

# Sử dụng lý thuyết biến dạng cắt tính toán động lực học của dầm bê tông cốt thanh composite aramid trên nền đàn hồi chịu tác dụng của hệ dao động di động

Using shear deformation theory to analysis the dynamics respond of concrete beams reinforced aramid composite bars on elastic foundation subjected to the osillator

**LÊ HẢI CHÂU**

Khoa Cơ Khí, Đại học kỹ thuật Lê Quý Đôn, Hà Nội; Email: Chauh2000@lqdtu.edu.vn

## TÓM TẮT

Bài báo trình bày thuật toán phần tử hữu hạn (PTHH), chương trình và kết quả tính toán xác định đáp ứng động lực học của kết cấu dầm bê tông cốt thanh composite aramid tựa trên nền đàn hồi chịu tác dụng của hệ dao động chuyển động đều. Việc xem xét ảnh hưởng của biến dạng cắt đến đáp ứng động lực học của dầm bằng cách sử dụng lý thuyết biến dạng cắt với hàm số đơn biến thay đổi theo chiều cao dầm là vấn đề rất có ý nghĩa và cần thiết đối với các kết cấu dầm có chiều cao trung bình và lớn - một trong các dạng kết cấu được sử dụng nhiều trong lĩnh vực công trình, xây dựng hiện nay. Trong nghiên cứu số, tác giả đã tập trung xem xét ảnh hưởng của các yếu tố như: biến dạng cắt (có biến dạng cắt, không có biến dạng cắt), kết cấu (cách bố trí các thanh gia cường) và tính chất nền đàn hồi đến đáp ứng chuyển vị, gia tốc của dầm. Các kết quả nghiên cứu là cơ sở cho việc lựa chọn giải pháp phù hợp cho kết cấu dạng dầm trên nền biến dạng hoặc trên các liên kết biến dạng như cầu trục, khung dầm nhà, dầm cầu, ... ứng dụng trong ngành xây dựng dân dụng cũng như xây dựng công trình đặc biệt nhằm phát triển kinh tế - xã hội và đảm bảo an ninh quốc phòng.

**Từ khóa:** Động lực học, biến dạng cắt, composite aramid, hệ dao động di động.

## ABSTRACT

This paper presents the finite element algorithm and results on dynamic analysis of concrete beams reinforced by composite aramid bars resting on elastic foundation subjected to moving oscillator with a constant velocity. Considering the influence of shear deformation on the dynamic response of beams using shear deformation theory with a univariate function that varies with beam height is a very meaningful and necessary issue for engineers. beam structures with medium and large heights - one of the structural types widely used in the field of engineering and construction today. In the numerical study, the author focused on considering the influence of factors such as: shear deformation (have shear deformation, don't have shear deformation), structure (arrangement of reinforcing bars) and parameters of the elastic foundation to respond to the displacement and acceleration of the beam. The research results are the basis for choosing appropriate solutions for beam-like structures on deformed foundations or on deformed connections such as bridge cranes, house beam frames, bridge girders, etc. for applications in the construction industry. civil works as well as construction of special works for socio-economic development and ensuring national security and defense.

**Keywords:** Dynamic, shear deformation, composite aramid, moving oscillator

## 1. GIỚI THIỆU CHUNG

Ngày nay các kết cấu dầm khẩu độ dài, chiều cao lớn được sử dụng rộng rãi trong các lĩnh vực xây dựng, giao thông vận tải, trong đó kết cấu dầm bê tông cốt thanh composite nói chung và bê tông cốt thanh composite aramid nói riêng đặt trên nền đàn hồi được sử dụng phổ biến do tính ưu việt của các thanh composite aramid,

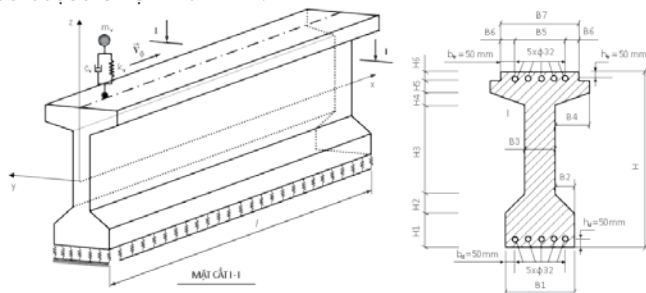
trong đó độ bền và khả năng chịu tác động xâm thực, ăn mòn của môi trường từ các thanh composite gia cường là đặc điểm nổi trội cần được tận dụng. Về kết cấu, dầm bê tông cốt thanh composite aramid được cấu tạo tương tự như dầm bê tông cốt thép, song có hai điểm khác biệt được chỉ ra, đó là: thay vì cốt thép gia cường là các thanh vật liệu composite aramid gia cường và chiều dày lớp bê tông

