■Ngày nhận bài: 22/3/2021 ■Ngày sửa bài: 19/4/2021 ■Ngày chấp nhận đăng: 12/5/2021

Tính toán dao động phi tuyến của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số chịu kích động lệch tâm

Calculating nonlinear vibration of eccentrically activated engine foundation on viscoelastic foundation of fractional order

> **TS BÙI THỊ THÚY**
Trường Đại học Mỏ - Địa chất

TÓM TẮT:
Báo cáo thiết lập phương trình vi phân dao động phi tuyến của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số chịu kích động lệch tâm:

$$mD^2x(t)+\mu_0\left(1+c_1x+c_2x^2\right)D^px(t)+kx(t)=m_0e\Omega^2\sin\Omega t,\quad (0<p<1).$$

Dựa trên cơ sở lý thuyết của đạo hàm cấp phân số và phương pháp số Newmark (phương pháp tích phân một bước) tìm ra nghiệm số của phương trình vi phân dao động phi tuyến. Thông qua nghiệm số của phương trình vi phân dao động phi tuyến nghiên cứu được đặc tính dao động của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số chịu kích động lệch tâm.
Từ kết quả có được, ta có thể thấy rằng: quá trình dao động của mô hình hoàn toàn phù hợp với đặc tính dao động của hệ chịu cản.
Nhờ việc khảo sát ứng xử phi tuyến của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số, các kết cấu kỹ thuật phức tạp có thể được thiết kế hợp lý, đảm bảo các tiêu chuẩn kỹ thuật.
Từ khóa: dao động, móng máy, cấp phân số, lệch tâm

ABSTRACT:
The object of the paper is to establish non-linear vibrational differential equation of eccentrically activated engine foundation on viscoelastic foundation of fractional order. The equation has the following form

$$mD^2x(t)+\mu_0\left(1+c_1x+c_2x^2\right)D^px(t)+kx(t)=m_0e\Omega^2\sin\Omega t,\quad (0<p<1)$$

Based on the theory of fractional derivative and the numerical method of Newmark, the numerical solution of vibrational differential equation is obtained. Then, we can research vibrational properties of eccentrically activated engine foundation on viscoelastic foundation of fractional order.
Through the obtained results, we can realize: vibrational history of model is perfectly conformable to vibrational characteristic of damper.
By investigating the non-linear responses of eccentrically activated engine foundation on viscoelastic foundation of fractional order, complex structures can be designed logically, technical standard assurance.
Keywords: vibration, engine foundation, fractional order, eccentrically

1. Mở đầu

Nhiều máy móc được thiết kế, cấu tạo dựa trên các mô hình giảm chấn đàn nhớt cấp nguyên Kelvin-Voigt, mô hình Maxwell và mô hình tuyến tính tiêu chuẩn…Tuy nhiên với sự phát triển của khoa học công nghệ nói chung và cơ học nói riêng, càng ngày càng có nhiều vật liệu mới ra đời (như cao su tổng hợp, silicone…), những mô hình đàn nhớt cổ điển với đạo hàm cấp nguyên không thể hiện được đầy đủ tính chất của vật liệu. Do đó để giải quyết vấn đề này, đạo hàm cấp phân số được áp dụng.

Các vấn đề nghiên cứu về đạo hàm cấp phân số khá đa dạng, các nhà khoa học đã có các nghiên cứu về dao động phi tuyến của mô hình cấp phân số. Tuy nhiên chưa có đề tài nào nghiên cứu về dao động phi tuyến của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số chịu kích động lệch tâm. Bài báo này nghiên cứu và tìm ra nghiệm của phương trình vi phân dao động phi tuyến của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số chịu kích động lệch tâm.

2. Phương pháp Newmark giải phương trình vi phân cấp hai

Véc tơ trạng thái của hệ ở thời điểm $t_{n+1}=t_n+h$ được suy ra từ véc tơ trạng thái của hệ đã biết ở thời điểm t_n, qua các khai triển Taylor của dịch chuyển và vận tốc.

