

Thiết lập hệ phương trình giải bài toán phân tích tĩnh thanh công phẳng bằng phương pháp phần tử biên

Establishment of equation system for static analysis of plane curve elements using Boundary element method

> **TS TRẦN THỊ THÚY VÂN, TS TRẦN TRUNG HIẾU**

Khoa Xây dựng, Đại học Kiến trúc Hà Nội

Email: tthvan.hau@gmail.com; Tel: 84.932238019

TÓM TẮT:

Bài báo trình bày đường lối thiết lập hệ phương trình đại số giải bài toán xác định nội lực và chuyển vị của thanh công phẳng bằng phương pháp phần tử biên. Phương pháp phần tử biên có mô hình toán học được thiết lập trên cơ sở lời giải của phương trình tích phân biên. Các hàm nghiệm chuyển vị và nội lực của phần tử được xây dựng trên cơ sở lời giải Cosi của phương trình vi phân cơ bản áp dụng đối với các phần tử thanh công. Từ đó, thiết lập hệ phương trình đại số xác định các thông số như nội lực, chuyển vị tại các điểm biên phần tử, xây dựng phương trình giải cho các phần tử mẫu.

Từ khóa: Phương pháp phần tử biên, phân tích tĩnh, thanh công phẳng, phương trình tích phân biên.

ABSTRACT:

The article presents how to establish a system of algebraic equations to solve the problem of determining the internal forces and displacements of plane curve elements using boundary element method. The boundary element method has a mathematical model established on the basis of the solution of the boundary integral equations. The root functions of internal forces and displacement of the element are found on the basis of the Cosi solutions of the basis differential equations applied for plane curve elements. From there, it is established a system of algebraic equations to determine parameters of internal forces and displacements at boundary points of elements and it is established solving equations for model elements.

Key words: Structural mechanics, matrix algorithm, MathCad programming software.

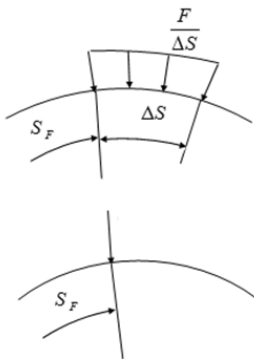
1. Đặt vấn đề

Cấu kiện thanh công là cấu kiện được sử dụng tương đối phổ biến trong các công trình xây dựng dân dụng và công nghiệp cũng như trong các công trình giao thông thủy lợi. Nghiên cứu về mặt lý thuyết và các phương pháp giải các bài toán phân tích tĩnh đối với kết cấu có trục công luôn được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu. Việc tìm nghiệm giải tích tường minh chỉ có thể thực hiện được đối với các trường hợp đơn giản [1,3]. Đối với kết cấu thanh công chịu tải trọng phức tạp và có điều kiện biên bất kỳ thì việc sử dụng phương pháp giải tích sẽ gặp phải những khó khăn nhất định về mặt toán học. Với sự phát triển của công nghệ thông tin, các khó khăn này được khắc phục bằng cách áp dụng các phương pháp số. Một trong những phương pháp số có thể giải quyết được bài toán phân tích tĩnh thanh công một cách hiệu quả có thể kể đến đó là phương pháp phần tử biên, phương pháp này là phương pháp số dựa trên cơ sở mô hình toán học sử dụng hệ phương trình tích phân biên. Tương tự như phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp phần tử biên có thể rời rạc hóa vật thể thành các phần tử sau đó ghép nối tại các biên. Tuy nhiên, khi áp dụng với trường hợp cấu kiện thanh công, phương pháp phần tử hữu hạn chỉ rời rạc hóa toàn bộ vật thể thành các phần tử hữu hạn là các thanh thẳng, chưa kể đến độ cong của trục phần tử, phương pháp phần tử biên chỉ cần rời rạc tại biên của đối tượng, nghiên cứu xét đến độ cong của trục cấu kiện. Tại biên của phần tử, các thông số cần thiết được xác định từ hệ phương trình đại số tuyến tính còn trạng thái bên trong được tính theo các phương trình tích phân biên tương ứng. Do đó, trong việc phân tích tĩnh cấu kiện thanh công, phương pháp phần tử biên đã thể hiện những ưu thế nhất định của nó. Bài báo trình bày việc thiết lập phương trình giải cho cấu kiện thanh công, từ đó có thể áp dụng vào một số bài toán cụ thể bằng phương pháp phần tử biên.

