

# Nghiên cứu nội lực và chuyển vị của dầm bằng phương pháp sai phân hữu hạn

Study of internal forces and displacements of beams by finite difference method

> PGS.TS ĐOÀN VĂN DUẤN

Khoa Công trình, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam

Email: duandv.ct@vimaru.edu.vn

## TÓM TẮT

Trong cơ học kết cấu cổ điển mục đích chính là đi tìm các nghiệm liên tục, mà điều đó chỉ có thể thực hiện đối với một số rất hạn chế các bài toán. Do vậy, với mỗi bài toán lại vận dụng một phương pháp riêng để tìm lời giải cho chính nó. Khác với các phương pháp của cơ học kết cấu cổ điển, sự vận dụng một số loại phương pháp số theo một sơ đồ tương đối thống nhất dẫn đến các chương trình tính bằng máy tính điện tử với tính chất vạn năng [4].

Phương pháp sai phân hữu hạn là một trong hai phương pháp số cơ bản cùng với phương pháp phần tử hữu hạn mà ngày nay đang dùng phổ biến nhất không cần bàn cãi đối với các bài toán kỹ thuật nói chung và bài toán kết cấu công trình nói riêng.

Phương pháp sai phân hữu hạn giải hầu hết các bài toán cơ học kết cấu đều đưa về giải phương trình vi phân hoặc hệ phương trình vi phân. Nghiệm chính xác của các phương trình này có thể xác định được cho một số trường hợp riêng đơn giản với các đặc trưng vật lý và các điều kiện biên chọn trước của kết cấu. Thực tế ứng dụng rất đa dạng, mà nghiệm chính xác dưới dạng tường minh của phần lớn các bài toán kết cấu không có. Khi đó các phương pháp số tạo ra khả năng phong phú để tìm lời giải. Phương pháp sai phân là một dạng cổ điển theo hướng này [4, 7].

**Từ khóa:** Sai phân hữu hạn; nội lực và chuyển vị của dầm...

## ABSTRACT

In classical structural mechanics the main goal is to find continuous solutions, which is possible only for a very limited number of problems. Therefore, for each problem a separate method is applied to find its own solution. In contrast to the methods of classical structural mechanics, the application of a number of numerical methods according to a relatively unified scheme leads to universal electronic computer programs.

The finite difference method is one of the two basic numerical methods along with the finite element method that is currently the most widely used, without question, for engineering problems in general and structural engineering problems in particular. The finite difference method solves most structural mechanics problems by solving differential equations or systems of differential equations. The exact solutions of these equations can be determined for some simple special cases with physical characteristics and pre-selected boundary conditions of the structure. In practice, applications are very diverse, and exact solutions in explicit form for most structural problems do not exist. Numerical methods then create rich possibilities for finding solutions. The difference method is a classical form in this direction.

**Keywords:** Finite difference method; internal forces and displacements of beams.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phương pháp sai phân hữu hạn là một phương pháp tính số cổ điển ra đời từ lâu, nhưng từ khi có máy tính điện tử thì phương pháp này mới chiếm một vị trí quan trọng và được áp dụng rộng rãi để giải các bài toán phức tạp trong kỹ thuật nói chung và lĩnh vực kết cấu nói riêng.

Nội dung của phương pháp sai phân hữu hạn là thay thế một hàm xác định trong một miền liên tục bằng một hàm lưới gồm một tập hợp rời rạc hữu hạn các điểm, ở đó đạo hàm được thay thế bằng các tỷ sai phân. Điều kiện biên hoặc điều kiện ban đầu cũng được xấp xỉ sai phân, và nhờ đó bài toán biên của phương trình vi phân được thay thế bởi một hệ phương trình đại số tuyến tính. Trong bài báo này, tác giả giới thiệu những nội dung cơ bản của

phương pháp sai phân hữu hạn và cách vận dụng nó để giải các bài toán thông qua các bài toán dầm cụ thể.

