

# Phân tích ổn định tới hạn của tấm phân lớp chức năng dưới tác dụng của tải trọng do nhiệt độ theo lý thuyết tiếp cận 3 chiều

A quasi-3d inverse trigonometric shear deformation theory for the critical buckling analysis of functionally graded plates under thermal loads

> TS NGUYỄN VĂN HẬU

Giảng viên, Khoa Xây Dựng, Trường Đại Học Sư Phạm Kỹ Thuật Tp.HCM

Email: haunv@hcmute.edu.vn

Tel: 0908270222

## TÓM TẮT

Bài báo này trình bày lý thuyết tiếp cận 3 chiều để phân tích tấm phân lớp chức năng dưới tác dụng của tải trọng do nhiệt độ. Đây là lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến thành phần biến dạng theo chiều dày tấm. Phương trình cân bằng của tấm được thiết lập theo nguyên lý biến phân Hamilton. Lời giải Navier được áp dụng cho tấm tựa đơn và tính chính xác của mô hình phân tích được đánh giá và so sánh với các lời giải trước đó. Kết quả số trong phân tích tấm phân lớp chức năng tựa đơn dùng để đánh giá ổn định tới hạn của tấm do hiệu ứng thay đổi đặc trưng vật liệu, tỉ số cạnh trên chiều dày tấm, tỉ số hai cạnh và quy luật truyền nhiệt theo chiều dày tấm.

**Từ khóa:** Tấm phân lớp chức năng, phân tích ổn định.

## ABSTRACT

This paper presents a quasi-3D theory for the buckling analysis of functionally graded plates under thermal loads. This theory accounts for both shear deformation and thickness stretching effects by an inverse trigonometric variation of all displacements through the thickness. Equations of motion are derived from Hamilton's principle. The Navier-type solutions are obtained for simply-supported boundary conditions, and exact formulas are proposed and compared with other solutions and those predicted by higher-order shear deformation theories. Numerical results are obtained for simply-supported functionally graded plates to investigate the effects of the power-law index, side-to-thickness, side-to-side ratio and the different temperature changes on the buckling responses.

**Keywords:** Functionally graded plates, buckling analysis

### 1. Giới thiệu

Vật liệu phân lớp chức năng (*Functionally Graded Material* (FGM)) là loại vật liệu composite đặc biệt có các đặc trưng cơ lý thay đổi liên tục theo yêu cầu mong muốn [1]. Chính vì vậy, chúng được sử dụng rất rộng rãi trong nhiều lĩnh vực như: Xây dựng, Cơ khí, Hàng không vũ trụ, Ô tô, Tàu thủy... Do yêu cầu ứng dụng FGM trong kỹ thuật ngày càng tăng nên đòi hỏi phải có nhiều nghiên cứu, nhất là các mô hình lý thuyết tính toán cho các phân tích ứng xử của loại vật liệu này. Có rất nhiều nghiên cứu về FGM đã được các nhà nghiên cứu bằng các lý thuyết khác nhau, trong đó phân tích ứng xử tấm FGM theo lý thuyết tiếp cận 3 chiều là một trong những lý thuyết phân tích hiệu quả về kết cấu tấm. Một số lý thuyết tính toán khác như: Lý thuyết cổ điển (CPT) ([2]) bỏ qua

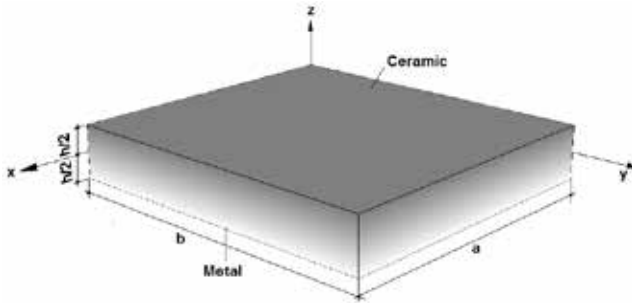
ảnh hưởng của biến dạng cắt, lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) ([3-5]) có kể đến thành phần biến dạng cắt nhưng căn hệ số hiệu chỉnh cắt, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) ([6-10]) không căn hệ số hiệu chỉnh cắt nhưng bỏ qua thành phần biến dạng theo chiều dày tấm. Để khắc phục các nhược điểm trên lý thuyết tiếp cận 3 chiều được phát triển dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao nhưng đồng thời xét đến trường biến dạng theo chiều dày tấm, điều này rất có ý nghĩa khi phân tích cho bài toán tấm dày.