Ta có các công thức xấp xỉ theo phương pháp Newmark

$$\dot{x}_{n+1}=\dot{x}_n+(1-\alpha)h\,\ddot{x}_n+\alpha h\,\ddot{x}_{n+1}, \quad (1)$$

$$x_{n+1}=x_n+h\dot{x}_n+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2\ddot{x}_n+\beta h^2\ddot{x}_{n+1}. \quad (2)$$

2.1. Phương pháp Newmark đối với dao động tuyến tính

Giả sử ta có phương trình dao động tuyến tính của hệ nhiều bậc tự do

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=f(t), \quad (3)$$

Trong đó m,c,k là các hằng số. Áp dụng các công thức Newmark (1) và (2) vào phương trình trên tại thời điểm t_{n+1} ta tính được gia tốc $\ddot{x}_{n+1}$

$$\begin{aligned}\left[m+\alpha hc+\beta h^2k\right]\ddot{x}_{n+1}&=f_{n+1}-c\left[\dot{x}_n+(1-\alpha)h\ddot{x}_n\right]\\&-k\left[x_n+h\dot{x}_n+\left(\frac{1}{2}-\beta\right)h^2\ddot{x}_n\right].\end{aligned} \quad (4)$$

Giải phương trình (4) ta được $\ddot{x}_{n+1}$. Sử dụng các công thức Newmark (1), (2) nhận được giá trị của vận tốc và độ dịch chuyển $\dot{x}_{n+1}$, x_{n+1}.

Ta xác định điều kiện ban đầu của $\ddot{x}(t_0)$ từ điều kiện ban đầu của $x(t_0)$ và $\dot{x}(t_0)$ đã cho như sau

$$\ddot{x}=m^{-1}\left[f(t)-c\dot{x}-kx\right],$$

$$\ddot{x}(t_0)=m^{-1}\left[f(t_0)-c\dot{x}(t_0)-kx(t_0)\right].$$

2.2. Phương pháp Newmark đối với dao động phi tuyến

Giả sử phương trình chuyển động phi tuyến có dạng

$$m(x)\ddot{x}+k(t,x,\dot{x})=f(t,x,\dot{x}), \quad (5)$$

Từ (2) ta rút ra gia tốc $\ddot{x}_{n+1}$

$$\ddot{x}_{n+1}=\frac{1}{\beta h^2}(x_{n+1}-x_n)-\frac{1}{\beta h}\dot{x}_n-\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\ddot{x}_n, \quad (6)$$

Thay $\ddot{x}_{n+1}$ vào (1)

$$\dot{x}_{n+1}=\frac{\alpha}{\beta h}(x_{n+1}-x_n)+\left(1-\frac{\alpha}{\beta}\right)\dot{x}_n+h\left(1-\frac{\alpha}{2\beta}\right)\ddot{x}_n. \quad (7)$$

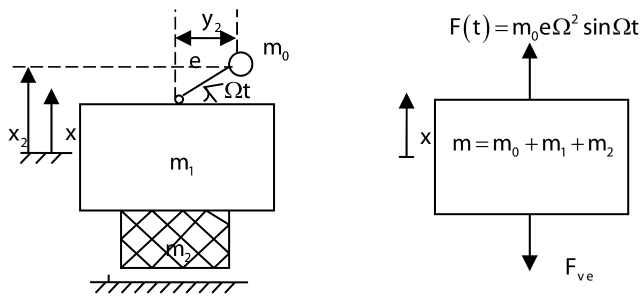
Như vậy gia tốc và vận tốc đều được biểu diễn qua x_{n+1} và các giá trị đã biết của x_n, $\dot{x}_n$, $\ddot{x}_n$. Thế vào phương trình (5) ta nhận được phương trình phi tuyến xác định với ẩn là x_{n+1}. Sử dụng phương pháp lặp Newton – Raphson ta tìm được giá trị của x_{n+1}. Sau đó sử dụng các công thức gia tốc và vận tốc (6), (7) ta xác định được $\ddot{x}_{n+1}$ và $\dot{x}_{n+1}$.

Điều kiện đầu của $\ddot{x}(t_0)$ được tìm tương tự như trường hợp dao động tuyến tính thông qua điều kiện ban đầu của $x(t_0)$ và $\dot{x}(t_0)$ đã cho.