## 2. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP SAI PHÂN HỮU HẠN TÍNH TOÁN DẦM CHỊU UỐN CÓ CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN KHÁC NHAU

### 2.1. Phương trình vi phân cân bằng của dầm

Phương trình vi phân đường độ võng của dầm chịu uốn chịu tải trọng phân bố đều, khi không xét biến dạng trượt ngang có dạng sau:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} = q \quad \text{hay} \quad \frac{d^2 M}{dx^2} = q \quad (1)$$

Mômen uốn của dầm (có chiều cao tiết diện không đổi) xác định theo (2).

$$M = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2)$$

Lực cắt của dầm (có chiều cao tiết diện không đổi) xác định theo (3).

$$Q = \frac{dM}{dx} = -EJ \frac{d^3 y}{dx^3} \quad (3)$$

Trong đó:

- M là mô men uốn, có giá trị dương nếu dầm căng thớ dưới
- q là cường độ tải trọng phân bố, có dấu dương nếu hướng từ dưới lên
- E là mô đun đàn hồi của vật liệu
- J là mômen quán tính của tiết diện ngang của dầm

**2.2. Các bước xây dựng và giải bài toán dầm theo phương pháp sai phân hữu hạn**

**Bước 1:** Rời rạc hóa dầm bằng cách chia dầm thành n phần tử, trong đó có (n-4) phần tử thực, 4 phần tử ảo, dầm sẽ có i=n+1 nút, đánh số nút, đánh số ẩn chuyển vị.

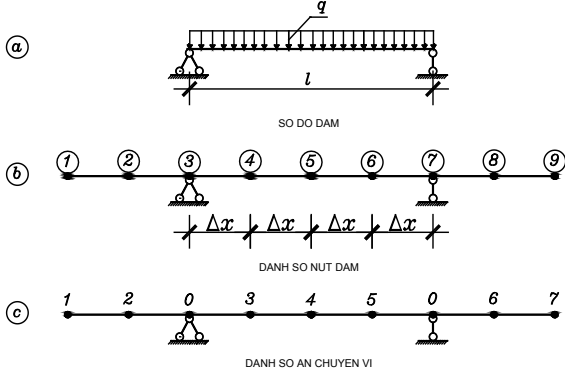
**Bước 2:** Sai phân hóa phương trình vi phân cân bằng của dầm tại các điểm nút (i); Sai phân hóa các điều kiện ràng buộc, bao gồm các điều kiện biên và các điều kiện ban đầu (nếu có). Nhận được hệ phương trình đại số tuyến tính của bài toán.

**Bước 3:** Tìm nghiệm của bài toán bằng cách giải hệ phương trình đại số vừa nhận được ở bước 2. Kết quả nhận được là giá trị chuyển vị tại các điểm nút i. Từ chuyển vị tính được mômen và lực cắt tại các điểm i.

**3. CÁC VÍ DỤ TÍNH TOÁN**

**Ví dụ 1: Dầm hai đầu khớp**

Cho dầm chịu lực như hình 1a, dầm có độ cứng uốn EJ=const. Hãy xác định chuyển vị và nội lực trong dầm.



Hình 1. Dầm đơn giản

Lời giải:

Rời rạc hóa dầm thành npt phần tử như hình 11a, ở đây npt=8, trong đó có 4 phần tử thực và 4 phần tử ảo (phần tử ảo luôn cố định là 4, phần tử thực có thể thay đổi tùy ý. Bài toán có i=9 nút, trong đó có 4 nút ảo (1, 2, 6, 7) và 5 nút thực (3, 4, 5, 6, 7).