Mục tiêu của nghiên cứu này là phát triển lý thuyết tiếp cận 3 chiều cho phân tích ổn định tới hạn của tấm FGM dưới tác dụng của tải trọng do nhiệt độ. Trường chuyển vị của tấm được xấp xỉ dựa trên các thành phần chuyển vị chưa biết tại mặt trung bình

của tấm, trong đó hàm biến dạng cắt được lựa chọn đóng vai trò quan trọng trong phân tích kết quả bài toán. Lời giải giải tích được sử dụng để phân tích ổn định cho tấm hình chữ nhật có liên kết tựa đơn. Các ví dụ số được áp dụng để kiểm chứng mức độ chính xác của nghiên cứu bài báo so với các kết quả đã được công bố.

**2. Cơ sở lý thuyết**

Xét tấm hình chữ nhật như Hình 1 có cạnh dài là  $a$ , cạnh ngắn là  $b$ , chiều cao là  $h$  được chế tạo từ gốm và kim loại với các đặc trưng hữu hiệu thay đổi liên tục theo chiều dày tấm và theo quy luật hàm mật độ thể tích.



Hình 1. Mô hình tấm FGM.

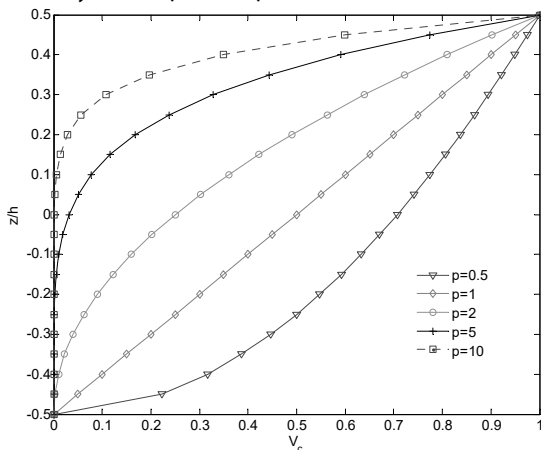
Các đặc trưng hữu hiệu được xác định:

$$P(z) = (P_c - P_m)V_c(z) + P_m \tag{1}$$

Trong đó  $P_c$  và  $P_m$  là mô đun đàn hồi Young ( $E$ ), hệ số Poisson ( $\nu$ ) của thành phần gốm (ceramic) và kim loại (metal) tại mặt trên và mặt dưới của tấm. Hàm mật độ gốm ( $V_c$ ) được xác định theo quy luật hàm lũy thừa:

$$V_c(z) = \left(\frac{2z+h}{2h}\right)^p \text{ với } z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right] \tag{2}$$

Với  $p$  là hệ số đặc trưng vật liệu. Sự phân bố vật liệu của  $V_c$  theo chiều dày tấm được thể hiện như Hình 2.



Hình 2. Sự phân bố vật liệu theo chiều dày tấm.

**2.1. Trường chuyển vị và biến dạng**

Trường chuyển vị của tấm theo lý thuyết tiếp cận 3 chiều:

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z) &= u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x} + f(z)\theta_x(x, y) \\ u_2(x, y, z) &= v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} + f(z)\theta_y(x, y) \\ u_3(x, y, z) &= w(x, y) + g(z)\theta_z(x, y) \end{aligned} \tag{3}$$

Trong đó  $f(z)$  là hàm biến dạng cắt ([11]):

$$f(z) = h \arctan\left(\frac{rz}{h}\right) - \frac{16rz^3}{3h^2(r^2 + 4)} \tag{4}$$

$u, v, w, \theta_x, \theta_y$  và  $\theta_z$  là các thành phần chuyển vị tại mặt trung bình của tấm;  $g(z) = f'(z)$ .