2. Nội dung

2.1. Xây dựng hàm tải trọng xấp xỉ đối với phần tử thanh công

Trong phương pháp phần tử biên, các tải trọng tác dụng lên thanh sẽ được biểu diễn thông qua các hàm tổng quát Heaviside và hàm delta Dirac, cách biểu diễn các hàm này được trình bày một cách tường minh trong [5,9,10]. Đối với trường hợp phần tử là thanh công tròn, nếu tải trọng tác dụng lên phần tử là tải trọng phân bố, có thể xem như gồm tập hợp các tải trọng tập trung tác dụng lên đoạn thanh có độ dài Δx (Hình 1).



Hình 1. Tải trọng tác dụng lên thanh cong

$$q_n(x) = \frac{F}{\Delta S} [H(S - S_F) - H(S - S_F - \Delta S)] \quad (1)$$

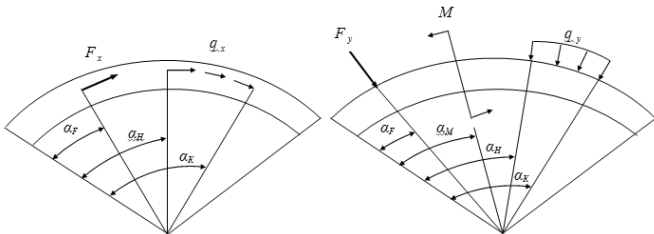
Trong đó, $\Delta S = R\Delta\alpha$, trong đó α - góc quay, R - bán kính cong
Tương tự đối với mômen tập trung, ta có cách chuyển đổi như sau:

$$q_n(\alpha) = \frac{M}{R^2} \delta'(\alpha - \alpha_M) \quad (2)$$

Do đó, trong trường hợp tổng quát có thể biểu diễn tải trọng tác dụng theo phương pháp tuyến và tiếp tuyến dưới dạng sau (hình 2)

$$q_t(\alpha) = \frac{F_x}{R} \delta(\alpha - \alpha_F) + q_x [H(\alpha - \alpha_H) - H(\alpha - \alpha_K)] \quad (3)$$

$$q_n(\alpha) = \frac{F_y}{R} \delta(\alpha - \alpha_F) + \frac{M}{R^2} \delta'(\alpha - \alpha_M) + q_y [H(\alpha - \alpha_H) - H(\alpha - \alpha_K)] \quad (4)$$

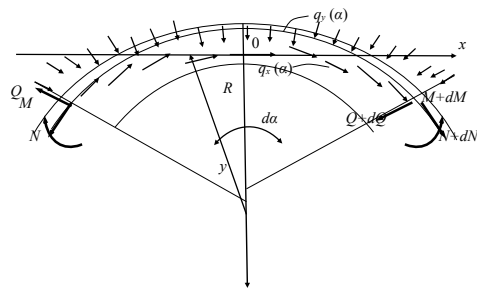


Hình 2. Tải trọng tác dụng theo phương tiếp tuyến và pháp tuyến

2.2. Xây dựng hệ phương trình giải bài toán phân tích tĩnh thanh cong phẳng

2.2.1. Phương trình vi phân biến dạng đàn hồi thanh cong phẳng

Xét hệ thanh cong phẳng chịu tải trọng như hình 3. Các phương trình phân tích tĩnh được xây dựng trên cơ sở giả thiết mặt cắt ngang phẳng Bernulli, bỏ qua biến dạng góc của tiết diện.



Hình 3. Sơ đồ tải trọng và nội lực đoạn thanh cong phẳng

Phương trình cân bằng tĩnh học cho đoạn thanh cong phẳng chiều dài ds:

$$\sum x = 0 \rightarrow \frac{dN}{d\alpha} = Q - q_x(\alpha)R; \quad (5)$$

$$\sum y = 0 \rightarrow \frac{dQ}{d\alpha} = -N - q_y(\alpha)R; \quad (6)$$

$$\sum m(O) = 0 \rightarrow \frac{dM}{d\alpha} = QR. \quad (7)$$

Với α - tọa độ góc

Quan hệ giữa biến dạng và chuyển vị

$$\varepsilon = \frac{1}{R} [U'(\alpha) - V(\alpha)]; \quad x = \left\{ \frac{1}{R} [U'(\alpha) + V''(\alpha)] - \psi'(\alpha) \right\} \frac{1}{R} \quad (8)$$

