng vận dụng kiến thức vào thực tiễn, đồng thời nâng cao hứng thú học tập của học sinh trong quá trình học chủ đề tích phân.

**Từ khóa:** mô hình hóa toán học, Giáo dục toán thực, RME, MM, Geogebra.

**Abstract:** This paper presents a modern teaching approach by integrating Real Math Education and Mathematical Modeling with the support of GeoGebra in teaching the solution of applied integral problems. Based on an analysis of the characteristics of applied integral problems in the high school curriculum, the author proposes a teaching process for solving applied integral problems consisting of the following steps: organizing real-world situations, building models, mathematizing and applying integrals, solving and verifying the problem, interpreting and generalizing. The use of GeoGebra helps students visualize graphs, integral domains, and variation processes, thereby deeply understanding the “accumulation” nature of integrals. The results show that this approach contributes to the development of modeling skills, mathematical thinking, and the ability to apply knowledge to practice, while also enhancing students’ interest in learning the topic of integrals.

**Keywords:** Mathematical modeling, Real Math Education, RME, MM, GeoGebra

## 1. Giới thiệu

Trong những thập niên gần đây, Mô hình hóa toán học (Mathematical Modelling - MM) và Giáo dục toán thực (Realistic Mathematics Education – RME) đã trở thành hai hướng tiếp cận quan trọng trong đổi mới dạy học toán ở phổ thông. MM nhấn mạnh việc xuất phát từ các vấn đề thực tiễn, xây dựng mô hình toán học và diễn giải kết quả trong ngữ cảnh ban đầu nhằm phát triển năng lực giải quyết vấn đề và tư duy ứng dụng. Trong khi đó, RME chú trọng tổ chức dạy học dựa trên các tình huống thực tiễn, khuyến khích học sinh (HS) “tái phát minh” tri thức thông qua các mô hình trung gian và quá trình toán học hóa. Các nghiên cứu cho thấy việc sử dụng công cụ số, đặc biệt là GeoGebra, có thể hỗ trợ hiệu quả quá trình khảo sát, trực quan hóa và kiểm chứng trong hoạt động mô hình hóa, đồng thời góp phần nâng cao năng lực toán học, khả năng tự học và hứng thú học tập của HS khi kết hợp với RME.

Ở góc độ tích hợp, một số nghiên cứu đã kết hợp RME với GeoGebra và các lý thuyết thiết kế dạy học

để xây dựng quy trình dạy học cho các nội dung cụ thể, qua đó góp phần phát triển khả năng liên kết toán học và giải quyết vấn đề của HS. Tuy nhiên, các nghiên cứu này chưa làm rõ vai trò của MM như thành phần trung tâm trong dạy học các bài toán ứng dụng giải tích. Một số nghiên cứu đã vận dụng RME và MM trong dạy học đạo hàm nhằm giúp HS hiểu các quá trình biến thiên trong thực tiễn. Ngoài ra, Nguyễn Phú Lộc cho rằng việc khai thác GeoGebra như một công cụ hỗ trợ tư duy và giải quyết vấn đề trong dạy học toán vẫn còn hạn chế. Do đó, bài báo này đề xuất một quy trình dạy học tích hợp MM và RME dưới sự hỗ trợ của GeoGebra trong dạy học giải các bài toán ứng dụng tích phân. Nghiên cứu hướng đến việc làm rõ vai trò của từng thành phần trong việc tổ chức hoạt động học tập và phát triển năng lực toán học cho HS phổ thông.