Trường biến dạng của tấm được xác định:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} + z\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + f\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} + g'\boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \tag{5a}$$

$$\boldsymbol{\gamma} = g\boldsymbol{\gamma}^{(0)} \tag{5b}$$

Trong đó

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(0)} \\ \varepsilon_{yy}^{(0)} \\ \gamma_{xy}^{(0)} \\ \varepsilon_{zz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(1)} \\ \varepsilon_{yy}^{(1)} \\ \gamma_{xy}^{(1)} \\ \varepsilon_{zz}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(2)} \\ \varepsilon_{yy}^{(2)} \\ \gamma_{xy}^{(2)} \\ \varepsilon_{zz}^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ 0 \end{Bmatrix}, \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^{(3)} \\ \varepsilon_{yy}^{(3)} \\ \gamma_{xy}^{(3)} \\ \varepsilon_{zz}^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \theta_z \end{Bmatrix} \tag{6b}$$

$$\boldsymbol{\gamma}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^{(0)} \\ \gamma_{yz}^{(0)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \theta_x + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{Bmatrix} \tag{6c}$$

**2.2. Phương trình năng lượng**

Nguyên lý biến phân Hamilton của một hệ được xác định:

$$0 = \int_0^T (\delta U + \delta V) dt \tag{7}$$

Trong đó  $\delta U, \delta V$  là biến phân năng lượng biến dạng, biến phân thế năng của tấm. Thành phần biến phân năng lượng biến dạng được xác định:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{A-h/2}^{h/2} \int (\sigma_{xx}\delta\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\delta\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\delta\varepsilon_{zz} + \sigma_{xy}\delta\gamma_{xy} \\ &+ \sigma_{xz}\delta\gamma_{xz} + \sigma_{yz}\delta\gamma_{yz}) dA dz \\ &= \int_A \left[ N_{xx} \frac{\partial \delta u}{\partial x} - M_{xx} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x^2} + P_{xx} \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial \delta v}{\partial y} \right. \\ &- M_{yy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial y^2} + P_{yy} \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial y} + R_{zz} \delta \theta_z + N_{xy} \left( \frac{\partial \delta u}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) \\ &- 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w}{\partial x \partial y} + P_{xy} \left( \frac{\partial \delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \delta \theta_y}{\partial x} \right) \\ &\left. + Q_x \left( \delta \theta_x + \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial x} \right) + Q_y \left( \delta \theta_y + \frac{\partial \delta \theta_z}{\partial y} \right) \right] dA \end{aligned} \tag{8}$$

Trong đó  $dA = dx dy$ ;  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{R}$  và  $\mathbf{Q}$  là các thành phần nội lực trong tấm:

$$(N_{xx}, N_{yy}, N_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (9a)$$

$$(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} z (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (9b)$$

$$(P_{xx}, P_{yy}, P_{xy}) = \int_{-h/2}^{h/2} f (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}) dz \quad (9c)$$

$$R_{zz} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{zz} g' dz \quad (9d)$$

$$(Q_x, Q_y) = \int_{-h/2}^{h/2} g (\sigma_{xz}, \sigma_{yz}) dz \quad (9e)$$

Thành phần biến phân thế năng:

$$\delta V = - \int_A \bar{N} \delta(w + g \theta_z) dA \quad (10)$$

Trong đó  $\bar{N}$  là thành phần lực màng:

$$\bar{N} = N_{xx}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_{yy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (11)$$

Thay thế  $\delta U$  và  $\delta V$  từ (8) và (10) vào (7). Phương trình cân bằng của hệ được xác định:

$$\delta u : \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (12a)$$

$$\delta v : \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (12b)$$

$$\delta w : \frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + \bar{N}(w) = 0 \quad (12c)$$

$$\delta \theta_x : \frac{\partial P_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial P_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (12d)$$

$$\delta \theta_y : \frac{\partial P_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial P_{yy}}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (12e)$$

$$\delta \theta_z : \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - R_{zz} + g \bar{N}(w) = 0 \quad (12f)$$