Với ε - biến dạng dài kéo-nén; R - bán kính cong sau khi biến dạng;
 $U(\alpha), V(\alpha)$ - các chuyển vị của điểm trục theo phương tiếp tuyến

và pháp tuyến (chuyển vị theo phương dọc và vòng góc); $\psi(\alpha)$ - biến dạng trượt

$$\varphi(\alpha) = -\psi(\alpha) + \frac{1}{R} [U(\alpha) + V'(\alpha)] \quad (9)$$

Trong đó: $\varphi(\alpha)$ - góc xoay của mặt cắt ngang.

Các phương trình quan hệ vật lý giữa ứng suất và biến dạng tương tự như đối với thanh thẳng [3]:

$$\varepsilon = N/EA; \quad x = -M/EI; \quad \psi = \kappa Q/GA \quad (10)$$

Thay các phương trình tĩnh học, hình học vào các quan hệ vật lý nhận được hệ phương trình vi phân [10]:

$$\begin{cases} V^{IV}(\alpha) + \frac{EAR^2}{EI} V(\alpha) + U''(\alpha) - \frac{EAR^2}{EI} U'(\alpha) = \frac{R^4}{EI} q_x(\alpha); \\ \left(1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) U''(\alpha) + V'''(\alpha) - \frac{EAR^2}{EI} V'(\alpha) = -\frac{R^4}{EI} q_y(\alpha), \end{cases} \quad (11)$$

2.2.2. Nghiệm tổng quát của phương trình vi phân thanh cong phẳng

Các thông số tĩnh học và hình học của trạng thái ứng suất biến dạng thanh cong tròn có thể biểu diễn qua các thông số ban đầu. Biểu diễn $V(\alpha)$, $U(\alpha)$ qua các thông số ban đầu tương ứng với hàm xác định trạng thái trong [2]. Sau đó chuyển vị và các đạo hàm của nó thế vào các quan hệ (7), (8), (9), (10). Phương trình cơ bản xác định các thông số của thanh cong tròn bằng phương pháp phân tử biên có dạng sau (biểu diễn dưới dạng ma trận) [10]:

EIV(α)	=	A ₁₁	A ₁₂	-A ₁₃	-A ₁₄	A ₁₅	A ₁₆	+ \int_0^α	EIV(0)	d ξ ,	B ₁₁
EI φ (α)		A ₂₂	-A ₂₃	-A ₁₃		A ₂₆	EI φ (0)		B ₂₁		
M(α)				A ₂₂	A ₁₂	-A ₃₆	M(0)		-B ₃₁		
Q(α)					A ₁₁	-A ₄₆	Q(0)		-B ₄₁		
EAU(α)		A ₅₁	A ₅₂	-A ₅₃	-A ₅₄	A ₁₁	EAU(0)		-B ₅₁		
N(α)					-A ₆₄	A ₁₁	N(0)		-B ₆₁		

Có thể viết (12) dưới dạng rút gọn như sau:

$$Y(\alpha) = A(\alpha) X(0) + B(\alpha) \quad (13)$$

Trong đó: $Y(\alpha)$ – ma trận cột hàm chuyển vị và nội lực dọc theo trục thanh cong (véc tơ trạng thái của thanh);

$A(\alpha)$ – ma trận vuông nghiệm cơ bản của phương trình vi phân thuần nhất;

$X(0)$ – ma trận cột chuyển vị và nội lực tại điểm có tọa độ biên ban đầu $\alpha=0$ (véc tơ thông số ban đầu);

$B(\alpha)$ – ma trận cột hàm chuyển vị và nội lực do tải trọng tác dụng lên thanh cong (véc tơ tải trọng)