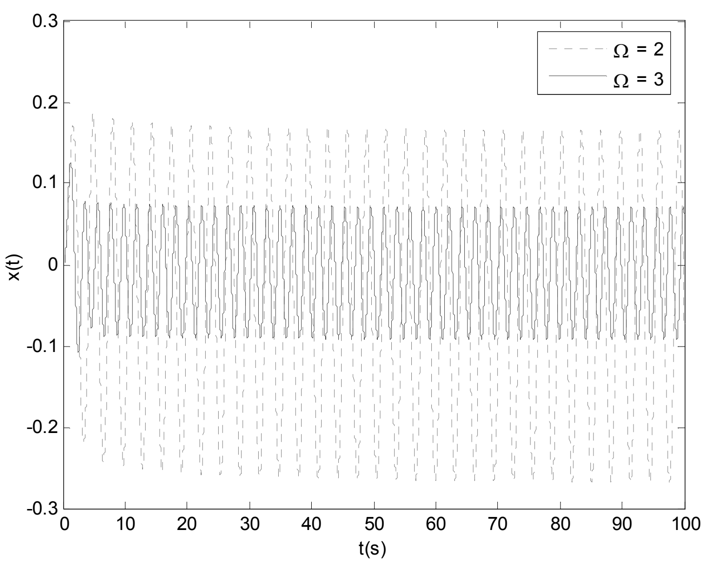
3. Phương trình chuyển động

3.1. Phương trình chuyển động của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số chịu kích động lệch tâm

Xét móng máy trên nền đàn nhớt chịu kích động lệch tâm như hình 1.



Hình 1a Hình 1b



Hình 2

Ta thiết lập phương trình chuyển động của móng máy trên nền đàn nhớt chịu kích động lệch tâm theo định luật 2 Newton

$$(m_0+m_1+m_2)\ddot{x}(t)+F_{ve}=F(t), \quad (8)$$

Ta có lực sinh ra bên trong vật liệu đàn nhớt

$$F_{ve}=\mu_0 c(x(t))D^p\left[x(t)b(x(t))\right]+kx(t), \quad (0<p<1) \quad (9)$$

Thay (9) vào phương trình (8) ta có phương trình chuyển động của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số

$$(m_0+m_1+m_2)\ddot{x}(t)+\mu_0 c(x(t))D^p\left[x(t)b(x(t))\right]+kx(t)=F(t), \quad (10)$$

Hay

$$m\ddot{x}(t)+\mu_0 c(x(t))D^p\left[x(t)b(x(t))\right]+kx(t)=m_0 e\Omega^2\sin\Omega t. \quad (11)$$

Với $m=(m_0+m_1+m_2)$. (12)

3.2. Áp dụng phương pháp Newmark tính toán dao động phi tuyến của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số

Ta có phương trình vi phân dao động cấp phân số

$$mD^2x(t)+\mu_0\left(1+c_1x+c_2x^2\right)D^px(t)+kx(t)=m_0e\Omega^2\sin\Omega t,\ (0<p<1) \quad (13)$$

Đặt $a=\mu_0/m, b_1=c_1\mu_0/m, b_2=c_2\mu_0/m, c=k/m, f=m_0e\Omega^2\sin\Omega t/m$, ta viết lại phương trình chuyển động trên

$$\ddot{x}(t)+aD^px(t)+b_1xD^px(t)+b_2x^2D^px(t)+cx(t)=f(t), \quad (14)$$

Tiếp đến ta sẽ đi tới việc giải phương trinh vi phân chuyển động ở trên bằng phương pháp số Newmark.

Định nghĩa Riemann – Liouville đối với đạo hàm cấp không nguyên

$$D^px(t)=D\left[D^{-u}x(t)\right]=\frac{1}{\Gamma(u)}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{x(\tau)}{(t-\tau)^{1-u}}d\tau, \quad (15)$$

$$u=1-p, \qquad 0<u<1.$$

Áp dụng quy tắc hợp thành đối với $D^px(t)$ ta được

$$D^px(t)=D\left[D^{-u}x(t)\right]=\frac{x(0)}{\Gamma(u)}t^{u-1}+D^{-u}\dot{x}(t), \quad (16)$$

Tính đạo hàm cấp không nguyên $D^px(t)$ tại thời điểm $t=t_n$ ở phương trình (16)

$$D^px(t_n)=\frac{x(0)}{\Gamma(1-p)}t_n^{-p}+D^{p-1}\dot{x}(t_n)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-p)}\frac{x(0)}{t_n^p}+\frac{1}{\Gamma(1-p)}\left[\int_0^{t_{n-1}}\frac{\dot{x}(\tau)}{(t_n-\tau)^p}d\tau+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\dot{x}(\tau)}{(t_n-\tau)^p}d\tau\right],$$

Ký hiệu

$$I_0=\frac{x(0)}{t_n^p} \quad (17)$$

$$I_{n-1}=\int_0^{t_{n-1}}\frac{\dot{x}(\tau)}{(t_n-\tau)^p}d\tau \quad (18)$$

Và $\Delta I_n=\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\dot{x}(\tau)}{(t_n-\tau)^p}d\tau$ (19)