Phương trình ứng xử của tấm FGM:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_{yy} - \alpha_y \Delta T \\ \varepsilon_{zz} - \alpha_z \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} \quad (13a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & 0 \\ 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (13b)$$

Trong đó

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \frac{(1-\nu(z))E(z)}{(1-2\nu(z))(1+\nu(z))} \quad (14a)$$

$$C_{12} = C_{13} = C_{23} = \frac{\nu(z)E(z)}{(1-2\nu(z))(1+\nu(z))} \quad (14b)$$

$$C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \quad (14c)$$

$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  và  $\alpha_{xy}$  là các hệ số giãn nở nhiệt; Thành phần biến dạng nhiệt độ theo chiều dày tấm:

$$\Delta T = T(x, y, z) - T_0 \quad (15)$$

Trong đó  $T_0$  là nhiệt độ ban đầu;  $T(x, y, z)$  là nhiệt độ khảo sát [12]:

$$T(x, y, z) = T_1(x, y) + \frac{z}{h} T_2(x, y) + \frac{\psi(z)}{h} T_3(x, y) \quad (16)$$

Trong đó  $T_1, T_2$  và  $T_3$  là nhiệt độ sau cùng.

Thay thế (6a) và (6b) vào (13a) và kết hợp với (9a), (9b), (9c), (9d) thu được mối quan hệ giữa lực và biến dạng:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \\ \mathbf{P} \\ \mathbf{R} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{B}^s & \mathbf{X} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} & \mathbf{D}^s & \mathbf{Y} \\ \mathbf{B}^s & \mathbf{D}^s & \mathbf{H}^s & \mathbf{Y}^s \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{Y}^T & \mathbf{Y}^{sT} & \mathbf{Z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{(0)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{N}^H \\ \mathbf{M}^H \\ \mathbf{P}^H \\ \mathbf{R}^H \end{Bmatrix} \quad (17)$$

Trong đó  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{B}^s, \mathbf{D}^s, \mathbf{H}^s, \mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}^s, \mathbf{Z}$  là các thành phần độ cứng của tấm FGM được xác định:

$$(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{B}^s, \mathbf{D}^s, \mathbf{H}^s) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, f, zf, f^2) \mathbf{C}(z) dz \quad (18a)$$

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Y}^s, \mathbf{Z}) = \int_{-h/2}^{h/2} (g', zg', g'f, g'^2) \mathbf{C}(z) dz \quad (18b)$$

Tương tự cho các thành phần  $\mathbf{N}^H, \mathbf{M}^H, \mathbf{P}^H, \mathbf{R}^H$ :

$$\begin{Bmatrix} N_{xx}^H \\ N_{yy}^H \\ N_{xy}^H \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \alpha_z \Delta T \\ \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} dz \quad (19a)$$

$$\begin{Bmatrix} M_{xx}^H \\ M_{yy}^H \\ M_{xy}^H \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \alpha_z \Delta T \\ \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} z dz \quad (19b)$$

$$\begin{Bmatrix} P_{xx}^H \\ P_{yy}^H \\ P_{xy}^H \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \alpha_z \Delta T \\ \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} f(z) dz \quad (19c)$$

$$R^H = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \Delta T \\ \alpha_y \Delta T \\ \alpha_z \Delta T \\ \alpha_{xy} \Delta T \end{Bmatrix} g'(z) dz \quad (19d)$$

Thành phần lực cắt được xác định bằng cách sử dụng các phương trình (6c), (13b) và (9e):

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{55}^s & 0 \\ 0 & A_{44}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x + \frac{\partial \theta_z}{\partial x} \\ \theta_y + \frac{\partial \theta_z}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (20)$$

Trong đó  $A_{44}^s, A_{55}^s$  là các thành phần độ cứng cắt của tấm:

$$A_{44}^s = A_{55}^s = \int_{-h/2}^{h/2} g^2 C_{44}(z) dz = \int_{-h/2}^{h/2} g^2 C_{55}(z) dz \quad (21)$$

Thay thế (17) và (20) vào (12) thu được hệ phương trình để giải cho bài toán tấm FGM.