Đánh số ẩn chuyển vị nw1 là các chuyển vị thẳng tại các nút, ở đây chỉ có 7 nút có chuyển vị (1, 2, 4, 5, 6, 8, 9), hai nút (3 và 7) có chuyển vị nw1=0. Như vậy véc tơ chuyển vị nw1 có dạng nw1[1x9], như sau:

$$nw1 = [1 \ 2 \ 0 \ 3 \ 4 \ 5 \ 0 \ 6 \ 7]$$

Tiến hành sai phân hóa phương trình vi phân cân bằng của dầm theo (1) tại các điểm chia trên dầm thực, 5 điểm. Phương trình sai phân của phương trình (1) có dạng sau:

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{\Delta x^4}{EJ} q_i \quad (a)$$

Trong đó:

$\Delta x$  là khoảng cách giữa các điểm i,  $q_i$  là tải trọng tại i

Đoạn dầm thực có chiều dài là l được chia thành 4 đoạn bằng nhau  $\Delta x = l/4$

Viết phương trình sai phân theo (a) tại 5 điểm 3, 4, 5, 6, 7 trên dầm thực ta nhận được 5 phương trình sai phân cân bằng theo (b):

$$\left. \begin{aligned} y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 &= 0 \\ y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 &= \frac{\Delta x^4}{EJ} q_4 \\ y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7 &= \frac{\Delta x^4}{EJ} q_5 \\ y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8 &= \frac{\Delta x^4}{EJ} q_6 \\ y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

Sai phân hóa các điều kiện ràng buộc, ở đây là các điều kiện biên, mô men uốn và chuyển vị tại hai đầu dầm (điểm 3 và điểm 7 bằng không).

Ghép (b) và (c) nhận được hệ (d) gồm 9 phương trình, 9 ẩn số, trong đó đã biết chuyển vị tại hai gối tựa bằng không ( $y_3=0; y_7=0$ ).

$$\left. \begin{aligned} y_1 - 4y_2 + 6y_3 - 4y_4 + y_5 &= 0 \\ y_2 - 4y_3 + 6y_4 - 4y_5 + y_6 &= \frac{\Delta x^4}{EJ} q_4 \\ y_3 - 4y_4 + 6y_5 - 4y_6 + y_7 &= \frac{\Delta x^4}{EJ} q_5 \\ y_4 - 4y_5 + 6y_6 - 4y_7 + y_8 &= \frac{\Delta x^4}{EJ} q_6 \\ y_5 - 4y_6 + 6y_7 - 4y_8 + y_9 &= 0 \\ y_2 - 2y_3 + y_4 &= 0 \\ y_6 - 2y_7 + y_8 &= 0 \\ y_3 &= 0 \\ y_7 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (d)$$

Trong đó:  $q_4=q_5=q_6=qdx$

Có thể biểu diễn hệ phương trình (d) dưới dạng ma trận như sau:

$$[A]X = B \quad (e)$$

Trong đó: [A] là ma trận các hệ số bên trái hệ phương trình (d) B là véc tơ tải trọng; X là véc tơ ẩn chuyển vị tại các nút

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[X] = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{Bmatrix}; [B] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

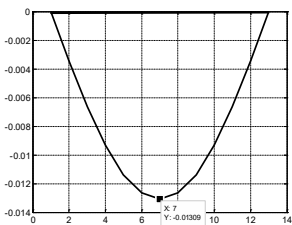
Giải hệ phương trình (e) ta nhận được các ẩn chuyển vị tại các nút

$$[X] = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.0137 \\ -0.0098 \\ 0 \\ 0.0098 \\ 0.0137 \\ 0.0098 \\ 0 \\ -0.0098 \\ -0.0137 \end{Bmatrix} \left( \frac{ql^4}{EJ} \right)$$

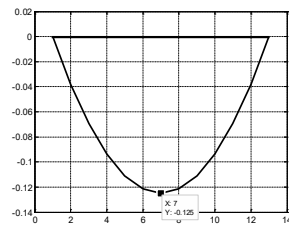
Ta nhận thấy  $y_5$  là chuyển vị giữa dầm:  $y_5 = 0.0137 \frac{ql^4}{EJ}$

Kết quả chính xác là:  $y_5 = \frac{5ql^4}{348EJ} = 0.0130 \frac{ql^4}{EJ}$

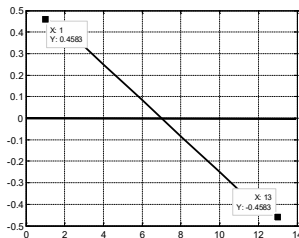
Đường độ võng của dầm như hình 2.