bảo vệ trong trường hợp sử dụng cốt thanh composite aramid nhỏ hơn so với trường hợp sử dụng cốt thép. Chính điều này cho phép bố trí các lớp cốt thanh composite aramid gia cường xa đường trung hòa của dầm hơn so với trường hợp sử dụng cốt thép cho nên khả năng chịu uốn của dầm bê tông cốt thanh composite aramid cao hơn. Về tính toán, khi kể đến ảnh hưởng của biến dạng cắt cho phép tiếp cận gần sát với điều kiện thực tế của kết cấu hơn. Chính vì vậy, đây là cách tiếp cận phù hợp với loại kết cấu dầm kể trên, đặc biệt khi kết cấu chịu tải trọng di động. Theo đó, với việc bỏ qua ảnh hưởng của biến dạng cắt, các tác giả N. T. Chung và L. P. Binh [1], M Attar [2], Salih N Akour [3], Oni và Awodola [4], Karmvir và cộng sự [5] đã phân tích đáp ứng động lực học của dầm có hoặc không có vết nứt nằm trên nền đàn hồi, chịu tác dụng của khối lượng di động hoặc tải trọng điều hòa di động. Gần đây, một số nghiên cứu đáp ứng động lực học của dầm có kể đến ảnh hưởng của biến dạng cắt đã được đề cập, trong đó tải trọng động với điểm đặt cố định là phổ biến. Theo đó, các tác giả Rameshchandra P Shimpi [6], Ana Carolina Azevedo Vasconcelos [7], A.T. Kunte [8] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt đơn biến thiết lập thuật giải phân tích tĩnh và dao động của dầm có chiều dày vừa và lớn. Kết quả cho thấy ảnh hưởng của biến dạng cắt tới chuyển vị của dầm càng lớn khi chiều cao mặt cắt ngang dầm càng lớn. Cũng sử dụng lý thuyết biến dạng cắt đơn biến, các tác giả Krzysztof Magnucki [9] đã nghiên cứu bài toán uốn dầm có cơ tính biến thiên, trong khi Mohammad Javad Rezvani [10] nghiên cứu đáp ứng động lực học của dầm composite chịu tác dụng của tải trọng điều hòa di động dọc theo dầm với vận tốc không đổi.

Có thể nói, việc sử dụng lý thuyết biến dạng cắt để phân tích bài toán uốn dầm trong trường hợp tĩnh hay động lực học đều được các nghiên cứu quan tâm, giải quyết. Đối với trường hợp tải trọng động có điểm đặt cố định, các nghiên cứu đến nay đã có nhiều kết quả, còn với bài toán tải trọng di động thì vẫn còn có nhiều vấn đề cần tiếp tục nghiên cứu, trong đó các yếu tố như kết cấu, tải trọng, điều kiện làm việc của dầm, ... là các vấn đề cần được quan tâm. Chính vì lẽ đó, trong bài báo này, tác giả sử dụng lý thuyết biến dạng cắt đơn biến, trong đó hàm hiệu chỉnh cắt phụ thuộc tọa độ chiều cao mặt cắt ngang dầm được sử dụng để thiết lập thuật toán phân tích bài toán động lực học của dầm bê tông cốt thanh composite aramid chịu tác dụng của hệ dao động 1 bậc tự do di động. Điểm mới và ý nghĩa ở đây là việc áp dụng thành công lý thuyết biến dạng cắt đối với dầm bê tông cốt thanh composite trên nền đàn hồi chịu tải trọng di động.

**2. MÔ PHỎNG PTHH VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CHỦ ĐẠO**

Xét dầm bê tông cốt thanh composite aramid với tổng chiều dài  $l$ , mặt cắt ngang hình chữ I. Dầm tựa trên nền đàn hồi Winkler, chịu tác dụng của hệ dao động 1 bậc tự do di chuyển từ trái sang phải với vận tốc  $v$  không đổi được thể hiện như hình 1.



**Hình 1.** Mô hình dầm bê tông cốt thanh composite aramid trên nền đàn hồi Winkler chịu tác dụng của hệ dao động 1 bậc tự do di động

Mô hình PTHH và các phương trình quan hệ ứng xử cơ học được thiết lập trên cơ sở các giả thiết: vật liệu bê tông, thanh composite

aramid được trung bình hóa với các đặc trưng cơ học xác định và quan hệ ứng suất - biến dạng tuyến tính, biến dạng bé; không có hiện tượng tách, trượt giữa bề mặt các thanh composite aramid với bê tông; tiếp xúc giữa hệ dao động di động, nền với dầm là liên tục.

**2.1. Trường chuyển vị và biến dạng**

Trên cơ sở lý thuyết dầm có kể đến biến dạng cắt, chuyển vị tại điểm bất kỳ thuộc dầm được xác định bởi:

$$u(x, z, t) = u_0(x, t) - z \frac{\partial w_0(x, t)}{\partial x} + f(z) \varphi_s(x, t) \tag{1}$$

$$w(x, z, t) = w_0(x, t)$$

trong đó:  $u_0$  là chuyển vị theo phương x của điểm thuộc trục dầm;  $\varphi_s$  là góc xoay mặt cắt ngang dầm quanh trục x do biến dạng trượt gây nên;  $f(z)$  là hàm hiệu chỉnh cắt. Hàm hiệu chỉnh cắt được chọn đảm bảo điều kiện ứng suất cắt tại mặt trên và mặt dưới của dầm bằng 0. Trong bài báo này, hàm hiệu chỉnh cắt được lựa chọn như sau [11]:

$$f(z) = z \left( \frac{1}{4} + \frac{z^2}{h^2} \right) \tag{2}$$

Quan hệ biến dạng - chuyển vị tại 1 điểm thuộc dầm:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ 0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x^b \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} f(z) \kappa_x^s \\ h(z) \varphi_s \end{Bmatrix} \tag{3}$$