Trong đó:

$$A_{11} = \cos\alpha; A_{12} = R\sin\alpha; A_{13} = R^2(1 - \cos\alpha); A_{15} = -\frac{EI}{EA}\sin\alpha;$$

$$B_{11} = \left(R^4 + \frac{EIR^2}{EA} \right) \left\{ \frac{F_y}{R} \times \frac{\sin(\alpha - \alpha_f)_+ - (\alpha - \alpha_f)_+ \times \cos(\alpha - \alpha_f)_+}{2} + \right. \\ \left. + \frac{M}{R^2} \frac{(\alpha - \alpha_m)_+ \times \sin(\alpha - \alpha_m)_+}{2} + q_x \left[H(\alpha - \alpha_H) - \cos(\alpha - \alpha_H)_+ - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_H)_+ \times \sin(\alpha - \alpha_H)_+ - H(\alpha - \alpha_K) + \cos(\alpha - \alpha_K)_+ + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_K)_+ \sin(\alpha - \alpha_K)_+ \right] \right\} + \\ + \left(R^4 + \frac{EIR^2}{EA} \right) \left[\frac{F_x}{R} \frac{(\alpha - \alpha_f)_+ \sin(\alpha - \alpha_f)_+}{2} + \frac{q_x}{2} \times \left\{ \sin(\alpha - \alpha_H)_+ - (\alpha - \alpha_H)_+ \times \cos(\alpha - \alpha_H)_+ - \sin(\alpha - \alpha_K)_+ + (\alpha - \alpha_K)_+ \times \cos(\alpha - \alpha_K)_+ \right\} \right] - \\ - R^4 \left\{ \frac{F_x}{R} \times \left[H(\alpha - \alpha_f) - \cos(\alpha - \alpha_f)_+ \right] + q_x \left[(\alpha - \alpha_H)_+ - \sin(\alpha - \alpha_H)_+ - (\alpha - \alpha_K)_+ + \sin(\alpha - \alpha_K)_+ \right] \right\};$$

$$B_{21} = F_y R^2 \left[H(\alpha - \alpha_f) - \cos(\alpha - \alpha_f)_+ \right] + MR \sin(\alpha - \alpha_m)_+ + \\ + q_x R^3 \left[(\alpha - \alpha_H)_+ - \sin(\alpha - \alpha_H)_+ - (\alpha - \alpha_K)_+ + \sin(\alpha - \alpha_K)_+ \right] - F_x R^2 \left[(\alpha - \alpha_f)_+ - \sin(\alpha - \alpha_f)_+ \right] - q_x R^3 \left[\frac{(\alpha - \alpha_H)_+^2}{2} + \cos(\alpha - \alpha_H)_+ - \frac{(\alpha - \alpha_K)_+^2}{2} - \cos(\alpha - \alpha_K)_+ \right];$$

$$B_{31} = F_y R \sin(\alpha - \alpha_f)_+ + M \cos(\alpha - \alpha_m)_+ + q_x R^2 \left[H(\alpha - \alpha_H) - \cos(\alpha - \alpha_H)_+ - H(\alpha - \alpha_K) + \cos(\alpha - \alpha_K)_+ \right] - \\ - F_x R \left[H(\alpha - \alpha_f) - \cos(\alpha - \alpha_f)_+ \right] - q_x R^2 \times \left[(\alpha - \alpha_H)_+ - \sin(\alpha - \alpha_H)_+ - (\alpha - \alpha_K)_+ + \sin(\alpha - \alpha_K)_+ \right];$$

$$B_{41} = F_y \cos(\alpha - \alpha_f)_+ + \frac{M}{R} \left[-\sin(\alpha - \alpha_m)_+ \right] + q_x R \left[\sin(\alpha - \alpha_H)_+ - \sin(\alpha - \alpha_K)_+ \right] - F_x \sin(\alpha - \alpha_f)_+ - q_x R \left[H(\alpha - \alpha_H) - \cos(\alpha - \alpha_H)_+ - H(\alpha - \alpha_K) + \cos(\alpha - \alpha_K)_+ \right];$$