Hình 2. Đường độ võng



Hình 3. Biểu đồ mômen uốn M



Hình 4. Biểu đồ lực cắt Q

Nhận xét kết quả trên:

Khi chia cột và dầm thành 12 phần tử ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả chính xác theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

**Bảng 1. So sánh M, Y tại các tiết diện giữa dầm, lực cắt Q tại hai đầu dầm**

Nội lực và chuyển vị	Lời giải số theo phương pháp SPHH	Lời giải chính xác	Sai số %
M	0,1250	0,1250	0
Q	0,4583	0,5000	8,34
Y	0,0131	0,013	0,77

Ta thấy kết quả nhận được, lực cắt Q có sai số 8,34%, M trùng khớp với lời giải chính xác, độ võng y có sai số không đáng kể.

Khi chia dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả như sau:

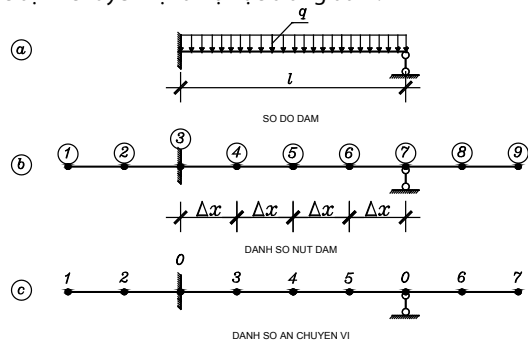
**Bảng 2. So sánh M, Y tại các tiết diện giữa dầm, lực cắt Q tại hai đầu dầm**

Nội lực và chuyển vị	Lời giải số theo phương pháp PTHH	Lời giải chính xác	Sai số %
M	0,1250	0,1250	0
Q	0,3750	0,5000	25
Y	0,0137	0,013	5,38%

Khi chỉ chia dầm thành 4 phần tử đã nhận M hoàn toàn chính xác, độ võng sai số 5,38%, lực cắt Q tại hai đầu dầm có sai số rất lớn (25%).

**Ví dụ 2: Dầm đầu ngàm - đầu khớp**

Cho dầm chịu lực như hình 5a, dầm có độ cứng uốn  $EJ=const$ . Hãy xác định chuyển vị và nội lực trong dầm.



Hình 5. Dầm đầu ngàm - đầu khớp

Lời giải:

Làm tương tự như ví dụ 1, ở đây chỉ khác về điều kiện biên ở bên trái dầm là ngàm nên góc xoay tại đó bằng không.

Viết phương trình cho các điểm chia trên dầm thực theo

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{\Delta x^4}{EJ} q_i \quad (a)$$

Trong đó:

$\Delta x$  là khoảng cách giữa các điểm  $i$ ,  $q_i$  là tải trọng tại  $i$

Đoạn dầm thực có chiều dài là  $l$  được chia thành 4 đoạn bằng nhau  $\Delta x = l/4$

Viết phương trình sai phân theo (a) tại 5 điểm 3, 4, 5, 6, 7 trên dầm thực ta nhận được 5 phương trình sai phân cân bằng được trình bày dưới dạng ma trận

$$[A]X=B \quad (b)$$

trong đó  $[A]$ ,  $X$  và  $B$  như sau:

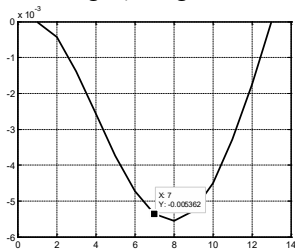
$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[X] = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{Bmatrix}; [B] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

