

Phân tích trạng thái giới hạn của kết cấu bằng phương pháp trực tiếp

Limit analysis of structures by direct method

> TS TRINH TỰ LỰC

Khoa Xây dựng, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội; Email: tuluc72@yahoo.com, luctt@hau.edu.vn

TÓM TẮT

Bài báo trình bày một cách tính toán tải trọng giới hạn của kết cấu phẳng dựa trên phương pháp cận trên lý thuyết phân tích giới hạn của kết cấu. Phương pháp số áp dụng trong công trình này là phương pháp phần tử hữu hạn (FEM).

Từ khóa: Phân tích trạng thái giới hạn; tối ưu hoá phi tuyến; phương pháp phần tử hữu hạn.

ABSTRACT

We introduce a so-called direct method for the computation of limit loads of structures subjected to proportional loading. The method is based on upper bound theorem using the von Mises yield criterion. The finite element method is used in this investigation.

Keywords: Limit analysis, non-linear programming, finite element method.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Phân tích trạng thái giới hạn (limit analysis) đóng vai trò quan trọng trong đánh giá an toàn và thiết kế kết cấu, đặc biệt trong các nhà máy điện hạt nhân, công nghiệp hóa chất, kỹ thuật cơ khí và trong xây dựng.

Dựa trên mô hình vật liệu đàn dẻo lý tưởng hay cứng dẻo lý tưởng, lý thuyết phân tích giới hạn cho phép tính toán khả năng chịu tải mà kết cấu có khả năng chịu được dưới tác dụng tỷ lệ. Khi vượt qua giới hạn này, kết cấu sẽ bị phá hủy do chảy dẻo. Để tính toán được tải trọng giới hạn của kết cấu, chúng ta có thể sử dụng các phương pháp phân tích từng bước. Ở phương pháp này chúng ta chia nhỏ quá trình chất tải ra thành các bước nhỏ và khảo sát toàn bộ quá trình phát triển ứng suất biến dạng của kết cấu cho đến lúc kết cấu phá hủy hoàn toàn. Phương pháp này thường được dùng để tính toán các kết cấu đơn giản, chúng ta có thể thấy trong các giáo trình cho sinh viên Đại học. Phương pháp này có nhược điểm là bên cạnh việc phân tích mất rất nhiều thời gian thì chúng ta còn phải biết rõ toàn bộ quá trình chất tải hay cốt tải, điều này rất khó thực hiện trong các tình huống hay bài toán kỹ thuật thực tế. Chúng ta có thể vượt qua những khó khăn của phương pháp phân tích từng bước bằng một phương pháp khác gọi là phương pháp trực tiếp (direct method). Thuận tiện

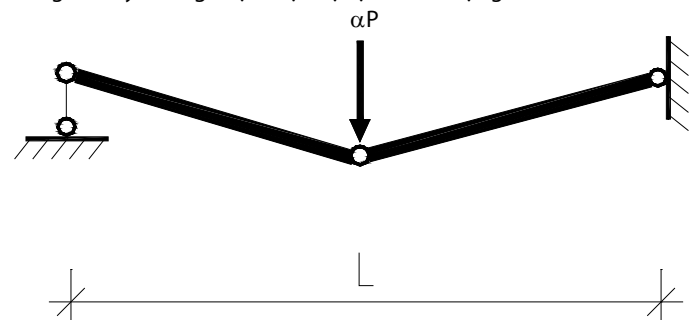
nhất của phương pháp này là chúng ta không cần biết toàn bộ lịch sử của quá trình chất tải mà chỉ quan tâm đến giá trị tải lớn nhất (tương ứng với nó là ứng suất biến dạng ở trạng thái cực hạn) mà ở đó kết cấu bị phá hủy [1-3]. Có hai phương pháp cơ bản trong nhóm các phương pháp trực tiếp là phương pháp động và phương pháp tĩnh. Các phương pháp trực tiếp dẫn bài toán tìm lực giới hạn về các bài toán tối ưu toán học, theo phương pháp tĩnh chúng ta đưa bài toán tìm giá trị lớn nhất trong số các tải trọng làm cho kết cấu an toàn. Theo phương pháp động bài toán tìm lực phá hủy nhỏ nhất trong trường chuyển vị khả dĩ. Việc giải bài toán tìm giá trị giới hạn của tải trọng bằng phương pháp trực tiếp dẫn đến việc ứng dụng được các phương pháp, thuật toán của lý thuyết toán tối ưu [4-7].