## 2. Phương pháp.

Nghiên cứu này sử dụng phương pháp nghiên cứu lý luận kết hợp với nghiên cứu thiết kế nhằm xây dựng quy trình dạy học giải toán ứng dụng tích phân

theo hướng tích hợp MM và RME, với sự hỗ trợ của GeoGebra. Trên cơ sở phân tích các quan điểm của Hans Freudenthal về RME và các nghiên cứu về MM của Werner Blum và c.s, nghiên cứu tiến hành xây dựng khung lý thuyết cho việc tổ chức dạy học tích phân gắn với thực tiễn. Quy trình dạy học được đề xuất thông qua các bước thiết kế sư phạm, bao gồm: lựa chọn tình huống thực tiễn, tổ chức hoạt động mô hình hóa, hỗ trợ toán học hóa và khai thác công cụ GeoGebra để trực quan hóa và kiểm chứng mô hình. Tình huống dạy học minh họa được xây dựng và phân tích theo hướng phân tích tiên nghiệm nhằm dự đoán quá trình học tập của HS, những khó khăn có thể gặp phải và vai trò hỗ trợ của giáo viên (GV). Do điều kiện nghiên cứu, đề tài chưa tiến hành thực nghiệm sư phạm mà tập trung vào việc đề xuất và phân tích tính khả thi về mặt lý luận của quy trình dạy học.

### 3. Kết quả

#### 3.1. Cơ sở lý thuyết

Tích phân là công cụ trung tâm của giải tích, giúp giải quyết các bài toán về biến thiên và tích lũy như tính diện tích, thể tích hay các đại lượng vật lý. Vì vậy, dạy học tích phân ở phổ thông không nên chỉ tập trung vào kỹ thuật tính toán mà cần hướng đến việc sử dụng nó để mô hình hóa và giải quyết các vấn đề thực tiễn. Trong khi đó, RME cung cấp một cách tiếp cận dạy học cho phép HS “tái phát minh” tri thức toán học thông qua các tình huống gắn với thực tiễn. RME nhấn mạnh quá trình toán học hóa theo chiều ngang và dọc, giúp HS từng bước khám phá, khái quát hóa và chuẩn hóa tri thức từ trải nghiệm của bản thân. Quy trình này thường được triển khai qua các bước: khai thác tình huống thực tiễn, xây dựng mô hình, khái quát hóa, chuẩn hóa kiến thức và vận dụng vào tình huống mới.

Quy trình toán học hóa không thể thiếu năng lực MM, một năng lực cốt lõi của giáo dục toán học hiện đại. Theo Blum và cộng sự, MM là quá trình chuyển đổi một vấn đề thực tiễn thành bài toán toán học, giải quyết bài toán và diễn giải kết quả trở lại bối cảnh ban đầu. Trong dạy học tích phân, HS cần xác định các đại lượng, thiết lập công thức tính toán và giải thích ý nghĩa của kết quả trong ngữ cảnh thực tế. Vì vậy, phát triển năng lực MM không chỉ giúp HS hiểu sâu bản chất của tích phân mà còn nâng cao khả năng vận dụng toán học vào thực tiễn.

Bên cạnh đó, công nghệ và các phần mềm toán học động như GeoGebra, Cabri hay Desmos ngày càng giữ vai trò quan trọng trong dạy học toán. Các công cụ này hỗ trợ trực quan hóa các khái niệm trừu tượng, giúp HS quan sát mối liên hệ giữa biểu thức, đồ thị và các đại lượng biến thiên. Trong dạy học tích phân, phần mềm động GeoGebra hỗ trợ minh họa diện

tích dưới đường cong, mô phỏng khối tròn xoay, kiểm chứng kết quả và phát triển trực giác toán học.

Trên cơ sở đó, nghiên cứu này xây dựng quy trình dạy học giải toán ứng dụng tích phân theo hướng tích hợp RME và MM dưới sự hỗ trợ của GeoGebra. Trong đó, RME định hướng tổ chức các tình huống học tập gắn với thực tiễn; MM cung cấp tiến trình giải quyết vấn đề thông qua toán học hóa và diễn giải kết quả; còn GeoGebra đóng vai trò hỗ trợ trực quan hóa, khám phá và tương tác. Sự tích hợp này góp phần giúp HS không chỉ thực hiện các thao tác tính toán mà còn hiểu được ý nghĩa của tích phân trong mối liên hệ với thực tiễn.

