

# Sử dụng phương pháp thừa số Lagrange để phân tích tĩnh bài toán kết cấu dàn phẳng có nhiều thanh dàn sai lệch chiều dài do chế tạo

Using Lagrange method for static analysis of plane truss with inaccurate fabricated member lengths

> TS PHẠM VĂN ĐẠT

Khoa Xây dựng, Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội; Email: [datpv.hau@gmail.com](mailto:datpv.hau@gmail.com)

## TÓM TẮT

Kết cấu dàn là một trong những dạng kết cấu sử dụng nhiều nhất được lựa chọn làm phương án kết cấu cho các công trình vượt khẩu độ lớn. Trong thực tế thi công, các kết cấu dàn thường được chế tạo tại các nhà máy, sau đó được vận chuyển và lắp đặt tại các vị trí xây dựng công trình. Việc chế tạo các thanh dàn trong thực tế thường có sự sai lệch trong phạm vi cho phép so với chiều dài trong thiết kế và tính toán, điều này cũng được phép trong các tiêu chuẩn thi công nghiệm thu kết cấu thép hiện hành. Vì vậy, nội dung bài báo sẽ trình bày một phương pháp hiệu quả để xây dựng cách giải bài toán kết cấu dàn khi nhiều thanh dàn có chiều dài sai lệch do chế tạo.

**Từ khóa:** Kết cấu dàn; sai lệch do chế tạo; phân tích tĩnh; phương pháp thừa số Lagrange.

## ABSTRACT

Truss structure is one of the most commonly used structural solution for large span structures. In actual construction, truss structures are often manufactured in factories, then transported and installed at construction sites. The manufacturing of truss bars in practice often has deviations within the allowable range compared to the length in design and calculation, which is also allowed in current steel structure acceptance standards. Therefore, in this article, an effective method will be presented to build a solution for the truss structure with inaccurate fabricated member lengths.

**Keywords:** Truss; fabrication error; static analysis; Lagrange method.

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Kết cấu dàn [17, 24, 27] là một dạng kết cấu nhẹ, có thể vượt khẩu độ lớn, đặc biệt dạng kết cấu này có thể tạo hình các dạng kiến trúc một cách dễ dàng. Vì vậy, kết cấu dàn là một trong những dạng

kết cấu thường được các kiến trúc sư, kỹ sư sử dụng làm phương án thiết kế kết cấu cho các công trình xây dựng.

Hiện nay các kết cấu dàn thường là các kết cấu được chế tạo sẵn tại các nhà máy chế tạo thép sau đó được vận chuyển và cầu lắp tới công trường xây dựng. Vì vậy, một trong những điều không thể tránh khỏi là việc sai lệch về chiều dài của các thanh dàn giữa bản vẽ thiết kế và quá trình gia công, chế tạo các thanh dàn. Các sai lệch về chiều dài các thanh dàn trong quá trình gia công chế tạo có thể làm cho các thanh dàn ban đầu sẽ có nội lực do quá trình lắp dựng. Vì vậy, vấn đề nghiên cứu các phương pháp để phân tích, tính toán nội lực và chuyển vị trong bài toán kết cấu dàn có kể đến sự sai lệch chiều dài thanh dàn do chế tạo là rất cần thiết và đã được nghiên cứu từ rất sớm như; phương pháp lực, phương pháp chuyển vị... [3,7,10,11,12, 26]. Hiện nay các phương pháp này đã được viết trong các giáo trình, sách tham khảo dùng trong đào tạo trình độ đại học trở lên trong nhiều chuyên ngành kỹ thuật khác nhau.