**3. Lời giải giải tích**

Lời giải Navier cho tấm FGM như Hình 1 có bốn biên tựa đơn với các thành phần chuyển vị được xấp xỉ bằng các chuỗi lượng giác kép:

$$u(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y \quad (22a)$$

$$v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y \quad (22b)$$

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y \quad (22c)$$

$$\theta_x(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos \lambda x \sin \mu y \quad (22d)$$

$$\theta_y(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin \lambda x \cos \mu y \quad (22e)$$

$$\theta_z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Z_{mn} \sin \lambda x \sin \mu y \quad (22f)$$

Trong đó  $\lambda = m\pi / a, \mu = n\pi / b$ ;  $m, n$  là số sóng dao động theo phương  $x, y$ ;  $U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}, Z_{mn}$  là các biên độ của sóng. Thay thế (22) vào phương trình chuyển động thu được phương trình dạng ma trận:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{0} \quad (23)$$

Trong đó

$$\begin{aligned} k_{11} &= A_{11} \lambda^2 + A_{66} \mu^2, k_{12} = (A_{12} + A_{66}) \lambda \mu \\ k_{13} &= -B_{11} \lambda^3 - (B_{12} + 2B_{66}) \lambda \mu^2, k_{14} = B_{11} \lambda^2 + B_{66} \mu^2 \\ k_{15} &= (B_{12}^s + B_{66}^s) \lambda \mu, k_{16} = -\lambda X_{13}, k_{22} = A_{66} \lambda^2 + A_{22} \mu^2 \\ k_{23} &= -B_{22} \mu^3 - (B_{12} + 2B_{66}) \lambda^2 \mu, k_{24} = (B_{12}^s + B_{66}^s) \lambda \mu \\ k_{25} &= B_{22} \mu^2 + B_{66} \lambda^2, k_{26} = -\mu X_{23} \\ k_{33} &= D_{11} \lambda^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) \lambda^2 \mu^2 + D_{22} \mu^4 + \alpha \\ k_{34} &= -D_{11} \lambda^3 - (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \lambda \mu^2 \\ k_{35} &= -D_{22} \mu^3 - (D_{12}^s + 2D_{66}^s) \lambda^2 \mu \\ k_{36} &= Y_{13} \lambda^2 + Y_{23} \mu^2, k_{44} = H_{11} \lambda^2 + H_{66} \mu^2 + A_{55}^s \\ k_{45} &= (H_{12}^s + H_{66}^s) \lambda \mu \\ k_{46} &= \lambda (A_{55}^s - Y_{13}), k_{55} = H_{66}^s \lambda^2 + H_{22}^s \mu^2 + A_{44}^s \\ k_{56} &= \mu (A_{44}^s - Y_{23}), k_{66} = \lambda^2 A_{55}^s + \mu^2 A_{44}^s + Z_{33} \\ \alpha &= N_0 (R_1 \lambda^2 + R_2 \mu^2) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\mathbf{U} = \{U_{mn}, V_{mn}, W_{mn}, X_{mn}, Y_{mn}, Z_{mn}\}^T$$

**4. Lời giải ổn định tới hạn của tấm FGM do nhiệt độ**

Để phân tích ổn định tới hạn của tấm cần giải phương trình  $|K_{ij}| = 0$  từ công thức (23) tương ứng cho từng trường hợp nhiệt độ thay đổi theo chiều dày tấm.

**4.1. Trường hợp nhiệt độ thay đổi đều**

Xét trường hợp nhiệt độ thay đổi đều theo chiều dày của tấm. Giá trị nhiệt độ tại thời điểm tấm bị mất ổn định là  $T$  tương ứng với nhiệt độ ban đầu là  $T_0$ . Sự thay đổi nhiệt độ  $\Delta T_{cr} = T - T_0$  từ  $|K_{ij}| = 0$  được gọi là giá trị nhiệt độ ổn định tới hạn của tấm.