trong đó:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \kappa_x^b = -\frac{\partial^2 w_0(x, t)}{\partial x^2}, \kappa_x^s = \frac{\partial \varphi_s}{\partial x} \tag{4}$$

$$h(z) = 1 - f'(z) = 3 \left( \frac{1}{4} - \frac{z^2}{h^2} \right)$$

**2.2. Quan hệ ứng suất - biến dạng**

Sử dụng phương pháp tương đương hóa, vật liệu và đặc trưng hình học của dầm được đặc trưng bởi các đại lượng mô đun đàn hồi  $E_{td}$ , hệ số Poisson  $\nu_{td}$ ; khối lượng riêng  $\rho_{td}$  và diện tích mặt cắt ngang  $A_{td}$ , mô men quán tính chống uốn  $I_{td}$  của mặt cắt ngang tương đương, chúng được xác định như sau [13]:

$$E_{td} = \frac{E_{bt}V_{bt} + E_{cps}V_{cps}}{V_{bt} + V_{cps}}, \nu_{td} = \frac{\nu_{bt}V_{bt} + \nu_{cps}V_{cps}}{V_{bt} + V_{cps}} \tag{5}$$

$$A_{td} = A_{bt} + \alpha A_{cps}, \quad (\alpha = 7 \div 10)$$

$$I_{td} = I_{bt} + I_{cps}, \quad \rho_{td} = \frac{\rho_{bt}V_{bt} + \rho_{cps}V_{cps}}{V_{bt} + V_{cps}}$$

trong đó:  $E_{bt}$ ,  $E_{cps}$  và  $\rho_{bt}$ ,  $\rho_{cps}$  tương ứng là mô đun đàn hồi tương đương của vật liệu bê tông, thanh composite aramid và khối lượng riêng tương đương của vật liệu bê tông, thanh composite aramid;  $\nu_{bt}$ ,  $\nu_{cps}$  tương ứng là hệ số Poisson tương đương của vật liệu bê tông, thanh composite aramid;  $V_{bt}$ ,  $V_{cps}$  và  $A_{bt}$ ,  $A_{cps}$  tương ứng là thể tích của bê tông, các thanh composite aramid và diện tích mặt cắt ngang của bê tông, các thanh composite aramid;  $I_{bt}$ ,  $I_{cps}$  tương ứng là mô men quán tính chống uốn mặt cắt ngang của bê tông, các thanh composite aramid đối với trục trung hòa mặt cắt ngang dầm.

Ứng suất tại 1 điểm trong dầm bê tông cốt thanh composite aramid lúc này được xác định:

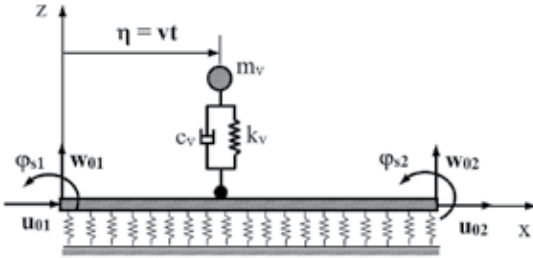
$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{td} & 0 \\ 0 & \frac{E_{td}}{2(1 + \nu_{td})} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{6}$$

trong đó:

$$\mathbf{D} = E_{td} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2(1 + \nu_{td})} \end{bmatrix} \tag{7}$$

**2.3. Phần tử dầm bê tông cốt thanh composite aramid trên nền đàn hồi chịu tác dụng của tải trọng động**

Xét phần tử dầm 2 nút, trong đó mỗi nút có 3 bậc tự do  $u, w, \theta$ , phần tử dầm nằm trên nền đàn hồi Winkler (Hình 2).



**Hình 2.** Mô hình phần tử dầm trên nền đàn hồi  
Các thành phần chuyển vị tại điểm thuộc phần tử được xác định bởi [14], [18]:

$$u = \left\{ u_0 \quad \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad \varphi_s \quad w_0 \right\}^T = Nq^e \quad (8)$$

trong đó ma trận hàm dạng  $N$  được xác định:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & 0 & N_5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & 0 & 0 & 0 & N_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 & N_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_4 & 0 & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_u \\ \frac{\partial N_w}{\partial x} \\ N_s \\ N_s \\ N_w \end{bmatrix} \quad (9)$$

trong đó  $N_1 \div N_8$  và  $N_u, \frac{\partial N_w}{\partial x}, N_s, N_w$  được chỉ ra trong Phụ lục.

$$q^e = \left\{ u_{01} \quad \frac{\partial w_{01}}{\partial x} \quad \varphi_{s1} \quad w_{01} \quad u_{02} \quad \frac{\partial w_{02}}{\partial x} \quad \varphi_{s2} \quad w_{02} \right\}^T \quad (10)$$

Từ (8) và (9), ta có:

$$u_0 = N_u q^e, \frac{\partial w_0}{\partial x} = \frac{\partial N_w}{\partial x} q^e, \varphi_s = N_s q^e, w_0 = N_w q^e \quad (11)$$

Thay (11) vào (4) và (3), dẫn đến:

$$\varepsilon = Bq^e \quad (12)$$

trong đó ma trận quan hệ biến dạng - chuyển vị nút phần tử:

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 N_w}{\partial x^2} + f(z) \frac{\partial N_s}{\partial x} \\ h(z) N_s \end{bmatrix} \quad (13)$$

Phương trình động lực học của phần tử dầm chịu tải trọng động được xác định từ nguyên lý Hamilton [15], [16]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T^e - \Pi^e) dt = 0 \quad (14)$$

trong đó  $T^e, \Pi^e$  tương ứng là động năng, thế năng biến dạng toàn phần của phần tử:

$$T^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \rho \dot{u}^T \dot{u} d\Omega \quad (15)$$

$$\Pi_p^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \varepsilon^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega^e} u^T s d\Omega - \int_{\Gamma^e} u^T p^* dx \quad (16)$$

trong đó:  $p^* = p_d(x, t) - p_f(x, t)$  (17)

với:  $p_f(x, t) = bk_0 w = bk_0 N_w q^e$  (18)

Ở đây:  $s, p^*$  tương ứng là lực phân bố theo diện tích và lực phân bố theo chiều dài;  $k_0$  là hệ số nền đàn hồi,  $p_d$  là ngoại lực phân bố theo chiều dài của dầm và  $p_f$  là phản lực phân bố theo chiều dài của nền đàn hồi.

Thay các phương trình (6), (8), (12) vào (15), (16) và (14), ta có phương trình động lực học của phần tử dầm trên nền đàn hồi chịu tải trọng động:

$$m_0^e \ddot{q}^e + (k_0^e + k_f^e) q^e = Q^e \quad (19)$$

trong đó:  $m_0^e, k_0^e$  và  $Q^e$  là ma trận khối lượng, ma trận độ cứng và véc tơ tải trọng nút phần tử;  $k_f^e$  là ma trận độ cứng của dầm do

$$m_0^e = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \rho_{td} N^T N dz dx$$

nền đàn hồi gây ra.  $k_0^e = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} B^T D B dz dx$ ;  $k_f^e = bk_0 \int_0^L N^T N_w dx$  (20)

$$Q^e = \int_0^L \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} N^T s dz dx + \int_0^L N^T p dx$$

Thay các biểu thức (7), (13) vào (20), ta có biểu thức ma trận độ cứng phần tử dầm:

$$k_0^e = k_{uv}^e + k_{ws}^e + k_{ss}^e \quad (21)$$

trong đó  $k_{uv}^e, k_{ws}^e, k_{ss}^e$  tương ứng là ma trận độ cứng phần tử do ảnh hưởng của kéo (nén) và uốn, uốn và cắt, cắt. Các đại lượng  $k_{uv}^e, k_{ws}^e, k_{ss}^e$  được chỉ ra trong Phụ lục. Trong trường hợp không sử dụng lý thuyết biến dạng cắt, ta có:  $k_0^e = k_{uv}^e$  và trở lại bài toán thông thường.

**2.4. Dao động của hệ gồm dầm bê tông cốt thanh composite aramid trên nền đàn hồi và hệ dao động di động**

**2.4.1. Lực tác dụng của hệ dao động di động lên phần tử dầm**

Phương trình dao động của khối lượng m:

$$m\ddot{z} + c(\dot{z} - \dot{w}_x) + k(z - w_x - z_0) + mg - Q = 0 \quad (22)$$

trong đó:  $z = z(t)$  là chuyển vị đứng tuyệt đối của khối lượng so với vị trí cân bằng;  $m, c, k$  là khối lượng, phần tử cản và độ cứng của lò xo của hệ dao động di động;  $w_x$  là chuyển vị đứng của dầm tại tọa độ  $x, z_0$  là biến dạng tĩnh của lò xo.

Chuyển vị và vận tốc của phần tử dầm tại tọa độ  $x$  được xác định:

$$w_x = N_w q^e \quad (24)$$

$$\dot{w}_x = \dot{x} N_w' q^e + N_w \dot{q}^e = v N_w' q^e + N_w \dot{q}^e$$

Thay phương trình (24) vào (23), dẫn đến:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz - cN_w \dot{q}^e - (cvN_w' + kN_w) q^e = Q \quad (25)$$

Hay:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz - C\dot{q}^e - Kq^e = Q \quad (26)$$

trong đó:  $C = cN_w, K = (cvN_w' + kN_w)$  (27)

Lực tác dụng theo các phương  $x$  và phương  $z$  của hệ dao động di động lên phần tử dầm:

$$P_x(x, t) = -m(\ddot{x} + \ddot{u}_x) = -m(a + \ddot{u}_x) \quad (28)$$

$$P_z(x, t) = c(\dot{z} - \dot{w}_x) + k(z - w_x - z_0)$$

trong đó  $\ddot{u}_x$  là gia tốc theo phương dọc trục của phần tử dầm tại tọa độ  $x$ :

$$u_x = N_u q^e \quad (29)$$

$$\dot{u}_x = \dot{x} N_u' q^e + N_u \dot{q}^e = v N_u' q^e + N_u \dot{q}^e$$

$$\ddot{u}_x = a N_u' q^e + v^2 N_u'' q^e + 2v N_u' \dot{q}^e + N_u \ddot{q}^e$$

Ta thấy  $N_u'' = 0$ , nên dẫn đến:

$$\ddot{u}_x = a N_u' q^e + 2v N_u' \dot{q}^e + N_u \ddot{q}^e \quad (30)$$

Thay phương trình (23) vào phương trình thứ 2 của (28), dẫn đến:

$$P_x(x, t) = -m(a + \ddot{u}_x) \quad (31)$$

$$P_w(x, t) = -m\ddot{z} - mg + Q$$

Các lực tập trung trong (31) có thể được biểu diễn dưới dạng lực phân bố thông qua hàm Delta Dirac  $\delta(\cdot)$  như sau [12], [14], [17]:

$$\begin{aligned} q_x(x,t) &= P_x(x,t) \cdot \delta(x-\eta) \\ q_w(x,t) &= P_w(x,t) \cdot \delta(x-\eta) \end{aligned} \quad (32)$$

**2.4.2. Phương trình dao động của hệ gồm dầm bê tông cốt thanh composite aramid trên nền đàn hồi và hệ dao động di động**

Thay biểu thức (32) vào (19), véc tơ lực nút của phần tử do hệ dao động di động tác dụng được xác định như sau:

$$\begin{aligned} Q_q^e &= -m \int_0^l N_u^T (a + \ddot{u}_x) \cdot \delta(x-\eta) dx \\ &\quad - \int_0^l N_w^T (m\ddot{z} + mg + Q) \cdot \delta(x-\eta) dx \end{aligned} \quad (33)$$

Do tính chất của hàm Delta Dirac nên phương trình (33) trở thành:

$$Q_q^e = -mN_u^T (a + \ddot{u}_x) - N_w^T (m\ddot{z} + mg + Q) \quad (34)$$

Để ý đến phương trình (30), biểu thức véc tơ lực nút (34) trở thành:

$$Q_q^e = f_p^e - m_p^e \ddot{q}^e - c_p^e \dot{q}^e - k_p^e q^e - m\ddot{z}N_w^T \quad (35)$$

$$\text{với: } f_p^e = -m a N_u^T - (mg + Q) N_w^T \quad (36)$$

$$m_p^e = m N_u^T N_u \quad (37)$$

$$c_p^e = 2\gamma m N_u^T N_u' \quad (38)$$

$$k_p^e = m a N_u^T N_u' \quad (39)$$

trong đó:  $N_u' = \frac{dN_u}{dx}$ ,  $N_w' = \frac{dN_w}{dx}$

Thay biểu thức (35) vào (19), kết hợp với phương trình (26), dẫn đến phương trình vi phân mô tả dao động của hệ phần tử dầm trên nền đàn hồi và hệ dao động di động:

$$(m_0^e + m_p^e) \ddot{q}^e + m \ddot{y}_i + c_p^e \dot{q}^e + (k_0^e + k_p^e) q^e = f_p^e \quad (40)$$

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz - C\dot{q}^e - Kq^e = Q$$

Bằng phương pháp độ cứng trực tiếp, từ phương trình (40) sau khi tập hợp các ma trận và véc tơ tải trọng phần tử thành các ma trận và véc tơ tải trọng tổng thể, phương trình mô tả dao động của hệ dầm trên nền đàn hồi - tải trọng động được viết như sau:

$$\begin{aligned} (M_0 + M_p) \ddot{q} + m\ddot{z} + (C_0 + C_p) \dot{q} \\ + (K_0 + K_p) q = F \end{aligned} \quad (41)$$

$$m\ddot{z} + C^* \dot{q} + c\dot{z} + K^* q + kz = Q$$

trong đó:

$$M_0 = \sum_e m^e, K_0 = \sum_e (k^e + k_f^e), C^* = \sum_{n_{os}} C$$

$$C_0 = \alpha_R M_0 + \beta_R K_0, Q = \sum_e Q^e, K^* = \sum_{n_{os}} K \quad (42)$$

$$\beta_r = \frac{2\xi_D}{\omega_1 + \omega_2}; \alpha_r = \beta_r \omega_1 \omega_2$$

$$M_p = \sum_{n_{os}} m_p^e, C_p = \sum_{n_{os}} c_p^e, K_p = \sum_{n_{os}} k_p^e$$

và  $\omega_1, \omega_2, \xi_D$  lần lượt là tần số dao động riêng thứ nhất, thứ hai, tỷ số cản của dầm;  $n, n_{os}$  tương ứng là tổng số phần tử dầm và số phần tử dầm chịu tác dụng trực tiếp của hệ dao động di động.

Phương trình (41) là phương trình tuyến tính có hệ số phụ thuộc thời gian. Đồng thời các phương trình còn phụ thuộc lẫn nhau, điều này cho thấy tính tương tác giữa hệ dao động di động và dầm bê tông cốt thanh composite trên nền đàn hồi. Thuật toán giải phương trình (41) được thực hiện trên cơ sở phương pháp tích phân trực tiếp Newmark và chương trình tính viết trong môi trường MATLAB cụ thể hóa thuật toán đã được thực hiện.