Khi đó phương trình $D^px(t_n)$ sẽ trở thành phương trình có dạng

$$D^px(t_n)=\frac{1}{\Gamma(1-p)}\left(I_0+I_{n-1}+\Delta I_n\right) \quad (20)$$

Giả thiết tại thời điểm t_n phương trình chuyển động của hệ như sau

$$\ddot{x}(t_n)+aD^px(t_n)+b_1x(t_n)D^px(t_n)+b_2x^2(t_n)D^px(t_n)+cx(t_n)=f(t_n) \quad (21)$$

với $x(t_n)$ và $\ddot{x}(t_n)$ lần lượt là độ dịch chuyển và gia tốc tại thời điểm t_n.

Với $t_{n-1}\le\tau\le t_n$, sử dụng khai triển Taylor và ta có thể bỏ qua số hạng bậc cao do $\tau-t_{n-1}$ giả thiết rằng rất nhỏ

$$\dot{x}(\tau)=\dot{x}_{n-1}+(\tau-t_{n-1})\ddot{x}_{n-1}. \quad (22)$$

$\dot{x}(\tau)$ thay đổi trong khoảng $[t_{n-1},t_n]$ và ký hiệu $\dot{x}_n=\dot{x}(t_n)$.

Ngoài ra ta có $\ddot{x}_{n-1}=\frac{(\dot{x}_n-\dot{x}_{n-1})}{\Delta t}, \Delta t=t_n-t_{n-1}$,

Thay vào phương trình (22) ta được công thức tính $\dot{x}(\tau)$ theo $\dot{x}_n, \dot{x}_{n-1}$

$$\dot{x}(\tau)=\dot{x}_{n-1}+\frac{(\tau-t_{n-1})}{\Delta t}(\dot{x}_n-\dot{x}_{n-1}). \quad (23)$$

Sau đó thế phương trình (23) vào phương trình (29), ta được

$$\Delta I_n=\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\dot{x}_{n-1}}{(t_n-\tau)^p}d\tau+\int_{t_{n-1}}^{t_n}\frac{\dot{x}_n-\dot{x}_{n-1}}{\Delta t}\cdot\frac{\tau-t_{n-1}}{(t_n-\tau)^p}d\tau. \quad (24)$$

Các tích phân trong phương trình (24) bây giờ là những tích phân xác định thông thường và có thể dễ dàng giải được.

Ta có các công thức xấp xỉ theo phương pháp Newmark

$$\ddot{x}_n=\frac{1}{\beta\Delta t^2}(x_n-x_{n-1})-\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_{n-1}-\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\ddot{x}_{n-1}, \quad (25)$$

và $\dot{x}_n=\dot{x}_{n-1}+(1-\alpha)\Delta t\,\ddot{x}_{n-1}+\alpha\,\Delta t\,\ddot{x}_n$. (26)

Bây giờ thay (26) vào (24) ta có

$$\Delta I_n\approx\frac{\Delta t^{1-p}}{1-p}\dot{x}_{n-1}+(1-\alpha)\frac{\Delta t^{2-p}}{(1-p)(2-p)}\ddot{x}_{n-1}+\alpha\frac{\Delta t^{2-p}}{(1-p)(2-p)}\ddot{x}_n, \quad (27)$$

Tiếp theo ta chú ý đến tích phân I_{n-1} của phương trình (18). Nó là kiểu tích phân chập. Tích phân xác định này có thể được xấp xỉ bằng công thức hình thang như sau

$$I_{n-1}\approx\frac{\Delta t}{2}\left[\frac{\dot{x}_0}{t_n{}^p}+\frac{\dot{x}_{n-1}}{\Delta t^p}+2\sum_{i=1}^{n-2}\frac{\dot{x}(i\Delta t)}{(t_n-i\Delta t)^p}\right], n\ge 2. \quad (28)$$

Áp dụng công thức của $\ddot{x}_n$ ở (25) vào công thức tính ΔI_n ở (28) được

$$\Delta I_n\approx\frac{\Delta t^{1-p}}{(1-p)(2-p)}\left[\frac{\alpha}{\beta\Delta t}(x_n-x_{n-1})+\left(2-p-\frac{\alpha}{\beta}\right)\dot{x}_{n-1}+\left(1-\frac{\alpha}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{x}_{n-1}\right]. \quad (29)$$