**4.2. Trường hợp nhiệt độ thay đổi không đều**

Trong trường hợp này, giả sử nhiệt độ ban đầu tại mặt dưới của tấm là  $T_b$ , nhiệt độ thay đổi theo chiều dày tấm tuân theo quy luật hàm số lũy thừa hàm mũ (25). Mất ổn định xảy ra khi nhiệt độ mặt trên của tấm là  $T_t$ . Công thức giả định nhiệt độ phân bố theo chiều dày tấm:

$$T(z) = T_b + \Delta T \left( \frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k \quad (25)$$

Trong đó  $\Delta T = T_t - T_b$ ;  $k > 0$  là hệ số đặc trưng thay đổi nhiệt độ. Từ công thức (25) dễ dàng thấy rằng nhiệt độ tăng tuyến tính theo chiều dày tấm khi  $k = 1$  và thay đổi phi tuyến cho các trường hợp khác. Tương tự như trường hợp nhiệt độ thay đổi đều, giá trị  $\Delta T_{cr}$  từ  $|K_{ij}| = 0$  cũng được gọi là giá trị nhiệt độ ổn định tới hạn của tấm.

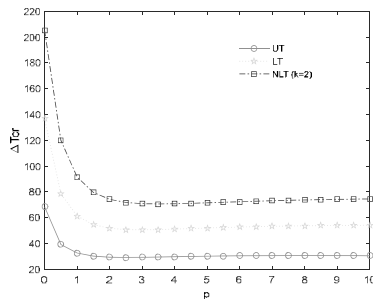
Bảng 1 Giá trị nhiệt độ ổn định tới hạn  $\Delta T_{cr} \times 10^3$  cho tấm hình vuông cho trường hợp hệ số đặc trưng vật liệu  $p$  và quy luật truyền nhiệt  $k$  khác nhau

$p$	Tham khảo	$k$		
		2	5	10
0	Bài báo ( $\varepsilon_{zz} \neq 0$ )	5.1183	10.2366	18.7672
	Bài báo ( $\varepsilon_{zz} = 0$ )	4.8411	9.6821	17.7506
	SPT [13]	4.8414	9.6829	17.7520
	HPT [13]	4.8410	9.6821	17.7505
	FPT [13]	4.8408	9.6817	17.7498
	1	Bài báo ( $\varepsilon_{zz} \neq 0$ )	2.2751	4.6633
Bài báo ( $\varepsilon_{zz} = 0$ )		2.1066	4.3180	8.1901
SPT [13]		2.1068	4.3182	8.1906
HPT [13]		2.1066	4.3179	8.1900
FPT [13]		2.1065	4.3178	8.1898
2		Bài báo ( $\varepsilon_{zz} \neq 0$ )	1.8437	3.6000
	Bài báo ( $\varepsilon_{zz} = 0$ )	1.6766	3.2738	6.1234
	SPT [13]	1.6765	3.2736	6.1232
	HPT [13]	1.6766	3.2738	6.1235
	FPT [13]	1.6812	3.2828	6.1404
	5	Bài báo ( $\varepsilon_{zz} \neq 0$ )	1.7739	3.1670
Bài báo ( $\varepsilon_{zz} = 0$ )		1.5962	2.8497	5.0011
SPT [13]		1.5955	2.8485	4.9990
HPT [13]		1.5964	2.8500	5.0017
FPT [13]		1.6141	2.8816	5.0571
10		Bài báo ( $\varepsilon_{zz} \neq 0$ )	1.8478	3.1788
	Bài báo ( $\varepsilon_{zz} = 0$ )	1.6769	2.8849	4.7725
	SPT [13]	1.6766	2.8844	4.7717
	HPT [13]	1.6770	2.8851	4.7728
	FPT [13]	1.6974	2.9202	4.8310