$$B_{51} = F_y \left\{ \left(1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) R \frac{(\alpha - \alpha_f)_+ \times \sin(\alpha - \alpha_f)_+}{2} - \frac{EAR^2}{EI} \left[H(\alpha - \alpha_f) - \cos(\alpha - \alpha_f)_+ \right] \right\} + M \left\{ \left(1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) \frac{\sin(\alpha - \alpha_m)_+ + (\alpha - \alpha_m)_+ \times \cos(\alpha - \alpha_m)_+}{2} - \frac{EAR^2}{EI} \sin(\alpha - \alpha_m)_+ \right\} + q_x \left\{ \left(1 + \frac{EAR^2}{EI} \right) R^2 \times \right. \\ \left. \times \frac{\sin(\alpha - \alpha_H)_+ - (\alpha - \alpha_H)_+ \times \cos(\alpha - \alpha_H)_+ - \sin(\alpha - \alpha_K)_+ + (\alpha - \alpha_K)_+ \times \cos(\alpha - \alpha_K)_+}{2} - \frac{EAR^2}{EI} \left[(\alpha - \alpha_H)_+ - \sin(\alpha - \alpha_H)_+ - \right. \right. \\ \left. \left. - (\alpha - \alpha_K)_+ \sin(\alpha - \alpha_K)_+ \right] \right\} + F_x \left\{ R \frac{(\alpha - \alpha_f)_+ \times \cos(\alpha - \alpha_f)_+ + \sin(\alpha - \alpha_f)_+}{2} + \frac{EAR^2}{EI} \left[(\alpha - \alpha_f)_+ + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_f)_+ \times \cos(\alpha - \alpha_f)_+ - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3}{2} \sin(\alpha - \alpha_f)_+ \right] \right\} + q_x \left\{ \frac{R^2}{2} \left[(\alpha - \alpha_H)_+ \times \sin(\alpha - \alpha_H)_+ - (\alpha - \alpha_K)_+ \times \sin(\alpha - \alpha_K)_+ \right] + \frac{EAR^4}{EI} \left[\frac{(\alpha - \alpha_H)_+^2}{2} + 2\cos(\alpha - \alpha_H)_+ - \right. \right. \\ \left. \left. - 2H(\alpha - \alpha_H) + \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_H)_+ \sin(\alpha - \alpha_H)_+ - \frac{(\alpha - \alpha_K)_+^2}{2} - 2\cos(\alpha - \alpha_K)_+ + 2H(\alpha - \alpha_K) - \frac{1}{2}(\alpha - \alpha_K)_+ \sin(\alpha - \alpha_K)_+ \right] \right\};$$

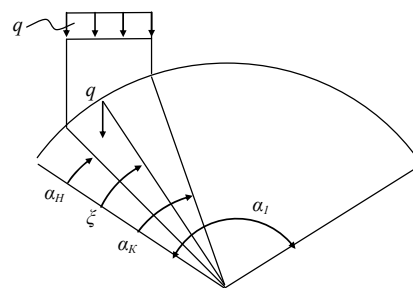
$$B_{61} = F_y \sin(\alpha - \alpha_f)_+ + \frac{M}{R} \cos(\alpha - \alpha_m)_+ + q_x R \left[H(\alpha - \alpha_H)_+ - \cos(\alpha - \alpha_H)_+ - H(\alpha - \alpha_K) + \cos(\alpha - \alpha_K)_+ \right] + F_x \cos(\alpha - \alpha_f)_+ + q_x R \left[\sin(\alpha - \alpha_H)_+ - \sin(\alpha - \alpha_K)_+ \right]$$

Trong trường hợp thanh cong chịu tải trọng phân bố đều không hướng tâm, hàm tải trọng có dạng sau:

$$q_x(\xi) = q \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \xi\right); q_y(\xi) = -q \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \xi\right) \quad (16)$$

$$A_{14} = \left(R^3 + \frac{EIR}{EA} \right) \frac{\sin\alpha - \alpha \cos\alpha}{2}; A_{22} = 1; A_{23} = R \times \alpha; A_{46} = \sin\alpha; \\ A_{16} = R^3 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha \sin\alpha - \cos\alpha \right) - \frac{EIR}{EA} \times \frac{1}{2} \alpha \sin\alpha; A_{28} = R^2 (\alpha - \sin\alpha); \\ A_{36} = R(1 - \cos\alpha); A_{51} = \frac{EA}{EI} \sin\alpha; A_{52} = \frac{EAR}{EI} (1 - \cos\alpha); A_{53} = \frac{EAR^2}{EI} (\alpha - \sin\alpha); \\ A_{54} = \frac{EAR^3}{EI} \left(1 - \cos\alpha - \frac{1}{2} \alpha \sin\alpha \right) - R \frac{1}{2} \alpha \sin\alpha; A_{64} = -\sin\alpha; \\ A_{56} = R \frac{\sin\alpha + \alpha \cos\alpha}{2} + \frac{EAR^3}{EI} \left(\alpha + \frac{1}{2} \alpha \cos\alpha - \frac{3}{2} \sin\alpha \right); \quad (14)$$