Bài báo này giới thiệu phương pháp động (kinematic approach) để tìm giá trị tải trọng giới hạn tác dụng lên kết cấu phẳng. Phương pháp số dùng để rời rạc hóa bài toán là phương pháp phần tử hữu hạn (FEM).

2. PHƯƠNG PHÁP TRỰC TIẾP GIẢI BÀI TOÁN TÍNH LỰC GIỚI HẠN TÁC DỤNG LÊN KẾT CẤU

2.1. Phân tích trạng thái giới hạn của kết cấu

Xét một kết cấu làm từ vật liệu đàn hồi dẻo lý tưởng hoặc cứng dẻo lý tưởng chịu một hệ lực \mathbf{P} tác dụng.



Hình 1. Cơ cấu phá hủy của dầm

Giả thiết cho bài toán phân tích giới hạn kết cấu là tất cả các thành phần của hệ lực thay đổi thông qua một hệ số tỷ lệ α . Ta gọi đó là các tải trọng tỷ. Ở dạng ma trận ta có thể viết:

$$\mathbf{P} = \alpha \mathbf{P}_0 \quad (2.1)$$

Trong đó: \mathbf{P}_0 là vector lực cố định.

Khi α vẫn còn đủ nhỏ, ứng xử của kết cấu là hoàn toàn đàn hồi. Khi α tăng dần lên và đến một giá trị nào đó, trong kết cấu bắt đầu xuất hiện điểm chảy dẻo đầu tiên. Trạng thái

này gọi là giới hạn đàn hồi. Tiếp tục tăng α trong kết cấu xuất hiện các vùng dẻo, kết cấu dần dần tạo thành cơ cấu phá hủy. Trạng thái này gọi là trạng thái giới hạn, kết cấu bị phá hủy dưới tác dụng của ngoại lực. Giá trị α_{lim} tương ứng với trạng thái phá hủy gọi là hệ số tải trọng giới hạn (the limit load factor).

2.2 Xây dựng bài toán bằng phương pháp động

Như đã trình bày ở mục 1, các phương pháp trực tiếp bao gồm phương pháp cận dưới và phương pháp cận trên. Ở phương pháp cận dưới, chúng ta tìm lực lớn nhất mà kết cấu đảm bảo an toàn trong trường khả dĩ tĩnh của ứng suất. Trong phương pháp cận trên, ta tìm lực phá hủy nhỏ nhất trong trường khả dĩ động.

Dựa trên định lý cận trên hệ số an toàn có thể tìm được bằng việc giải một bài toán tối ưu cực tiểu như sau:

$$\alpha_{lim} = \min \alpha^+ \tag{2.2}$$

$$\alpha^+ = \frac{\int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \, dV}{\int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV + \int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dS}$$

$$\text{s.t.: } \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = (\nabla \dot{\mathbf{u}})_{sym} & \text{in } V \\ \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} & \text{on } S_u \\ \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV + \int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dS > 0 \end{cases}$$

Dạng chuẩn hóa của bài toán (2.2) như sau:

$$\alpha_{lim} = \min \int_V \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_p \, dV \tag{2.3}$$

$$\text{s.t.: } \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = (\nabla \dot{\mathbf{u}})_{sym} & \text{in } V \\ \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} & \text{on } S_u \\ \int_V \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dV + \int_S \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\mathbf{u}} \, dS = 1 \end{cases}$$

Bài toán (2.3) là bài toán tối ưu toán học, giải bài toán này sẽ cho ta giá trị của hệ số tải trọng giới hạn.

2.3 Giải bài toán tìm tải trọng giới hạn bằng phương pháp cận trên

Nếu tiêu chuẩn chảy dẻo Von-Mises được sử dụng thì năng lượng tiêu tán dẻo của kết cấu:

$$D^p = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_y \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}} \tag{2.4}$$

Trong đó : σ_y là ứng suất chảy dẻo của vật liệu, vector vận

tốc biến dạng $\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = [\dot{\epsilon}_{11} \ \dot{\epsilon}_{22} \ \dot{\gamma}_{12}]^T$, với bài toán ứng suất phẳng

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Rời rạc hóa bài toán (2.3) bằng phương pháp phần tử hữu hạn ta được bài toán (2.5).

$$\alpha^+ = \min \sum_{i=1}^{NG} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_y \sqrt{\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i^T \mathbf{D} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i} \tag{2.5}$$

$$\text{s.t.: } \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i - \hat{\mathbf{B}}_i \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} & i=1,..,NG \\ \sum_{i=1}^{NG} \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i^T \boldsymbol{\sigma}_i^E - 1 = 0 \end{cases}$$