#### 3.2. Quy trình

Trên cơ sở khung lý thuyết tích hợp giữa RME và MM với sự hỗ trợ của công nghệ, nghiên cứu này đề xuất quy trình dạy học gồm 5 bước như sau:

##### Bước 1. Tổ chức tình huống thực tiễn

GV tổ chức một tình huống xuất phát từ thực tiễn hoặc có thể hình dung được, trong đó nảy sinh nhu cầu sử dụng tích phân để giải quyết vấn đề. Tình huống cần đảm bảo tính gần gũi, có ý nghĩa đối với HS và chứa đựng yếu tố “vấn đề mở” nhằm kích thích tư duy. Tình huống này là các bài toán “thực tế” hoặc “bán thực tế” cần ứng dụng tích phân. Trong bước này, RME đóng vai trò định hướng cho việc lựa chọn và tổ chức tình huống gắn với thực tiễn, MM đóng vai trò gợi mở nhu cầu chuyển tình huống thực sang mô hình toán và GeoGebra dùng để minh họa sơ bộ tình huống.

##### Bước 2. Phân tích và xây dựng mô hình ban đầu

HS phân tích tình huống, xác định các đại lượng liên quan, thiết lập các giả thiết và xây dựng mô hình toán học ban đầu. Ở đây, RME đóng vai trò diễn đạt tình huống bằng ngôn ngữ toán học không hình thức, MM thực hiện các bước đơn giản hóa, lựa chọn biến và thiết lập các mối quan hệ và GeoGebra biểu diễn dữ liệu, phác thảo đồ thị, kiểm tra giả định.

##### Bước 3. Toán học hóa và thiết lập công thức

Từ mô hình ban đầu, HS tiến hành toán học hóa, thiết lập biểu thức tích phân phù hợp để mô tả đại lượng cần tính (diện tích, thể tích, quãng đường,...). Trong bước này, RME hỗ trợ chuyển từ mô hình trực quan sang biểu thức toán học chính thức. MM giúp chuyển từ mô hình thực tiễn sang mô hình toán học hoàn chỉnh. Trong khi GeoGebra giúp trực quan hóa tích phân, mô phỏng quá trình tích lũy.

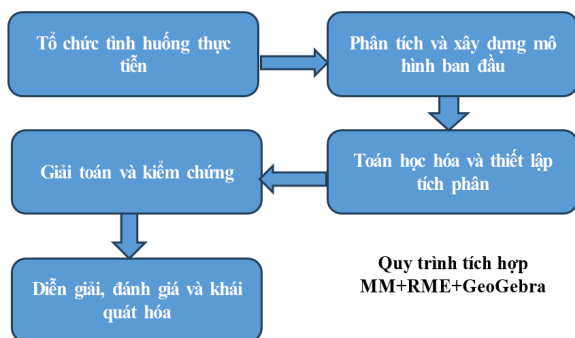
##### Bước 4. Giải toán và kiểm chứng

HS thực hiện tính toán tích phân và sử dụng công nghệ để kiểm tra kết quả, so sánh với biểu diễn trực quan hoặc mô phỏng. Ở bước này, RME đóng vai trò khuyến khích HS giải thích kết quả trong ngữ cảnh bài toán, MM đảm bảo tính hợp lý của kết quả trong mô hình. Trong khi GeoGebra hỗ trợ tính toán, kiểm tra và

trực quan hóa kết quả.

Bước 5. Diễn giải, đánh giá và khái quát hóa

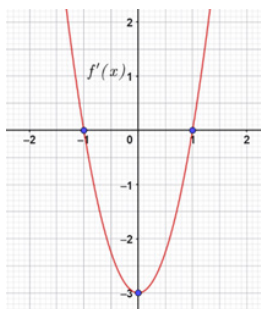
HS diễn giải kết quả thu được trong bối cảnh ban đầu, đánh giá tính hợp lý của mô hình và khái quát hóa kiến thức toán học. RME có vai trò nhấn mạnh quá trình “tái phát minh” và liên hệ với thực tiễn. MM đóng vai trò thực hiện bước diễn giải và kiểm tra mô hình. GeoGebra hỗ trợ minh họa lại kết quả và so sánh các phương án.