Một trong những phương pháp hiệu quả để phân tích nội lực và chuyển vị của kết cấu hiện nay được sử dụng nhiều nhất là phương pháp phần tử hữu hạn. Phương pháp phần tử hữu hạn [1, 3, 7, 16] là phương pháp phân chia kết cấu ra thành các phần tử nhỏ (gọi chung là phần tử), tùy từng hình dạng của kết cấu công trình, các phần tử này có thể là các phần tử khối, các phần tử tấm hoặc các phần tử thanh. Các phần tử của kết cấu sẽ được liên kết với nhau tại các nút là các đỉnh của phần tử hoặc tại các vị trí trên các biên giữa các nút của phần tử. Với phương pháp này, thì ẩn của bài toán có thể là: Các thành phần chuyển vị (biến dạng) tại các nút (mô hình tương thích); Các thành phần nội lực (ứng suất) tại các nút (mô hình cân bằng); hoặc vừa là một số thành phần chuyển vị tại các nút và vừa là một số thành phần ứng nội lực tại các nút.

Hiện nay, khi phân tích nội lực cho các kết cấu dàn trong thiết kế thì một trong những phương pháp thường được sử dụng nhiều nhất là phương pháp phần tử hữu hạn. Các tài liệu khi viết về phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích bài toán kết cấu dàn có sự sai lệch chiều dài trong quá trình cấu tạo thường trình bày, coi sự sai lệch chiều dài của thanh trong quá trình chế tạo bằng một tải trọng nhiệt tương đương [3, 4, 8, 12, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 28]. Khi xem sự sai lệch chiều dài ban đầu bằng tải trọng nhiệt tương đương dẫn đến việc giải bài toán trở lên đơn giản hơn nhưng chưa phản ánh thực chất mối liên hệ trong cơ học của bài toán.

Trong bài báo [2] tác giả đã trình bày phương pháp phân tích bài toán kết cấu dàn khi có một thanh có chiều dài sai lệch do chế

tạo dựa trên phương pháp Lagrange và phương pháp phần tử hữu hạn, kết quả nghiên cứu đã chỉ ra rằng:

- Trường hợp 1: Khi trục của thanh có chiều dài sai lệch ban đầu cùng phương với trục  $ox'$ : khi áp dụng phương pháp nghiên cứu trong bài báo thì trong phương trình ma trận cân bằng của toàn hệ kết cấu: ma trận độ cứng mở rộng của kết cấu sẽ mở rộng thêm một hàng và một cột so với ma trận độ cứng ban đầu; số ẩn số và véc tơ tải trọng tác dụng nút sẽ mở rộng thêm một hàng;

- Trường hợp 2: Khi trục của thanh có chiều dài sai lệch ban đầu cùng phương với trục  $oy'$ : khi áp dụng phương pháp nghiên cứu trong bài báo thì trong phương trình ma trận cân bằng của toàn hệ kết cấu: ma trận độ cứng mở rộng của kết cấu sẽ mở rộng thêm một hàng và một cột so với ma trận độ cứng ban đầu; số ẩn số và véc tơ tải trọng tác dụng nút sẽ mở rộng thêm một hàng;

- Trường hợp 3: Khi trục của thanh có chiều dài sai lệch ban đầu không cùng phương với trục  $ox'$  hoặc trục  $oy'$ : khi áp dụng phương pháp nghiên cứu trong bài báo thì trong phương trình ma trận cân bằng của toàn hệ kết cấu: ma trận độ cứng mở rộng của kết cấu sẽ mở rộng thêm hai và hai cột so với ma trận độ cứng ban đầu; số ẩn số và véc tơ tải trọng tác dụng nút sẽ mở rộng thêm hai hàng

Để tiếp theo phương pháp nghiên cứu đã công bố của tác giả vào năm 2019 [2], trong bài báo này tác giả sẽ tập trung nghiên cứu phương pháp phân tích bài toán kết cấu dàn phẳng có nhiều thanh dàn sai lệch chiều dài do quá trình chế tạo khi chịu tải trọng tĩnh và vật liệu làm việc trong giai đoạn đàn hồi dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp thừa số Lagrange;

**2. ÁP DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN VÀ PHƯƠNG PHÁP LAGRANGE ĐỂ XÂY DỰNG PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CHO BÀI TOÁN KẾT CẤU DÀN CÓ NHIỀU THANH DÀN SAI LỆCH CHIỀU DÀI DO CHẾ TẠO**