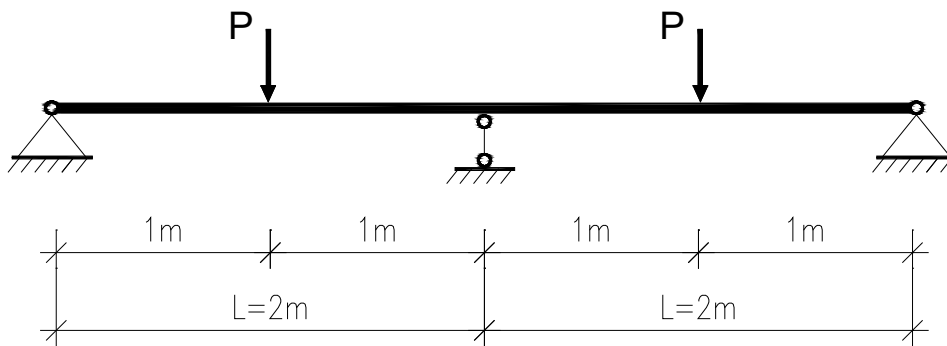
Trong đó: NG là số điểm Gauss trên toàn bộ kết cấu.

Bài toán (2.5) là một bài toán tối ưu phi tuyến có ràng buộc. Ta dùng phương pháp thừa số Lagrange chuyển bài toán (2.5) về bài toán không có ràng buộc. Sau đó giải điều kiện tối ưu Karush-Kuhn-Tucker (KKT) cho bài toán không ràng buộc bằng phương pháp Newton ta sẽ thu được lời giải tối ưu, tức là giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu trong bài toán (2.5).

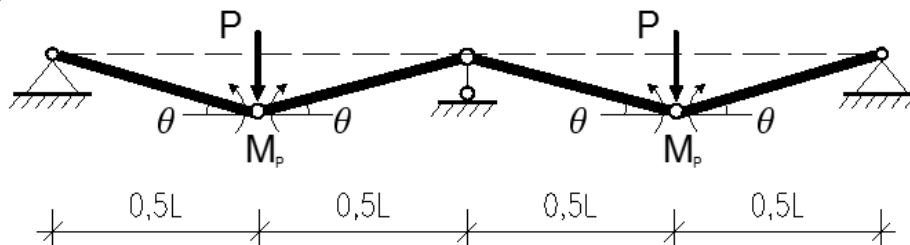
3. VÍ DỤ TÍNH TOÁN

Cho kết cấu chịu lực như hình 2.

Yêu cầu: Tính tải trọng giới hạn P cho dầm liên tục 2 nhịp với chiều dài mỗi nhịp L= 2m, mô men dẻo của dầm $M_p = 2kNm$



Hình 2: Dầm liên tục chịu tải



Hình 3: Cơ cấu phá hủy của dầm

Lời giải giải tích: Ở trạng thái giới hạn, năng lượng tiêu tán đều sẽ bằng với công ngoại lực và ta có phương trình trạng thái:

$$\dot{W}_{in} = \dot{W}_{ext} \quad (3.1)$$

$$\text{Trong đó: } \dot{W}_{in} = 2M_p \cdot \dot{\theta} + 2M_p \cdot \dot{\theta} + 2M_p \cdot \dot{\theta} = 6M_p \cdot \dot{\theta}$$

$$\dot{W}_{ext} = \frac{P.L}{2} \cdot \dot{\theta} + \frac{P.L}{2} \cdot \dot{\theta} = P.L \cdot \dot{\theta}$$

Từ phương trình trạng thái (3.1) ta có:

$$P = \frac{6M_p}{l}$$

Thay số ta có:

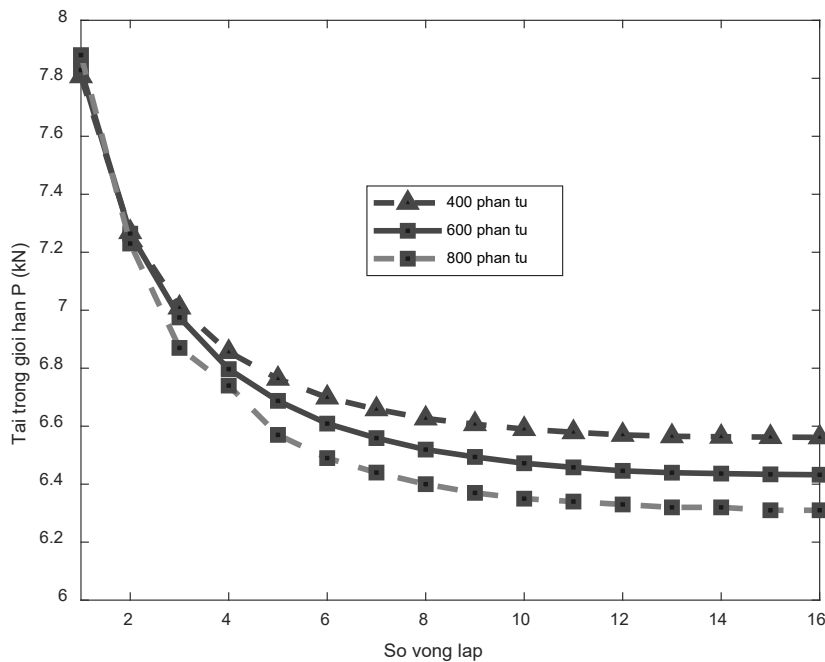
$$M_p = 2kNm, l = 2m \rightarrow P_{lim} = 6kN$$

Lời giải FEM: Rời rạc dầm với 400 phần tử tứ giác 4 nút, thuật toán giải bài toán (2.6) cho ta lực giới hạn $P = 6.45$ kN.

Nếu số phần tử tăng lên 600 và 800, kết quả là 6.36 kN và 6.25 kN tương ứng. Ta có thể tăng số lượng phần tử lên để kết quả tiến về kết quả của lời giải giải tích, tuy vậy thu được vẫn sẽ cao hơn một chút so với lời giải giải tích. Các kết quả được tổng hợp ở bảng 1.

Bảng 1: Kết quả lời giải giải tích và lời giải số.

Phương pháp	Kết quả
Giải tích	6
FEM -400 phần tử	6.45
FEM-600 phần tử	6.36
FEM- 800 phần tử	6.25



Hình 4. Đường hội tụ của hệ số tải trọng ứng với các lưới FEM khác nhau

4. KẾT LUẬN

- Bài báo trình bày phương pháp cận trên, là một trong hai phương pháp cơ bản của lý thuyết phân tích trạng thái giới hạn của kết cấu, để tính giá trị tải trọng giới hạn của kết cấu.

- Kết hợp với mô hình FEM phương pháp trực tiếp này cho phép giải được các bài toán lớn của kết cấu.

- Phương pháp này có thể mở rộng ra cho bài toán tìm tải trọng giới hạn của loại kết cấu 2D, 3D, kết cấu tấm vỏ...

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J. W. Simon and D. Weichert, "Shakedown analysis of engineering structures with limited kinematical hardening," *Int. J. Solids Struct.*, vol. 49, pp. 2177–2186, 2012, doi: 10.1016/j.ijsolstr.2012.04.039.

[2] J. W. Simon and D. Weichert, "Shakedown analysis with multidimensional loading spaces," *Comput. Mech.*, vol. 49, no. 4, pp. 477–485, 2012, doi: 10.1007/s00466-011-0656-8.

[3] N.T.Tran and M. Staat, "Limit analysis of truss structures under random strength by chance constrained programming", *Proceeding of Eccomas Congress 2024*, Scipedia, S.L.

[4] M. Heitzer and M. Staat, "Reliability Analysis of Elasto-Plastic Structures under Variable Loads," in *Inelastic Analysis of Structures under Variable Loads: Theory and Engineering Applications*, D. Weichert and G. Maier, Eds. Dordrecht: Springer Netherlands, 2000, pp. 269–288.

[5] N. T. Tran, T. N. Tran, H. G. Matthies, G. E. Stavroulakis, and M. Staat, "FEM Shakedown of uncertain structures by chance constrained programming," *PAMM*, vol. 16, no. 1, pp. 715–716, 2016, doi: 10.1002/pamm.20161034

[6] P. L. H. Ho, C. V Le, and T. Tran-Cong, "Limit state analysis of reinforced concrete slabs using an integrated radial basis function based mesh-free method," *Appl. Math. Model.*, vol. 53, no. Supplement C, pp. 1–11, 2018, doi: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2017.08.006>.

[7] C. V Le, M. Gilbert, and H. Askes, "Limit analysis of plates using the EFG method and second-order cone programming," *Analysis*, no. February, pp. 1532–1552, 2009, doi: 10.1002/nme.2535.