Hình 1 - Sơ đồ quy trình dạy học giải toán ứng dụng tích phân MM+RME+GeoGebra

### 3.3. Minh họa quy trình

Tình huống: Cho hàm số  $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ( $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ) có đồ thị (C). Biết rằng đồ thị (C) tiếp xúc với đường thẳng  $y = 4$  tại điểm có hoành độ âm và đồ thị hàm số  $y = f'(x)$  cho bởi hình vẽ dưới đây. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng  $H$  giới hạn bởi đồ thị (C) và trục hoành khi quay xung quanh trục  $Ox$ .



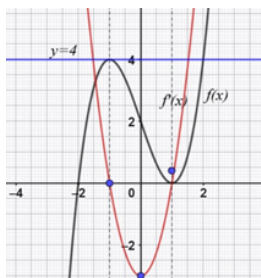
Hình 2 – Đồ thị của đạo hàm  $f'(x)$

Bước 1. Tổ chức tình huống thực tiễn

GV đặt vấn đề về việc tính thể tích của một vật thể tròn xoay, liên hệ với các đối tượng thực tế như bình chứa, lọ hoa. Thông qua hình vẽ của đồ thị và miền phẳng  $H$ , HS nhận diện đây là bài toán liên quan đến việc tính thể tích bằng tích phân.

Bình luận: Ở bước này, định hướng RME được thể hiện thông qua việc tạo ra một tình huống có ý nghĩa, kích thích nhu cầu tìm kiếm công cụ toán học phù hợp. HS bước đầu nhận ra vai trò của tích phân trong việc giải quyết bài toán.

Bước 2. Phân tích và



Hình 3 – Đồ thị hàm số và đạo hàm và tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm cực trị

xây dựng mô hình ban đầu

Từ đồ thị của  $f'(x)$ , HS nhận xét đây là một parabol có đỉnh tại  $(0, -3)$  và cắt trục hoành tại  $x = -1$  và  $x = 1$ . Từ đó suy ra:  $f'(x) = 3x^2 - 3$

Bình luận: “Tính thực” ở đây thể hiện mô hình quen thuộc mô tả đồ thị của đạo hàm (một parabol) đó là đồ thị hàm bậc 2.

Lấy nguyên hàm, HS thu được:

$$f(x) = x^3 - 3x + d$$

Sử dụng điều kiện tiếp xúc với đường thẳng  $y = 4$  tại điểm có hoành độ âm, HS xác định:

$$f(-1) = 4 \Rightarrow d = 2$$

$$\text{Do đó: } f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Bình luận: Việc tìm là quá trình mô hình hóa xảy ra khi HS chuyển đổi từ hình ảnh “thực tế” – “đường thẳng tiếp xúc với đường cong tại điểm trên đường cong” sang mô hình giải tích “hệ số góc của đường thẳng chính là đạo hàm của hàm số tại hoành độ tiếp điểm”.

Bước 3. Toán học hóa và thiết lập công thức tích phân

HS xác định miền  $H$  là miền giới hạn bởi đồ thị  $y = f(x)$  và trục hoành. Giải phương trình:

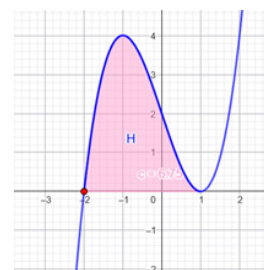
$$x^3 - 3x + 2 = 0$$

thu được các nghiệm  $x = -2$  và  $x = 1$ .

Bình luận: Mô hình tổng quát ở đây không phù hợp vì không có sẵn hai đường thẳng  $x = a$  và  $x = b$ . Nhờ GeoGebra, GV cho HS thấy được hình phẳng thực tế của bài toán. Từ đó gợi ý HS tìm thêm hai đường thẳng  $x = a$ ;  $x = b$  bằng cách giải phương trình.