Xét bài toán quy hoạch toán học với các điều kiện ràng buộc là đẳng thức như sau.

$$\text{Hàm mục tiêu: } Z = F(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \quad (1)$$

Các ràng buộc:

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0; j = 1 \div m; X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \quad (2)$$

Phương pháp thừa số Lagrange [5, 22, 25] đưa bài toán quy hoạch toán học có ràng buộc (1) về bài toán quy hoạch toán học không ràng buộc với hàm mục tiêu mở rộng:

$$L(X, \lambda) = F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \cdot g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow \min \quad (3)$$

Điều kiện cần để hàm  $L(X, \lambda)$  có cực trị:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0 & i = 1 \div n; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0 & j = 1 \div m; \end{cases} \quad (4)$$

Triển khai (3) ta có hệ phương trình gồm (n+m) phương trình độc lập với (n+m) ẩn là:  $x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ .

Xét bài toán kết cấu dàn có "m" phần tử, số bậc tự do của toàn hệ là n. Thế năng toàn phần của hệ được xác định:

$$\Pi = \sum_{e=1}^m \left[ \frac{1}{2} \{\delta^e\}^T [H]_e^T [K^e] [H]_e \{\delta^e\} - \{\delta^e\}^T [H]_e^T \{F^e\} \right] \quad (5)$$

Khi bài toán không có thanh bị sai lệch chiều dài do quá trình chế tạo, thì dựa vào nguyên lý dừng thế năng toàn phần của hệ kết cấu dàn ta xây dựng được phương trình cân bằng cho toàn hệ kết cấu dàn có dạng:

$$[K^e] \{\delta^e\} = \{F^e\} \quad (6)$$

trong đó:

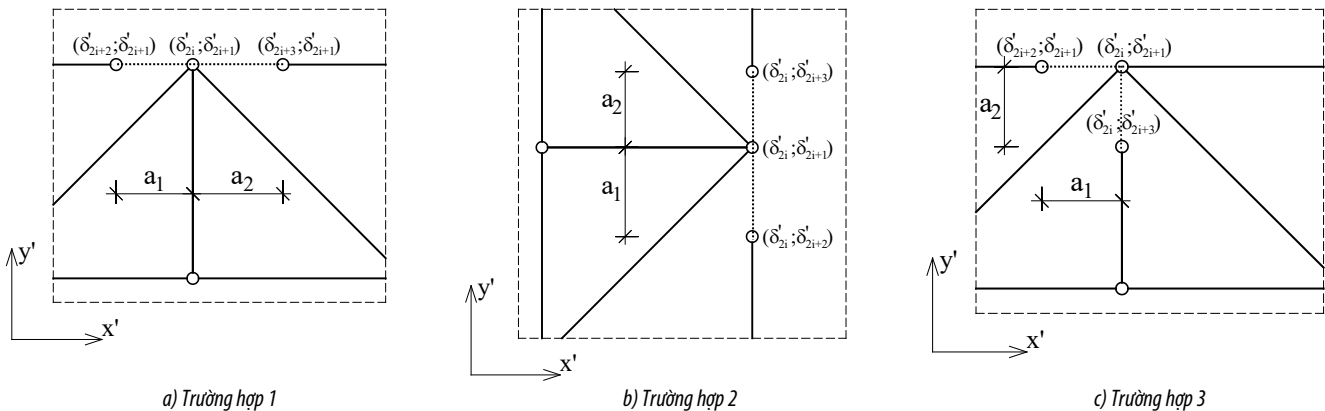
$$[K^e] = \begin{bmatrix} k'_{11} & k'_{12} & \dots & k'_{1n} \\ k'_{21} & k'_{22} & \dots & k'_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k'_{n1} & k'_{n2} & \dots & k'_{nn} \end{bmatrix};$$