**3. KHẢO SÁT SỐ**

**3.1. Bài toán kiểm tra**

Tính toán kiểm tra và so sánh tần số dao động riêng của dầm trong nghiên cứu của J Li và H Hua [18] với các thông số của bài toán:  $E = 2,1 \times 10^9 \text{ Pa}$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $\rho = 7860 \text{ kg/m}^3$ ,  $L = 1 \text{ m}$ ,  $h = 0,2 \text{ m}$ ; hàm hiệu chỉnh cắt  $f(z) = (h/\pi) \sin(\pi z/h)$ . Kết quả so sánh thể hiện như trong bảng 1 với các điều kiện biên khác nhau (2 đầu gối: S-S, hai đầu ngàm: C-C, 1 đầu ngàm và 1 đầu gối di động: C-S, 1 đầu ngàm và 1 đầu tự do: C-F).

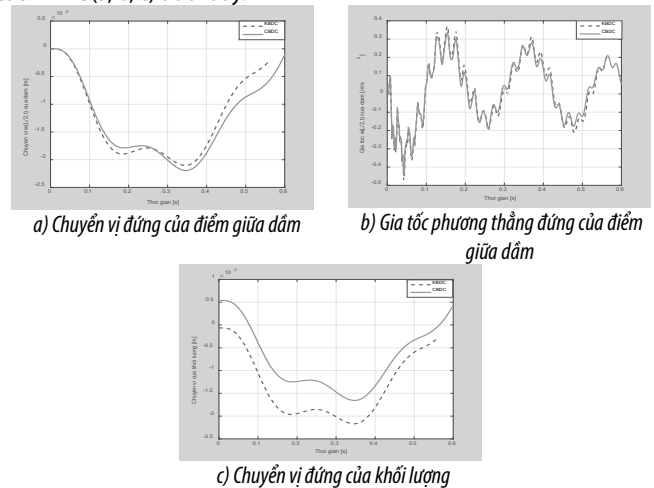
Bảng 1. Kết quả so sánh các tần số riêng

f [Hz]	S-S		C-C		C-S	
	[18]	TG	[18]	TG	[18]	TG
1	44,1	44,1	86,1	86,3	64,0	64,2
2	152,9	153,2	199,1	199,6	176,7	177,1
3	292,7	293,4	334,4	335,5	314,0	314,9
4	445,4	446,5	481,0	482,7	463,6	464,9
5	603,7	605,6	635,0	637,5	619,5	621,7

Từ kết quả trên, trong 5 tần số riêng đầu tiên cho mỗi loại liên kết, sai khác lớn nhất là 0,39% cho thấy thuật toán và chương trình tính trong bài báo đã thiết lập có cơ sở tin cậy.

**3.2. Khảo sát đáp ứng động lực học của dầm bê tông cốt thanh composite aramid trên nền đàn hồi chịu tác dụng của hệ dao động di động**

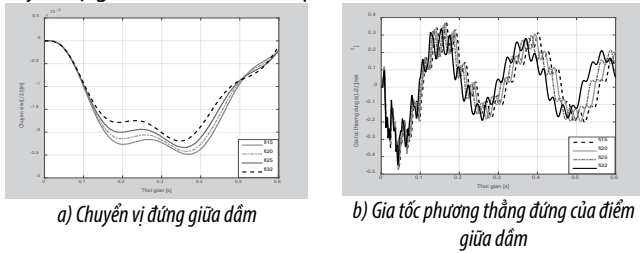
Mô hình bài toán dầm bê tông cốt thanh composite aramid trên nền đàn hồi, chịu tác dụng của hệ dao động di động sử dụng tính toán trong phần này được mô tả như hình 1 với các số liệu:  $b_1 = 0,650 \text{ m}$ ,  $b_2 = 0,225 \text{ m}$ ,  $b_3 = 0,200 \text{ m}$ ,  $b_4 = 0,325 \text{ m}$ ,  $b_6 = 0,100 \text{ m}$ ;  $h_1 = 0,250 \text{ m}$ ,  $h_2 = 0,200 \text{ m}$ ,  $h_3 = 0,890 \text{ m}$ ,  $h_4 = 0,110 \text{ m}$ ,  $h_5 = 0,120 \text{ m}$ ,  $h_6 = 0,080 \text{ m}$ ;  $E_{bt} = 34 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{bt} = 0,25$ , khối lượng riêng trên chiều dài  $\rho_{bt} = 2.500 \text{ kg/m}$ . Tổng số thanh composite aramid  $\Phi 32$  là 10 thanh, các số liệu cơ tính là  $E_{cps} = 230 \text{ GPa}$ ,  $\nu_{cps} = 0,2$ , khối lượng riêng trên chiều dài  $\rho_{cps} = 1.850 \text{ kg/m}$  [13], [15]; hệ số nền đàn hồi được xem là hằng số với  $k_0 = 250 \text{ kN/m}^2$ ; hệ dao động di động 1 bậc tự do có  $m_v = 5.750 \text{ kg}$ ,  $k_v = 1.595 \text{ kN/m}$ ,  $c = 314 \text{ N/m/s}^2$ ; tỷ số cản  $\xi_D = 0,5\%$ . Dầm liên kết tựa đơn 2 đầu (S-S). Tại thời điểm:  $t = 0$  hệ dao động ở điểm nút bên trái của dầm với vận tốc  $v = 100 \text{ km/h}$ . Dầm được rời rạc hóa bởi 40 phần tử, bước thời gian tích phân là 0,002s. Đáp ứng chuyển vị, gia tốc đúng của điểm giữa dầm và chuyển vị đúng của khối lượng trong hệ dao động di động cho 2 trường hợp có kể đến biến dạng trượt (CBDC) và không kể đến biến dạng trượt (KBDC) được chỉ ra trong các hình 3(a, b, c) dưới đây.