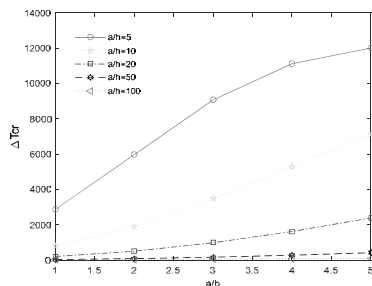
## 5. Kết quả số

Trong phần này, một số ví dụ được khảo sát để phân tích nhiệt độ ổn định tới hạn cho tấm phân lớp chức năng tựa đơn có kích thước hình chữ nhật. Tấm được chế tạo từ vật liệu gốm và kim loại như Hình 1, với các đặc trưng vật liệu như sau: Mặt dưới là nhôm (Al):  $E_m = 70$  GPa,  $\nu_m = 0.3$ ,  $\alpha_m = 23 \times 10^{-6}$  /K; Mặt trên là gốm ( $Al_2O_3$ ):  $E_c = 380$  GPa,  $\nu_c = 0.3$ ,  $\alpha_c = 7.4 \times 10^{-6}$  /K. Nhiệt độ ban đầu tại mặt dưới là 5 K và thay đổi theo chiều dày tấm tuân theo quy luật phân bố đều và quy luật lũy thừa hàm mũ. Các hiệu ứng về đặc trưng vật liệu, tỉ số kích thước hai cạnh, tỉ số cạnh trên chiều dày và quy luật truyền nhiệt ảnh hưởng đối với ổn định tới hạn của tấm được khảo sát một cách chi tiết.

Bảng 1 trình bày giá trị nhiệt độ ổn định tới hạn của tấm FGM tựa đơn được khảo sát với sự thay đổi giá trị đặc trưng vật liệu và quy luật truyền nhiệt theo chiều dày tấm. Các kết quả tính toán được so sánh với nghiên cứu của A. M. Zenkour và cộng sự [13] sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (trong đó hàm biến dạng cắt có dạng hàm số lượng giác (SPT) và hàm số đa thức bậc ba (HPT)) và lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FPT). Từ bảng kết quả cho thấy có sự sai số rất nhỏ của nghiên cứu bài báo so với nghiên cứu này khi áp dụng cùng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, điều đó khẳng định chính xác của kết quả nghiên cứu bài báo. Bên cạnh đó, kết quả phân tích theo lý thuyết tiếp cận 3 chiều của bài báo lớn hơn so với các kết quả tính toán theo lý thuyết biến dạng cắt bậc cao, điều này khẳng định tính tối ưu của lý thuyết nghiên cứu bài báo so với các nghiên cứu trước khi sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao.



Hình 3. Giá trị nhiệt độ ổn định tới hạn  $\Delta T_{cr}$  cho tấm hình vuông tựa đơn trường hợp nhiệt độ thay đổi đều (UT), tuyến tính (LT) và phi tuyến (NLT) và tỉ số cạnh trên chiều dày  $a/h = 50$



Hình 4. Giá trị nhiệt độ ổn định tới hạn  $\Delta T_{cr}$  cho tấm hình chữ nhật tựa đơn trường hợp nhiệt độ thay đổi đều và hệ số đặc trưng vật liệu  $p = 1$

Hình 3 trình bày hiệu ứng của đặc trưng vật liệu và các quy luật truyền nhiệt qua chiều dày của tấm vuông trong trường hợp tỉ số cạnh trên chiều dày là  $a/h = 50$ . Từ hình vẽ cho thấy nhiệt độ ổn định tới hạn trong tấm là bé nhất trong trường hợp nhiệt lượng truyền qua tấm có dạng phân bố đều (UT). Giá trị nhiệt độ ổn định tới hạn trong tấm tỉ lệ nghịch với hệ số đặc trưng vật liệu  $p$ .

Điều đó chứng tỏ rằng khả năng chịu nhiệt độ của tấm phụ thuộc vào hàm mật độ hàm lượng vật liệu gốm  $V_c$ .