$$\{\delta^e\} = \{\delta'_1 \quad \delta'_2 \quad \dots \quad \delta'_n\}^T;$$

$$\{F^e\} = \{F'_1 \quad F'_2 \quad \dots \quad F'_n\}^T$$

Bài báo trình bày chi tiết bài toán kết cấu dàn có hai thanh dàn có chiều dài sai lệch do chế tạo. Với các bài toán kết cấu dàn có nhiều hơn hai thanh dàn có chiều dài sai lệch do chế tạo với, khi tính toán cũng áp dụng tương tự các bước phân tích được trình bày trong bài báo này để phân tích.

**2.1. Bài toán kết cấu dàn có hai thanh dàn sai lệch chiều dài do chế tạo với hai trục thanh dàn có phương trùng với phương của một trong hai trục tọa độ của hệ tọa độ tổng thể**



Hình 1. Trường hợp hai thanh dàn sai lệch có trục thanh trùng với phương của một trong hai trục tọa độ của hệ tọa độ tổng thể

Trong nội dung bài báo tác giả trình bày chi tiết trường hợp 1, các trường hợp còn lại sẽ được thực hiện tương tự. Xét bài toán kết cấu dàn có hai thanh dàn mà trục của hai thanh dàn này trùng với một trong hai trục hệ tọa độ tổng thể (như hình 1a).

- Các phương trình bổ sung của bài toán theo điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases} g_1(\delta) = -\delta'_{2i} + \delta'_{2i+2} - a_1 = 0 \\ g_2(\delta) = \delta'_{2i} - \delta'_{2i+3} - a_2 = 0 \end{cases} \quad (7)$$