Sử dụng công thức Newmark đối với vận tốc $\ddot{x}_n$ trong phương trình (25) cùng với phương trình (20) ta thay vào phương trình (21)

$$\ddot{x}_n+\frac{a}{\Gamma(1-p)}\Delta I_n+b_1x_n\frac{1}{\Gamma(1-p)}(I_0+I_{n-1})+b_1x_n\frac{1}{\Gamma(1-p)}\Delta I_n$$

$$+b_2x_n^2\frac{1}{\Gamma(1-p)}(I_0+I_{n-1})+b_2x_n^2\frac{1}{\Gamma(1-p)}\Delta I_n+cx_n \quad (30)$$

$$=f(t_n)-\frac{a}{\Gamma(1-p)}(I_0+I_{n-1}).$$

Thay ΔI_n ở phương trình (29) và $\ddot{x}_n$ ở phương trình (25) vào phương trình trên ta có phương trình tính x_n như sau

$$b_2\frac{\alpha\Delta t^{-p}}{\beta\Gamma(3-p)}x_n^3+\left\{b_2\frac{1}{\Gamma(1-p)}(I_0+I_{n-1})+b_2\frac{\Delta t^{1-p}}{\Gamma(3-p)}\left[-\frac{\alpha}{\beta\Delta t}x_{n-1}+\left(2-p-\frac{\alpha}{\beta}\right)\dot{x}_{n-1}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(1-\frac{\alpha}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{x}_{n-1}\right]+b_1\frac{\alpha\Delta t^{-p}}{\beta\Gamma(3-p)}\right\}x_n^2+\left\{\frac{1}{\beta\Delta t^2}+a\frac{\alpha\Delta t^{-p}}{\beta\Gamma(3-p)}+b_1\frac{1}{\Gamma(1-p)}(I_0+I_{n-1})\right.$$

$$\left.+b_1\frac{\Delta t^{1-p}}{\Gamma(3-p)}\left[-\frac{\alpha}{\beta\Delta t}x_{n-1}+\left(2-p-\frac{\alpha}{\beta}\right)\dot{x}_{n-1}+\left(1-\frac{\alpha}{2\beta}\right)\Delta t\ddot{x}_{n-1}\right]+c\right\}x_n$$

$$=f(t_n)-\frac{a}{\Gamma(1-p)}(I_0+I_{n-1})+\left[\frac{1}{\beta\Delta t^2}x_{n-1}+\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{x}_{n-1}+\left(\frac{1}{2\beta}-1\right)\ddot{x}_{n-1}\right]$$

$$+a\frac{\Delta t^{1-p}}{\Gamma(3-p)}\left[\frac{\alpha}{\beta\Delta t}x_{n-1}+\left(p-2+\frac{\alpha}{\beta}\right)\dot{x}_{n-1}+\left(\frac{\alpha}{2\beta}-1\right)\Delta t\ddot{x}_{n-1}\right]. \quad (31)$$

Như vậy ta được phương trình bậc ba để tính x_n

$$\bar{A}_nx_n^3+\bar{B}_nx_n^2+\bar{C}_nx_n=\bar{F}_n. \quad (32)$$

Với

$$\overline{A}_n = b_2 \frac{\alpha \Delta t^{-p}}{\beta \Gamma(3-p)},$$

$$\overline{B}_n = \left\{ b_2 \frac{1}{\Gamma(1-p)}(I_0 + I_{n-1}) + b_2 \frac{\Delta t^{1-p}}{\Gamma(3-p)}\left[-\frac{\alpha}{\beta \Delta t} x_{n-1} + \left(2 - p - \frac{\alpha}{\beta}\right)\dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)\Delta t \ddot{x}_{n-1} \right] + b_1 \frac{\alpha \Delta t^{-p}}{\beta \Gamma(3-p)} \right\},$$

$$\overline{C}_n = \left\{ \frac{1}{\beta \Delta t^2} + a \frac{\alpha \Delta t^{-p}}{\beta \Gamma(3-p)} + b_1 \frac{1}{\Gamma(1-p)}(I_0 + I_{n-1}) + b_1 \frac{\Delta t^{1-p}}{\Gamma(3-p)}\left[-\frac{\alpha}{\beta \Delta t} x_{n-1} + \left(2 - p - \frac{\alpha}{\beta}\right)\dot{x}_{n-1} + \left(1 - \frac{\alpha}{2\beta}\right)\Delta t \ddot{x}_{n-1} \right] + c \right\},$$

$$\overline{F}_n = f(t_n) - \frac{a}{\Gamma(1-p)}(I_0 + I_{n-1}) + \left[\frac{1}{\beta \Delta t^2} x_{n-1} + \frac{1}{\beta \Delta t}\dot{x}_{n-1} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_{n-1} \right] + a \frac{\Delta t^{1-p}}{\Gamma(3-p)}\left[\frac{\alpha}{\beta \Delta t} x_{n-1} + \left(p - 2 + \frac{\alpha}{\beta}\right)\dot{x}_{n-1} + \left(\frac{\alpha}{2\beta} - 1\right)\Delta t \ddot{x}_{n-1} \right].$$