Tương tự, Hình 4 trình bày hiệu ứng tỉ lệ hai cạnh và tỉ lệ cạnh trên chiều dày của tấm trong trường hợp nhiệt lượng truyền qua tấm có dạng phân bố đều và hệ số đặc trưng vật liệu  $p = 1$ . Từ hình vẽ cho thấy tấm dày có khả năng chịu được nhiệt độ tới hạn lớn hơn tấm mỏng và khả năng chịu được nhiệt độ ổn định tới hạn của tấm còn phụ thuộc vào tỉ lệ các kích thước của chúng.

## 6. Kết luận

Bài báo trình bày phân tích ổn của tấm phân lớp chức năng dưới tác dụng của tải trọng do nhiệt độ theo lý thuyết tiếp cận 3 chiều. Phương trình cân bằng năng lượng được xây dựng từ các thành phần chuyển động của tấm. Lời giải Navier được sử dụng cho bài toán tấm tựa đơn có kích thước hình chữ nhật. Kết quả bài báo cho thấy khi kể đến biến dạng theo chiều dày tấm thì nhiệt độ ổn định tới hạn của tấm lớn hơn so với trường hợp không kể đến, điều đó chứng tỏ tính tối ưu của phương pháp nghiên cứu bài báo so với các nghiên cứu trước đây. Các đánh giá hiệu ứng về thay đổi kích thước, chiều dày cũng như các quy luật truyền nhiệt trong tấm đều được khảo sát và phân tích một cách chi tiết. Mô hình nghiên cứu của bài báo là phù hợp và có giá trị cho phân tích ổn định tới hạn của tấm phân lớp chức năng khi chịu tải trọng do nhiệt độ.

**Acknowledgement:** This work belongs to the project in 2021 funded by Ho Chi Minh City University of Technology and Education, Vietnam.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Koizumi, M. *FGM Activities in Japan*, Composites Part B: Engineering, 28(1-4), 1997.
2. Abrate, S. *Functionally graded plates behave like homogeneous plates*, Composites Part B: Engineering, 35(151-158), 2008.
3. Singha, M., Prakash, T. and Ganapathi, M. *Finite element analysis of functionally graded plates under transverse load*, Finite Elements in Analysis and Design, 47(453-460), 2011.
4. Nguyen, T. K., Sab, K. and Bonnet, G., *First-order shear deformation plate models for functionally graded materials*, Composite Structures, 83(25-36), 2008.
5. Thai, H. T. and Vo, T. P. *A new sinusoidal shear deformation theory for bending, buckling, and vibration of functionally graded plates*, Applied Mathematical Modelling, 37(3269-3281), 2013.
6. Ferreira, A. J. M., Batra, R. C., Roque, C. M., Qian, L. F. and Martins, P. A. L. S. *Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method*, Composite Structures, 69(449-457), 2005.
7. Reddy, J. N. *A general nonlinear third-order theory of functionally graded plates*, International Journal of Aerospace and Lightweight Structures, 1(1-21), 2011.
8. Mantari, J. L., Oktem, J. L. A. S. and Soares, O. G. *Bending response of functionally graded plates by using a new higher order shear deformation theory*, Composite Structures, 94(714-723), 2012.
9. Talha, M. and Singh, B. N. *Static response and free vibration analysis of FGM plates using higher order shear deformation theory*, Applied Mathematical Modelling, 34(3991-4011), 2010.
10. Mantari, J. L. and Soares, C. G. *Bending analysis of thick exponentially graded plates using a new trigonometric higher order shear deformation theory*, Composite Structure, 94(1991-2000), 2012.
11. Nguyen, V. H., Nguyen, T. K., Thai H. T. and Vo, T. P. *A new inverse trigonometric shear deformation theory for isotropic and functionally graded sandwich plates*, Composites Part B: Engineering, 68(233-246), 2014.
12. Houari, M. S., Tounsi, A. and Bég, O. A. *Thermoelastic bending analysis of functionally graded sandwich plates using a new higher order shear and normal deformation theory*, International Journal of Mechanical Sciences, 75(102-111), 2013.
13. Zenkour, A. M. and Mashat, D. S. *Thermal buckling analysis of ceramic-metal functionally graded plates*, Natural science, 2(968-978), 2010.