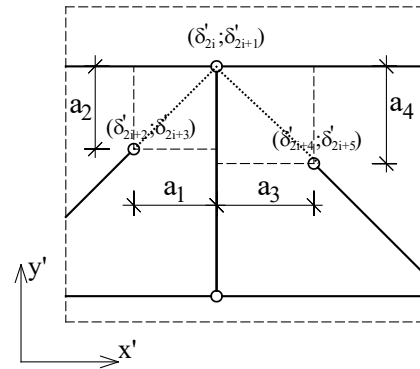
$$\begin{bmatrix}
 k'_{11} & k'_{12} & \dots & k'_{1(2i)} & k'_{1(2i+1)} & k'_{1(2i+2)} & k'_{1(2i+3)} & k'_{1(2i+4)} & \dots & k'_{1(n+2)} & k'_{1(n+3)} & 0 & 0 & 0 \\
 k'_{21} & k'_{22} & \dots & k'_{2(2i)} & k'_{2(2i+1)} & k'_{2(2i+2)} & k'_{2(2i+3)} & k'_{2(2i+4)} & \dots & k'_{2(n+2)} & k'_{2(n+3)} & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 k'_{(2i)1} & k'_{(2i)2} & \dots & k'_{(2i)(2i)} & k'_{(2i)(2i+1)} & k'_{(2i)(2i+2)} & k'_{(2i)(2i+3)} & k'_{(2i)(2i+4)} & \dots & k'_{(2i)(n+2)} & k'_{(2i)(n+3)} & 0 & 1 & 0 \\
 k'_{(2i+1)1} & k'_{(2i+1)2} & \dots & k'_{(2i+1)(2i)} & k'_{(2i+1)(2i+1)} & k'_{(2i+1)(2i+2)} & k'_{(2i+1)(2i+3)} & k'_{(2i+1)(2i+4)} & \dots & k'_{(2i+1)(n+2)} & k'_{(2i+1)(n+3)} & -1 & 0 & -1 \\
 k'_{(2i+2)1} & k'_{(2i+2)2} & \dots & k'_{(2i+2)(2i)} & k'_{(2i+2)(2i+1)} & k'_{(2i+2)(2i+2)} & k'_{(2i+2)(2i+3)} & k'_{(2i+2)(2i+4)} & \dots & k'_{(2i+2)(n+2)} & k'_{(2i+2)(n+3)} & 1 & 0 & 0 \\
 k'_{(2i+3)1} & k'_{(2i+3)2} & \dots & k'_{(2i+3)(2i)} & k'_{(2i+3)(2i+1)} & k'_{(2i+3)(2i+2)} & k'_{(2i+3)(2i+3)} & k'_{(2i+3)(2i+4)} & \dots & k'_{(2i+3)(n+2)} & k'_{(2i+3)(n+3)} & 0 & -1 & 0 \\
 k'_{(2i+4)1} & k'_{(2i+4)2} & \dots & k'_{(2i+4)(2i)} & k'_{(2i+4)(2i+1)} & k'_{(2i+4)(2i+2)} & k'_{(2i+4)(2i+3)} & k'_{(2i+4)(2i+4)} & \dots & k'_{(2i+4)(n+2)} & k'_{(2i+4)(n+3)} & 0 & 0 & 1 \\
 \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 k'_{(n+2)1} & k'_{(n+2)2} & \dots & k'_{(n+2)(2i)} & k'_{(n+2)(2i+1)} & k'_{(n+2)(2i+2)} & k'_{(n+2)(2i+3)} & k'_{(n+2)(2i+4)} & \dots & k'_{(n+2)(n+2)} & k'_{(n+2)(n+3)} & 0 & 0 & 0 \\
 k'_{(n+3)1} & k'_{(n+3)2} & \dots & k'_{(n+3)(2i)} & k'_{(n+3)(2i+1)} & k'_{(n+3)(2i+2)} & k'_{(n+3)(2i+3)} & k'_{(n+3)(2i+4)} & \dots & k'_{(n+3)(n+2)} & k'_{(n+3)(n+3)} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \delta'_1 \\
 \delta'_1 \\
 \vdots \\
 \delta'_{(2i)} \\
 \delta'_{(2i+1)} \\
 \delta'_{(2i+2)} \\
 \delta'_{(2i+3)} \\
 \delta'_{(2i+4)} \\
 \vdots \\
 \delta'_{(n+2)} \\
 \delta'_{(n+3)} \\
 \lambda_1 \\
 \lambda_2 \\
 \lambda_3
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F'_1 \\
 F'_2 \\
 \vdots \\
 F'_{(2i)} \\
 F'_{(2i+1)} \\
 F'_{(2i+2)} \\
 F'_{(2i+3)} \\
 F'_{(2i+4)} \\
 \vdots \\
 F'_{(n+2)} \\
 F'_{(n+3)} \\
 a_1 \\
 a_2 \\
 a_3
 \end{bmatrix}
 \quad (12)$$

**2.3. Bài toán kết cấu dàn có hai thanh dàn sai lệch chiều dài do chế tạo với hai trục thanh dàn không có phương trùng với phương của một trong hai trục tọa độ của hệ tọa độ tổng thể**

- Các phương trình bổ sung của bài toán theo điều kiện ràng buộc:

$$\begin{cases}
 -\delta'_{2i} + \delta'_{2i+2} - a_1 = 0 \\
 -\delta'_{2i+1} + \delta'_{2i+3} - a_2 = 0 \\
 -\delta'_{2i+4} + \delta'_{2i} - a_3 = 0 \\
 -\delta'_{2i+1} + \delta'_{2i+5} - a_4 = 0
 \end{cases}
 \quad (13)$$

- Áp dụng phương pháp thừa số Lagrange và phương pháp phần tử hữu hạn đã được trình bày trong bài báo [2], phương trình cân bằng cho bài toán có thể được viết như sau:



**Hình 3.** Trường hợp hai thanh dàn sai lệch có trục thanh dàn sai lệch không trùng với phương của một trong hai trục tọa độ của hệ tọa độ tổng thể

$$\begin{bmatrix}
 k'_{11} & \dots & k'_{1(2i)} & k'_{1(2i+1)} & k'_{1(2i+2)} & k'_{1(2i+3)} & k'_{1(2i+4)} & k'_{1(2i+5)} & \dots & k'_{1(n+4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 k'_{(2i)1} & \dots & k'_{(2i)(2i)} & k'_{(2i)(2i+1)} & k'_{(2i)(2i+2)} & k'_{(2i)(2i+3)} & k'_{(2i)(2i+4)} & k'_{(2i)(2i+5)} & \dots & k'_{(2i)(n+4)} & -1 & 0 & 1 & 0 \\
 k'_{(2i+1)1} & \dots & k'_{(2i+1)(2i)} & k'_{(2i+1)(2i+1)} & k'_{(2i+1)(2i+2)} & k'_{(2i+1)(2i+3)} & k'_{(2i+1)(2i+4)} & k'_{(2i+1)(2i+5)} & \dots & k'_{(2i+1)(n+4)} & 0 & -1 & 0 & -1 \\
 k'_{(2i+2)1} & \dots & k'_{(2i+2)(2i)} & k'_{(2i+2)(2i+1)} & k'_{(2i+2)(2i+2)} & k'_{(2i+2)(2i+3)} & k'_{(2i+2)(2i+4)} & k'_{(2i+2)(2i+5)} & \dots & k'_{(2i+2)(n+4)} & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 k'_{(2i+3)1} & \dots & k'_{(2i+3)(2i)} & k'_{(2i+3)(2i+1)} & k'_{(2i+3)(2i+2)} & k'_{(2i+3)(2i+3)} & k'_{(2i+3)(2i+4)} & k'_{(2i+3)(2i+5)} & \dots & k'_{(2i+3)(n+4)} & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 k'_{(2i+4)1} & \dots & k'_{(2i+4)(2i)} & k'_{(2i+4)(2i+1)} & k'_{(2i+4)(2i+2)} & k'_{(2i+4)(2i+3)} & k'_{(2i+4)(2i+4)} & k'_{(2i+4)(2i+5)} & \dots & k'_{(2i+4)(n+4)} & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 k'_{(2i+5)1} & \dots & k'_{(2i+5)(2i)} & k'_{(2i+5)(2i+1)} & k'_{(2i+5)(2i+2)} & k'_{(2i+5)(2i+3)} & k'_{(2i+5)(2i+4)} & k'_{(2i+5)(2i+5)} & \dots & k'_{(2i+5)(n+4)} & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 k'_{(n+4)1} & \dots & k'_{(n+4)(2i)} & k'_{(n+4)(2i+1)} & k'_{(n+4)(2i+2)} & k'_{(n+4)(2i+3)} & k'_{(n+4)(2i+4)} & k'_{(n+4)(2i+5)} & \dots & k'_{(n+4)(n+4)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \dots & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 \delta'_1 \\
 \vdots \\
 \delta'_{(2i)} \\
 \delta'_{(2i+1)} \\
 \delta'_{(2i+2)} \\
 \delta'_{(2i+3)} \\
 \delta'_{(2i+4)} \\
 \delta'_{(2i+5)} \\
 \vdots \\
 \delta'_{(n+4)} \\
 \lambda_1 \\
 \lambda_2 \\
 \lambda_3 \\
 \lambda_4
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 F'_1 \\
 \vdots \\
 F'_{(2i)} \\
 F'_{(2i+1)} \\
 F'_{(2i+2)} \\
 F'_{(2i+3)} \\
 F'_{(2i+4)} \\
 F'_{(2i+5)} \\
 \vdots \\
 F'_{(n+4)} \\
 a_1 \\
 a_2 \\
 a_3 \\
 a_4
 \end{bmatrix}
 \quad (13)$$

**3. SỬ DỤNG PHẦN MỀM MATLAB TỰ ĐỘNG HÓA PHÂN TÍCH TÍNH BÀI TOÁN KẾT CẤU DÀN CÓ NHIỀU THANH DÀN SAI LỆCH CHIỀU DÀI DO CHẾ TẠO THEO PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN**