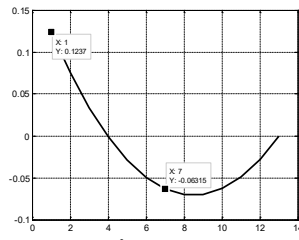
Giải hệ phương trình (b) ta nhận được các ẩn chuyển vị tại các nút

$$[X] = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0218 \\ 0.0036 \\ 0 \\ 0.0036 \\ 0.0066 \\ 0.0053 \\ 0 \\ -0.0053 \\ -0.0066 \end{Bmatrix} \left( \frac{ql^4}{EJ} \right)$$

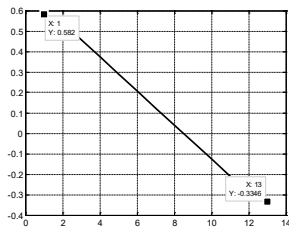
Đường độ võng của dầm như hình 6.



Hình 6. Đường độ võng



Hình 7. Biểu đồ mômen uốn M



Hình 8. Biểu đồ lực cắt Q

Nhận xét kết quả trên:

Khi chia cột và dầm thành 12 phần tử ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả chính xác theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

**Bảng 3. So sánh M, Y và Q tại các tiết diện dầm**

Nội lực và chuyển vị	Lời giải số theo phương pháp SPHH	Lời giải chính xác	Sai số %
M đầu dầm	-0,1237	-0,1250	1,04
M giữa dầm	0,0632	0,0625	1,12
Q đầu dầm	0,5820	0,6250	6,88
Q cuối dầm	-0,3346	-0,3750	10,77
Y giữa dầm	0,0054	0,0053	1,88

Ta thấy kết quả nhận được, lực cắt Q tại đầu và cuối dầm có sai số lần lượt là 6,88% và 10,77%, M và độ võng y có sai số không đáng kể.

Khi chia dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả như sau:

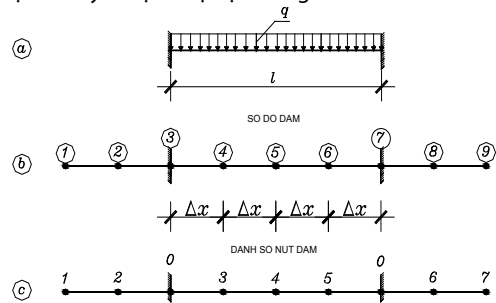
**Bảng 4. So sánh M, Y và Q tại các tiết diện dầm**

Nội lực và chuyển vị	Lời giải số theo phương pháp SPHH	Lời giải chính xác	Sai số %
M đầu dầm	-0,1136	-0,1250	9,12
M giữa dầm	0,0682	0,0625	9,12
Q đầu dầm	0,4886	0,6250	21,82
Q cuối dầm	-0,2614	-0,3750	30,29
Y giữa dầm	0,0066	0,0053	24,52

Khi chỉ chia dầm thành 4 phần tử kết quả nhận được có sai số tương đối lớn, đặc biệt là lực cắt Q tại hai đầu dầm và độ võng giữa dầm, với sai số lần lượt là 21,82%, 30,29% và 24, 52%. Như vậy, ta thấy rằng đối với trường hợp dầm siêu tĩnh, liên kết hai đầu không đối xứng kết quả hội tụ về lời giải giải tích rất chậm.

**Ví dụ 3: Dầm 2 đầu ngàm**

Cho dầm chịu lực như hình 9a, dầm có độ cứng uốn  $EJ=const$ . Hãy xác định chuyển vị và nội lực trong dầm.



**Hình 9. Dầm 2 đầu ngàm**

**Lời giải:**

Làm tương tự như ví dụ 1, ở đây chỉ khác về điều kiện biên ở cả hai đầu dầm là ngàm nên góc xoay tại hai vị trí đó bằng không.