Do đã được học về công thức tính thể tích khối tròn xoay quanh trục  $Ox$ , HS vận dụng:

$$V = \pi \int_{-2}^1 [f(x)]^2 dx$$



Hình 4 – Hình  $H$  giới hạn bởi đồ thị hàm số và trục hoành

Bình luận: Sau khi tìm thêm hai đường  $x = a$ ;  $x = b$ , bài toán đã trở về đúng ứng dụng công thức “tính thể tích khối tròn xoay”. Quá trình toán học hóa ở đây không nhằm hình thành kiến thức mới mà tập trung vào việc lựa chọn và vận dụng công cụ tích phân một cách phù hợp trong việc giải quyết bài toán.

Bước 4. Giải toán và kiểm chứng

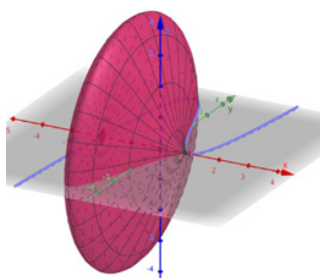
HS thực hiện tính toán:

$$V = \pi \int_{-2}^1 (x^3 - 3x + 2)^2 dx$$

Sau khi khai triển và tính tích phân, thu được:

$$V = \frac{729\pi}{35} \approx 65,4 \text{ (đvtt)}$$

Bình luận: GV có thể sử dụng GeoGebra để minh họa hình ảnh của khối tròn xoay miền tích phân và mô phỏng khối tròn xoay, từ đó giúp HS kiểm chứng kết quả và củng cố trực giác hình học.



Hình 5 - Khối tròn xoay khi quay hình  $H$  quanh trục hoành

Bước 5. Diễn giải và khái quát hóa

HS diễn giải kết quả trong ngữ cảnh bài toán, nhận thấy rằng thể tích của khối vật thể tròn xoay được xác định thông qua tích phân của bình phương hàm số trên một khoảng xác định. Khối vật thể có được bằng cách quay hình quanh trục hoành.

Bình luận: Sự minh họa của GeoGebra cho thấy hình dạng của khối vật thể đó. Tính “thực” ở đây là hướng đường thẳng  $x = a$ ,  $x = b$  không có ngay trong đề mà phải tính toán được qua phương trình hoành độ giao điểm. Hình minh họa giúp HS thấy và “tái phát minh” hai cận tích phân.

Quá trình này thể hiện đầy đủ chu trình mô hình hóa: từ hiểu tình huống, xây dựng các mô hình con, mô hình chính, giải toán đến diễn giải kết quả, đồng thời phù hợp với tinh thần “tái phát minh” của RME.

#### 4. Thảo luận

Kết quả cho thấy quy trình dạy học tích hợp MM và RME dưới sự hỗ trợ của GeoGebra có tiềm năng trong việc tổ chức dạy học giải các bài toán ứng dụng tích phân theo hướng phát triển năng lực cho HS. Quy trình này góp phần chuyển trọng tâm từ kỹ thuật tính toán sang hoạt động mô hình hóa và giải quyết vấn đề thực tiễn, trong đó HS phải xây dựng mô hình toán học, lựa chọn công cụ phù hợp và diễn giải kết quả trong ngữ cảnh cụ thể.

Qua tình huống minh họa, có thể thấy mức độ mô hình hóa của HS thay đổi tùy theo đặc điểm của bài toán. Với các bài toán “nửa thực tiễn”, HS chủ yếu vận dụng kiến thức đã học để thiết lập và tính toán tích phân; trong khi ở các tình huống gần với thực tiễn hơn, HS cần tham gia nhiều hơn vào quá trình đơn giản hóa, thiết lập mô hình và diễn giải kết quả. Điều này cho thấy vai trò quan trọng của bối cảnh thực tiễn trong việc thúc đẩy hoạt động toán học hóa và phát triển tư duy mô hình hóa.