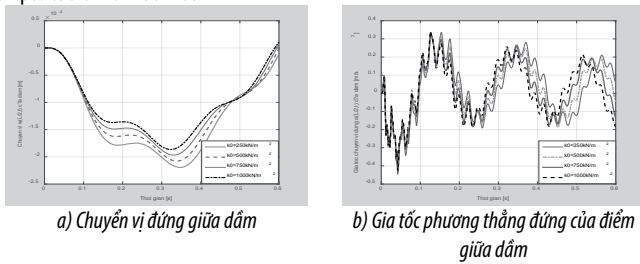
**Hình 3.** Đáp ứng theo thời gian của điểm giữa dầm và của khối lượng thuộc hệ dao động di động

Tiến hành tính toán khảo sát ảnh hưởng của các thanh composite aramid gia cường, hình 4 cho thấy mức độ khác nhau về đáp ứng động lực của dầm với 4 loại đường kính thanh composite aramid khác nhau ( $\Phi 15$ :  $f_{i15}$ ,  $\Phi 20$ :  $f_{i20}$ ,  $\Phi 25$ :  $f_{i25}$ ,  $\Phi 32$ :  $f_{i32}$ ). Hình 5

cho ta thấy ảnh hưởng đáng kể của hệ số nền đàn hồi đến đáp ứng chuyển vị, gia tốc của dầm composite aramid.



**Hình 4.** Đáp ứng theo thời gian của điểm giữa dầm với các trường hợp đường kính thanh composite aramid khác nhau



**Hình 5.** Đáp ứng theo thời gian của điểm giữa dầm với các trường hợp độ cứng nền khác nhau

**Nhận xét:** Ảnh hưởng của biến dạng cắt đối với đáp ứng động của dầm là đáng kể, khi xét đến biến dạng cắt thì chuyển vị của dầm lớn hơn khi không kể đến biến dạng cắt trong khi gia tốc cho thấy điều ngược lại. Các thanh composite aramid gia cường có tác dụng tăng cứng cho dầm bê tông rõ rệt, khi đường kính các thanh tăng từ 15mm đến 32mm thì chuyển vị của dầm giảm một cách phi tuyến so với sự tăng của đường kính các thanh. Khi độ cứng nền tăng từ 250kN/m<sup>2</sup> đến 1000kN/m<sup>2</sup> thì chuyển vị của dầm giảm trong khi gia tốc thay đổi không đáng kể.

**4. KẾT LUẬN**

Bài báo đã thiết lập được thuật toán và chương trình tính toán đáp ứng động lực học của dầm bê tông cốt thanh composite aramid trên nền đàn hồi 1 hệ số Winkler chịu tác dụng của hệ dao động 1 bậc tự do di động (thông qua chuyển vị và gia tốc). Kết quả khảo sát số cho thấy ảnh hưởng của biến dạng cắt, đường kính các thanh composite aramid và tính chất nền đàn hồi đến đáp ứng động lực học của dầm. Các kết quả này có thể khẳng định là mới đối với kết cấu bê tông cốt thanh composite aramid trên nền đàn hồi chịu tải trọng di động và có thể tham khảo cho việc tính toán các phương án hợp lý cho kết cấu bê tông cốt thanh composite aramid dạng dầm, tấm hoặc vỏ chịu tải trọng di động ứng dụng trong các lĩnh vực xây dựng, công trình hoặc giao thông vận tải.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

[1] Nguyen Thai Chung, Le Pham Binh, Nonlinear Dynamic Analysis of Cracked Beam on Elastic Foundation Subjected to Moving Mass, *International Journal of Advanced Engineering Research and Science (IJAERS)*, Vol 4, Issue-9, Sep- 2017, pp.73-81.  
 [2] M Attar, A Karrech and K Regenauer-Lieb, Dynamic response of cracked Timoshenko beams on elastic foundation under moving harmonic loads, *Journal of Vibration and Control*, 2015 1-26, DOI: 10.1177/1077546315580470.  
 [3] Salih N Akour, Dynamics of Nonlinear Beam on Elastic Foundation, *Proceedings of the World Congress on Engineering*, Vol II WCE 2010, June 30 - July 2, 2010, London, U.K., ISBN: 978-988-18210-7-2 ISSN: 2078-0958 (Print); ISSN: 2078-0966 (Online).  
 [4] S. T. Oni and T. O. Awodola, Dynamic response under a moving load of an elastically supported nonprismatic Bernoulli-Euler beam on variable elastic foundation, *Latin American Journal of Solids and Structures* 7(2010): 3-20.  
 [5] Karmvir, Ramakrishna Kuppa, Overview of methods of analysis of beams on elastic foundation, *IOSR Journal of Mechanical and Civil Engineering*, Volume 11, Issue5.Ver VI (Sep-Oct-2014): 22-29.