Trên nguyên tắc đã trình bày ở mục 2 trong bài báo, với các bài toán có số thanh dàn sai lệch chiều dài do chế tạo nhiều hơn hai thanh sẽ được áp dụng tương tự. Để công việc tính toán được tự động hóa, trong nội dung phần này của bài báo sẽ trình bày các bước thực hiện phân tích bài toán kết cấu dàn trong trường hợp có thanh dàn sai lệch do chế tạo bằng việc áp dụng phần mềm Matlab

[13, 14, 15]. Sơ đồ khối thực hiện các bước phân tích của bài toán được thể hiện hình 4.

**Khối thứ 1:** Khai báo các biến số và hằng số là các thông số vật liệu, thông số hình học của kết cấu: Căn cứ vào các số liệu hình học của kết cấu cũng như các thông.

**Khối thứ 2:** Thiết lập mã hiệu phần tử, mã hiệu các bậc tự do và cách ghép nối các phần tử với nhau.

**Khối thứ 3:** Thiết lập ma trận độ cứng của các phần tử trong hệ trục tọa độ chung và ma trận độ cứng tổng thể của toàn kết cấu: Ở khối này, ta xác định được độ cứng của từng phần tử, sau đó ghép





Bảng 2. Kết quả phân tích nội lực trong các thanh dầm

Nội lực	N <sub>1</sub> (kN)	N <sub>2</sub> (kN)	N <sub>3</sub> (kN)	N <sub>4</sub> (kN)	N <sub>5</sub> (kN)	N <sub>6</sub> (kN)	N <sub>7</sub> (kN)	N <sub>8</sub> (kN)	N <sub>9</sub> (kN)	N <sub>10</sub> (kN)	N <sub>11</sub> (kN)
Phương pháp để xuất	-72,915	-69,104	-59,088	-78,471	38,056	26,387	12,498	18,025	-6,251	9,581	2,082
Phần mềm Sap2000	-72,93	-69,13	-59,11	-78,49	38,08	26,48	12,498	18,05	-6,24	9,50	2,09

Theo kết quả phân tích giữa phương pháp để xuất của bài báo và phần mềm Sap2000 (bảng 3, bảng 4) cho thấy, khi áp dụng hàm số Lagrange để giải ví dụ 1 theo phương pháp phần tử hữu hạn cho kết quả hoàn toàn tin cậy.

## 5. KẾT LUẬN

Qua các kết quả nghiên cứu trong bài báo đã trình bày ở trên có thể dẫn đến một số kết luận sau đây:

- Việc áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn và kết hợp phương pháp thừa số Lagrange có thể phân tích được bài toán kết cấu dầm có nhiều thanh dầm có chiều dài thanh dầm sai lệch do chế tạo mà không phải sử dụng phương pháp tải trọng nhiệt tương đương như một số tài liệu khác đã trình bày.

- Phương pháp nghiên cứu trong bài báo do không chịu tải trọng nhiệt tương đương nên khi áp dụng vào các bảo toán có yếu tố phi tuyến vật liệu sẽ không bị ảnh hưởng do việc khai báo đặc tính vật liệu như sử dụng phương pháp tải trọng tương đương.

- Phương pháp nghiên cứu trong bài báo, trong thực hành tính toán có thể được lập trình để tự động hóa phân tích nên có thể áp dụng cho các bài toán kết cấu dầm có số lượng phần tử nhiều, liên kết điều kiện biên phức tạp cũng có thể áp dụng một cách dễ dàng.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

### Tài liệu tiếng Việt

[1] Phạm Văn Đạt (2017), *Tính kết cấu hệ thanh theo phương pháp phần tử hữu hạn*, NXB Xây dựng.

[2] Phạm Văn Đạt (2019), Phân tích tĩnh kết cấu dầm phẳng trong trường hợp có một thanh dầm sai lệch chiều dài do chế tạo theo phương pháp phần tử hữu hạn, Tạp chí Xây dựng 12.2019 (16-81).