Viết phương trình cho các điểm chia trên dầm thực theo

$$y_{i-2} - 4y_{i-1} + 6y_i - 4y_{i+1} + y_{i+2} = \frac{\Delta x^4}{EJ} q_i \quad (a)$$

Trong đó:

$\Delta x$  là khoảng cách giữa các điểm  $i$ ,  $q_i$  là tải trọng tại  $i$

Đoạn dầm thực có chiều dài là  $l$  được chia thành 4 đoạn bằng nhau  $\Delta x = l/4$

Viết phương trình sai phân theo (a) tại 5 điểm 3, 4, 5, 6, 7 trên dầm thực ta nhận được 5 phương trình sai phân cân bằng được trình bày dưới dạng ma trận

$[A]X=B$  (b)

trong đó  $[A]$ ,  $X$  và  $B$  như sau:

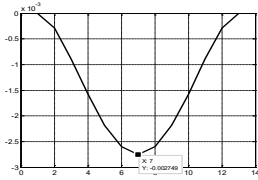
$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[X] = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{Bmatrix}; [B] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

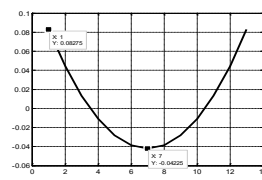
Giải hệ phương trình (b) ta nhận được các ẩn chuyển vị tại các nút

$$[X] = \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.0156 \\ 0.0024 \\ 0 \\ 0.0024 \\ 0.0039 \\ 0.0024 \\ 0 \\ 0.0024 \\ 0.0156 \end{Bmatrix} \left( \frac{ql^4}{EJ} \right)$$

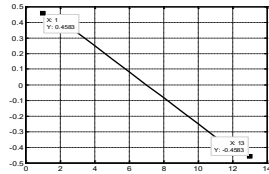
Đường độ võng của dầm như hình 10



Hình 10. Đường độ võng



Hình 11. Biểu đồ mômen uốn M



Hình 12. Biểu đồ lực cắt Q

**Nhận xét kết quả trên:**

Khi chia cột và dầm thành 12 phần tử ta nhận được kết quả như trên, so sánh với kết quả chính xác theo lời giải giải tích ta nhận được sai số theo bảng sau:

**Bảng 5. So sánh M, Y và Q tại các tiết diện dầm**

Nội lực và chuyển vị	Lời giải số theo phương pháp SPHH	Lời giải chính xác	Sai số %
M đầu dầm	-0,0828	-0,0833	0,60
M giữa dầm	0,0423	0,0417	1,12
Q đầu dầm	0,4583	0,5000	0,014
Y giữa dầm	0,0028	0,0026	7,69

Ta thấy kết quả nhận được, M và Q tại đầu và giữa dầm có sai số không đáng kể, riêng độ võng có sai số 7,69%.

**Khi chia dầm thành 4 phần tử ta nhận được kết quả như sau:**

**Bảng 6. So sánh M, Y và Q tại các tiết diện dầm**

Nội lực và chuyển vị	Lời giải số theo phương pháp SPHH	Lời giải chính xác	Sai số %
M đầu dầm	-0,0781	-0,0833	6,24
M giữa dầm	0,0469	0,0417	12,47%
Q đầu dầm	0,3750	0,5000	25
Y giữa dầm	0,0039	0,0026	50

Khi chỉ chia dầm thành 4 phần tử kết quả nhận được có sai số tương rất lớn, đặc biệt là lực cắt Q tại hai đầu dầm và độ võng giữa dầm, với sai số lần lượt là 25%, 50%, còn M giữa dầm có sai số 12,47%. Như vậy, ta thấy rằng đối với trường hợp dầm siêu tĩnh, liên kết hai đầu không đối xứng kết quả hội tụ về lời giải giải tích rất chậm.

#### 4. KẾT LUẬN

Qua kết quả nghiên cứu ở trên, tác giả rút ra một số kết luận sau:

Đã trình bày được các bước xây dựng và giải bài toán dầm có các điều kiện biên khác nhau bằng phương pháp sai phân hữu hạn.