Bên cạnh đó, GeoGebra thể hiện vai trò hỗ trợ hiệu quả trong việc trực quan hóa và kiểm chứng các đối tượng toán học. Việc sử dụng phần mềm giúp HS hình dung miền tích phân, quan sát sự thay đổi của đồ thị và mô phỏng khối tròn xoay, từ đó tăng cường sự liên kết giữa các biểu diễn hình học, đại số và ý nghĩa thực tiễn của tích phân. Tuy nhiên, công nghệ chỉ đóng vai trò hỗ trợ và không thay thế cho quá trình tư duy toán học của HS.

Tuy nhiên, tình huống dạy học mới được phân tích trên phương diện lý thuyết mà chưa được kiểm chứng thông qua thực nghiệm sư phạm, do đó chưa thể đánh giá đầy đủ hiệu quả của quy trình trong thực tế lớp học. Ngoài ra, việc triển khai các tình huống mô hình hóa đòi hỏi GV có năng lực thiết kế hoạt động học tập và sử dụng công nghệ phù hợp, điều này có thể tạo ra những khó khăn nhất định trong bối cảnh dạy học ở trường phổ thông.

#### 5. Kết luận

Bài báo đã đề xuất quy trình dạy học giải các bài toán ứng dụng tích phân theo hướng tích hợp giữa MM và RME dưới sự hỗ trợ của GeoGebra. Quy trình gồm năm bước: tổ chức tình huống thực tiễn, xây dựng mô hình, toán học hóa và vận dụng tích phân, giải toán và kiểm chứng, diễn giải và khái quát hóa. Trên cơ sở đó, nghiên cứu đã xây dựng và phân tích các tình huống dạy học minh họa nhằm làm rõ khả năng vận dụng quy trình trong dạy học tích phân ở phổ thông.

Kết quả nghiên cứu cho thấy cách tiếp cận này có tiềm năng góp phần phát triển năng lực mô hình hóa, tăng cường khả năng liên hệ giữa toán học và thực tiễn, đồng thời hỗ trợ HS hiểu sâu hơn bản chất của tích phân. Việc sử dụng GeoGebra cũng góp phần nâng cao tính trực quan và hỗ trợ quá trình khám phá toán học của HS. Tuy nhiên, nghiên cứu hiện mới dừng ở mức đề xuất và phân tích lý thuyết. Vì vậy, các nghiên cứu tiếp theo cần triển khai thực nghiệm sư phạm để đánh giá hiệu quả của quy trình trong các bối cảnh dạy học cụ thể và tiếp tục hoàn thiện mô hình đề xuất.

#### Tài liệu tham khảo.

- [1] Anh L. T. và Trang N. H., “Một số biện pháp dạy học hình học theo lý thuyết realistic mathematics education ở trường trung học”, *J. Sci. Educ. Sci.*, tr 129–139, thg. 11 2025, doi: 10.18173/2354-1075.2025-0116.
- [2] G. Greefrath, C. Hertleif, và H.-S. Siller, “Mathematical modelling with digital tools—a quantitative study on mathematising with dynamic geometry software”, *ZDM*, tập 50, số 1, tr 233–244, thg. 4 2018, doi: 10.1007/s11858-018-0924-6.
- [3] N. I. Septianisha, S. Hamdi, và W. Setyaningrum, “Realistic mathematics education assisted by geogebra: Effective in terms of mathematical literacy and self-directed learning?”, *J. Math Educ. Nusant. Wahana Publ. Karya Tulis Ilm. Bid. Pendidik. Mat.*, tập 11, số 2, tr 220–231, thg. 11 2025, doi: 10.29407/jmen.v11i2.26341.
- [4] Y. Saraswati, W. Wiryanto, và R. Ekawati, “Integration of Realistic Mathematics Education (RME) and GeoGebra in Elementary School Geometry Learning: A Systematic Literature Review”, *J. Pendidik. Indones. Gemilang*, tập 6, tr 1–20, thg. 2 2026, doi: 10.53889/jpgip.v6i1.849.