Giải phương trình trên ta tìm được nghiệm số x_n của phương trình vi phân dao động

$$m\ddot{x}(t) + \mu_0\left(1 + c_1 x + c_2 x^2\right)D^p x(t) + kx(t) = m_0 e \Omega^2 \sin \Omega t.$$

hay $\ddot{x}(t) + aD^p x(t) + b_1 x D^p x(t) + b_2 x^2 D^p x(t) + cx(t) = f(t)$ theo các giá trị của $x_{n-1}, \dot{x}_{n-1}, \ddot{x}_{n-1}$ với $\dot{x}_{n-1}$ và $\ddot{x}_{n-1}$ được tính như sau

$$\begin{cases} \ddot{x}_n = \dfrac{1}{\beta \Delta t^2} x_n - \left[\dfrac{1}{\beta \Delta t^2} x_{n-1} + \dfrac{1}{\beta \Delta t}\dot{x}_{n-1} + \left(\dfrac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{x}_{n-1} \right] \\ \dot{x}_n = \alpha \Delta t \ddot{x}_n + \left[\dot{x}_{n-1} + (1-\alpha)\Delta t \ddot{x}_{n-1} \right] \end{cases} \quad (33)$$

Giả thiết rằng điều kiện ban đầu của các công thức trên $x(0), \dot{x}(0)$ đã cho.

3.3. Tính toán số

Với các số liệu

$m = 1,\ \ p = 0.5,\ \ k = 1,\ \ \mu_0 = 2,\ \ m_0 e \Omega^2 \sin \Omega t = 0.5 \sin \Omega t,$

$c_1 = 1.5,\ \ c_2 = 2,\ \ \Delta t = 0.01,\ \ \alpha = 1/2,\ \ \beta = 1/4,\ \ x(0) = 0,\ \ \dot{x}(0) = 0.$

với $\Omega = 2$ và $\Omega = 3$ ta có đồ thị dao động (hình 2).

4. Kết luận

Sau khi tìm được nghiệm số của phương trình vi phân có chứa đạo hàm cấp phân số và qua đồ thị dao động có được, chúng ta có thể rút ra kết luận:

Quá trình dao động của mô hình hoàn toàn phù hợp với đặc tính dao động của hệ chịu cản.

Nhờ việc khảo sát ứng xử phi tuyến của móng máy trên nền đàn nhớt cấp phân số, các kết cấu kỹ thuật phức tạp có thể được thiết kế hợp lý, đảm bảo các tiêu chuẩn kỹ thuật.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1]. Nguyễn Văn Khang (2008), "*Bài giảng phương trình vi phân cấp phân số*", Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội.

[2]. Nguyễn Văn Khang (2004), "*Dao động kỹ thuật*", NXB Khoa học kỹ thuật, Hà Nội.

[3]. H. Nasuno, N. Shimizu (2007), "Power Time Numerical Integration Algorithm for Nonlinear Fractional Differential Equations", pp.1-32.

[4]. N. Shimizu, H. Nasuno (2007), "Modeling and Analysis of Nonlinear Viscoelastic Systems by means of Fractional Calculus – Numerical Integration Algorithms", *Internaitonal Conference on Material Theory and Nonlinear Dynamics*, Hanoi.

[5]. K. Diethelm (2003), *Fractional Differential Equations*, Vorlesunysskrifit der TU Braunschweig.

[6]. Q. Chen, B. Suki, K.N. An (2004), "Dynamic Mechanical Properties of Agarose Gels Modeled by a Fractional Derivative Model", *ASME J. Appl. Mech*, Vol.126, pp. 666-671.

[7]. N. Gil-Negrete, J. Vinolas, L. Kari (2009), "A Nonlinear Rubber Material Model Combing Fractional Order Viscoelasticity and Amplitude Dependent Effects", *ASME J. Appl. Mech*, Vol.76, pp. 110091-110099.