Độ chính xác của kết quả nhận được phụ thuộc vào bài toán tĩnh định hay siêu tĩnh, liên kết hai đầu dầm là đối xứng hay bất kỳ...chẳng hạn ví dụ 1, dầm đơn giản, đây là bài toán có hai đầu liên kết đối xứng nên khi chỉ chia dầm thành 4 phần tử đã nhận được M hoàn toàn chính xác, độ võng sai số 5,38%, lực cắt Q tại hai đầu dầm có sai số rất lớn (25%). Trong khi đó, ở ví dụ 2, dầm ngàm - khớp nếu cũng chia dầm thành 4 phần tử thì kết quả nhận được có sai số rất lớn, đặc biệt là lực cắt Q tại hai đầu dầm và độ võng giữa dầm, với sai số lần lượt là 21,82%, 30,29% và 24, 52%. Cũng tương tự như vậy, dầm hai đầu ngàm có lực cắt Q tại hai đầu dầm và độ võng giữa dầm, với sai số lần lượt là 25%, 50%, còn M giữa dầm có sai số 12,47%. Nhìn chung trong dầm siêu tĩnh lực cắt Q và độ võng y của dầm có sai số lớn hơn nhiều so với dầm tĩnh định cùng nhịp cùng tải trọng và cùng số phần tử chia.

Khi chia dầm thành nhiều phần tử hơn thì kết quả nhận được tiệm cận với kết quả chính xác hơn, ở đây khảo sát trường hợp chia dầm thành 12 phần tử, nhận được kết quả gần như trùng khớp với lời giải giải tích, ngoại trừ lực cắt Q vẫn còn sai số từ 8%, 7% và 10%, tương ứng với các ví dụ 1, 2 và 3. Nếu chia dầm thành 16 phần tử trở lên ta sẽ nhận được kết quả chính xác của các bài toán.

#### 5. KIẾN NGHỊ

Sử dụng phương pháp sai phân hữu hạn để tính toán cho các kết cấu phức tạp hơn. Có thể dùng nội dung nghiên cứu của bài báo để tham khảo, học tập, nghiên cứu và ứng dụng trong thực tế tính toán công trình.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Hà Huy Cường (2005), Phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, Tạp chí khoa học kỹ thuật, IV trang 112 to 114.
- [2]. Lê Thọ Trình, Nguyễn Mạnh Yên (1998), Cơ học kết cấu, Nhà xuất bản khoa học kỹ thuật.
- [3]. Đoàn Văn Duẩn (2015), Bài toán cơ học kết cấu dưới dạng tổng quát, Tạp chí Xây dựng số 02 (Tr59-Tr61).
- [4]. T. Karamanxi, người dịch Nguyễn Tiến Cường (1985), Phương pháp số trong cơ học kết cấu, Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật.
- [5]. Anil K. Chopra - University of California at Berkely (2001), Dynamics of structures, Theory and Applications to Earthquake Engineering, second Edition., Prentice Hall. INC, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 844 trang.
- [6]. G. Korn - T. Korn (1961), Mathematical Handbook for scientists and Engineers, McGraw-Hill, New York (Russian translation, edited by I. Bramovich, Nauka - Moscow Publisher, 1964).
- [7]. Irons, B. M. and O. C. Zienkiewicz (1968), (The Isoparametric Finite Element System - A new concept in Finite Element Analysis), Proc. Conf. (Recewnt Advances in Stress Analysis), Royal Aeronautical Society, London.
- [8]. O.C. Zienkiewicz - R.L. Taylor (1991), The finite element method (fourth edition) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, INC, 807 pages.
- [9]. Ray W. Clough Joshep Penzien (1993), Dynamics of Structures, Second Edition, McGraw-Hill Book Company. INC, 738 pages.
- [10]. Stephen P. Timoshenko - J. Goodier (1970), Theory of elasticity, McGraw-Hill, New York (Russian translation, edited by G. Shapiro, Nauka - Moscow Publisher, 1979), 560 pages.
- [11]. Stephen P. Timoshenko - Jame M. Gere (1961), Theory of elastic stability, McGraw-Hill Book Company, INC, New York - Toronto - London, 541 Tr.
- [12]. William T. Thomson, First Edition (2014), Pearson New International Edition, 523 pages.