[3] Võ Như Cầu (2004), *Tính kết cấu theo phương pháp ma trận*, NXB Xây dựng.

[4] Võ Như Cầu (2005), *Tính kết cấu theo phương pháp phần tử hữu hạn*, NXB Xây dựng.

[5] Lê Xuân Huỳnh (2006), *Tính toán kết cấu theo lý thuyết tối ưu*, NXB Khoa học và kỹ thuật.

[6] Vũ Đình Lai, Nguyễn Xuân Lựu, Bùi Đình Nghi (2002), *Sức bền vật liệu*, NXB Giao thông vận tải.

[7] Nguyễn Văn Liên, Nguyễn Phương Thành, Đinh Trọng Bằng (2003), *Sức bền vật liệu*, NXB Xây dựng.

[8] Chu Quốc Thắng (1997), *Phương pháp phần tử hữu hạn*, NXB Khoa học và kỹ thuật.

[9] Nguyễn Trâm (2013), *Phương pháp phần tử hữu hạn và dải hữu hạn*, NXB Xây dựng.

[10] Lê Thọ Trình (2003), *Cơ học kết cấu*, Tập I - Hệ tĩnh định, NXB Khoa học và kỹ thuật.

[11] Lê Thọ Trình (2003), *Cơ học kết cấu*, Tập II - Hệ siêu tĩnh, NXB Khoa học và kỹ thuật.

### Tài liệu dịch

[12] T.Karamanxki (1985), *Phương pháp số trong cơ học kết cấu*, Nguyễn Tiến Cường dịch, NXB Khoa học Kỹ thuật.

### Tài liệu tiếng Anh

[13] A.J.M Ferreira (2009), *Matlab codes for Finite Element Analysis*, Springer.

[14] B.Reza, S.Farhad (2013), *Advanced Finite Element Method*, Public web site for the graduate core course ASEN 6367.

[15] C. Felippa (2016), *Introduce Finite Element Method*, Public web site for the graduate core course ASEN 5007.

[16] D.V. Hutton (2004), *Fundamentals of Finite Element Analysis*, The McGraw-Hill Companies.

[17] H.D. Ölmez, Cem Topkaya (2011), *A numerical study on special truss moment frames with Vierendeel openings*, Journal of Constructional Steel Research 67, p.667-677.

[18] J. C. McCormac (2007), *Structural Analysis Using Classical and Matrix Methods*, John Wiley & Sons, Inc.

[19] K.J. Bathe (1996), *Finite Element Procedure*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458.

[20] R.L. Taylor (2000), *The Finite Element Method - Volume 1*, Butterworth-Heinemann Publishing.

[21] R.L. Taylor (2000), *The Finite Element Method - Volume 2*, Butterworth-Heinemann Publishing.

[22] R.L. Taylor (2000), *The Finite Element Method - Volume 3*, Butterworth-Heinemann Publishing.

[23] S. R. Singiresu (2009), *Engineering Optimization Theory and Practice*, John Wiley & Sons, Inc.

[24] S.Z.Shen, T.T.Lan (2001), *A Review of the development of Spatial Structures*, China International Journal of Space Structures (3), p.157-172.

[25] W. Ch. Peter, K. Anders (2009), *An Introduction to Structural Optimization*, Springer Science + Business Media B.V.

[26] W. Alan (2009), *Structural Analysis in theory and practice*, Oxford OX2 8DP, UK.

### Tài liệu tiếng Trung

[27] 陈军明(2000), *单层网壳结构非线性静力,动力及稳定性研究*, 武汉工业大学博士学位论文.

### Tài liệu hướng dẫn sử dụng phần mềm

[28] Computers and Structures, Inc (2016), *Introductory Tutorial for SAP2000 Linear and Nonlinear Static and Dynamic Analysis and Design*, Computers and Structures, Inc. Berkeley, California, USA.