[6] Rameshchandra P Shimpi, Rajesh A Shetty and Anirban Guha (2016), *A simple single variable shear deformation theory for a rectangular beam*, Proc IMechE Part C: J Mechanical Engineering Science, 16 pages.  
 [7] Ana Carolina Azevedo Vasconcelos, Anderson Soares da Costa Azevedo, Simone dos Santos Hoefel (2016), *Finite Element Analysis of Shear Deformation and Rotatory Inertia for Beam Vibration*, Proceedings of the XXXVII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC, Brasilia, DF, Brazil, November 6-9, 2016, 17 pages.  
 [8] A.T. Kunte1, G.R. Gandhe, D.H. Tupe, S.L. Dhondge (2019), *Flexural Analysis of Thick Beams using Trigonometric Shear Deformation Theory*, International Research Journal of Engineering and Technology (IRJET), Vol. 06, Issue. 08, pp. 745-751.  
 [9] Krzysztof Magnucki, Jerzy Lewinski, Ewa Magnucka, Blandzi (2020), *An Improved Shear Deformation Theory for Bending Beams with Symmetrically Varying Mechanical Properties in the Depth Direction*, Acta Mech 231, pp. 4381-4395.  
 [10] Mohammad Javad Rezvanli, Mohammad Hossein Kargarnovin, Davood Younesian (2011), *Dynamic analysis of composite beam subjected to harmonic moving load based on the third-order shear deformation theory*, Front. Mech. Eng. 2011, 6(4): pp.409-418.  
 [11] Nguyen Thai Chung, Duong Thi Ngoc Thu, and Le Xuan Thuy (2023), Dynamic analysis of stiffened functionally graded composite plates reinforced by carbon nanotubes subjected to blast loads using a new four-variable refined plate theory, *International Journal of Computational Materials Science and Engineering*, Vol. 12, No. 3 (2023) 2350004 (21 pages).  
 [12] Ladislav Frysba, *Vibration of solid and structures under moving loads*, Thomas Telford, ISBN 0-7277-2741-9 (1999).  
 [13] Nguyen Thai Chung, Le Hai Chau (2024), *Dynamic Analysis of Concrete Beams Reinforced with Composite Aramid Bars on Elastic Foundation Subjected to Moving Oscillator*, Báo cáo Hội nghị Cơ học toàn quốc Kỷ niệm 45 năm thành lập Viện Cơ học.  
 [14] Bathe K. J and Wilson E. L (1978), *Numerical Method in Finite Method Analysis* Prentice, Hall of India Private Limited, New Delhi.  
 [15] Nguyen Thai Chung, Le Pham Binh (2022), *Experimental and Finite Element Studies on the Static Behaviour of Concrete Beams Reinforced with Composite Aramid Bars*, Tạp chí Xây dựng/Bộ Xây dựng, 10.2022, tr. 100-104.  
 [16] Wolf J. P (1988), *Dynamic Soil-Structure Interaction Analysis in Time domain*, Prentice-Hall Inc. Englewood Cliffs, N. J. 07632.  
 [17] Yeong-Bin Yang and Jong-Dar Yau (1997), *Vehicle - Bridge Interaction Element for Dynamic Analysis*, Journal of Structural Engineering/November 1997, pp.1512-1518.  
 [18] J Li and H Hua (2009), *The effects of shear deformation on the free vibration of elastic beams with general boundary conditions*, Proc. IMechE Vol. 224 Part C: J. Mechanical Engineering Scienc, pp.71-84.

**Phụ lục**

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l_e}, N_5 = \frac{x}{l_e}, N_2 = x - \frac{2x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2},$$

$$N_6 = -\frac{x^2}{l_e} + \frac{x^3}{l_e^2}, N_8 = \frac{3x^2}{l_e^2} - \frac{2x^3}{l_e^3},$$

$$N_3 = 1 - \frac{x}{l_e}, N_7 = \frac{x}{l_e}, N_4 = 1 - \frac{3x^2}{l_e^2} + \frac{2x^3}{l_e^3},$$

$$N_u = [N_1 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_5 \ 0 \ 0 \ 0],$$

$$\frac{\partial N_w}{\partial x} = [0 \ N_2 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_6 \ 0 \ 0],$$

$$N_s = [0 \ 0 \ N_3 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_7 \ 0],$$

$$N_w = [0 \ 0 \ 0 \ N_4 \ 0 \ 0 \ 0 \ N_8],$$

$$k_{uw}^e = \frac{E_{td} Ah^2}{12} \int_0^{l_e} \left( \frac{12}{h^2} \left( \frac{\partial N_u}{\partial x} \right)^T \frac{\partial N_w}{\partial x} + \left( \frac{\partial^2 N_w}{\partial x^2} \right)^T \frac{\partial^2 N_w}{\partial x^2} \right) dx$$

$$k_{ws}^e = -\frac{E_{td} Ah^2}{30} \int_0^{l_e} \left( \left( \frac{\partial^2 N_w}{\partial x^2} \right)^T \frac{\partial N_s}{\partial x} + \left( \frac{\partial N_s}{\partial x} \right)^T \frac{\partial^2 N_w}{\partial x^2} \right) dx$$

$$k_{ss}^e = \frac{E_{td} Ah^2}{1680} \int_0^{l_e} \left( 23 \left( \frac{\partial N_s}{\partial x} \right)^T \frac{\partial N_s}{\partial x} + \frac{252 N_s^T N_s}{(1 + \nu_{td}) h^2} \right) dx$$