Các thành phần của véc tơ tải trọng sau khi thay $q_x(\alpha)$, $q_y(\alpha)$ và tích phân có dạng [10]:



Hình 4. Thanh cong chịu tải trọng phân bố đều không hướng tâm

Nếu thay biểu thức (15) vào (14) và thực hiện phép tích phân, các thành phần véc tơ tải trọng B được viết dưới dạng:

$$B_{11} = q \left(R^4 + \frac{EIR^2}{EA} \right) \left[\frac{1}{4} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\alpha - \alpha_H) + \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\alpha - \alpha_H) - \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \alpha - 2\alpha_H\right) - \frac{1}{4} (\alpha - \alpha_H)^2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \right] + \\ + R^4 q \left[\frac{3}{4} \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2} - \alpha_H\right) - \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_H) \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\alpha + \frac{\alpha}{2} - 2\alpha_H\right) \right] - q \left(R^4 + \frac{EIR^2}{EA} \right) \left[\frac{1}{4} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) (\alpha - \alpha_K) + \right.$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \frac{1}{8} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} + \alpha - 2\alpha_k\right) - \frac{1}{4} (\alpha - \alpha_k)^2 \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) \Big]_{\oplus} - R^2 q \left[\frac{3}{4} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) - \frac{1}{2} (\alpha - \alpha_k) \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - 2\alpha_k\right) \right]_{\oplus} \\
B_{21} = & R^3 q \left[\left\{ -2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + 2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) - (\alpha - \alpha_k) \left[\cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) \right] \right\}_{\oplus} - \left\{ -2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + \right. \right. \\
& \left. \left. + 2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) - (\alpha - \alpha_k) \times \left[\cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) \right] \right\}_{\oplus} - \left[\sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) (\alpha - \alpha_k) + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) \right]_{\oplus} \right] ; \\
B_{31} = & R^2 q \left[\left[\sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) (\alpha - \alpha_k) + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) \right]_{\oplus} - \left[\sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) (\alpha - \alpha_k) + \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) \right]_{\oplus} \right] ; \\
B_{41} = & R q \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) \left[(\alpha - \alpha_k)_{\oplus} - (\alpha - \alpha_k)_{\oplus} \right] ; \\
B_{51} = & \frac{EAR^4}{EI} q \left[\frac{17}{8} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - 2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) + \frac{5}{4} (\alpha - \alpha_k) \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) + \right. \\
& \left. + (\alpha - \alpha_k) \times \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) - \frac{1}{4} (\alpha - \alpha_k)^2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \frac{1}{8} \sin\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - 2\alpha_k\right) \right]_{\oplus} + R^2 q \left[-\frac{1}{4} (\alpha - \alpha_k)^2 \times \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{4} (\alpha - \alpha_k) \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) - \frac{1}{8} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{8} \sin\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) \right]_{\oplus} - \\
& - \frac{EAR^4}{EI} \times q \left[\frac{17}{8} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - 2\sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) + \frac{5}{4} (\alpha - \alpha_k) \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) + (\alpha - \alpha_k) \cos\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha_k\right) - \frac{1}{4} (\alpha - \alpha_k)^2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \right. \\
& \left. - \frac{1}{8} \sin\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - 2\alpha_k\right) \right]_{\oplus} - q R^2 \left[-\frac{1}{4} (\alpha - \alpha_k)^2 \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) - \frac{1}{4} (\alpha - \alpha_k) \times \cos\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) - \frac{1}{8} \sin\left(\frac{\alpha_1}{2} - \alpha\right) + \frac{1}{8} \sin\left(\alpha + \frac{\alpha_1}{2} - 2\alpha_k\right) \right]_{\oplus} \\
B_{61} = & q R \sin\left(\alpha - \frac{\alpha_1}{2}\right) \left[(\alpha - \alpha_k)_{\oplus} - (\alpha - \alpha_k)_{\oplus} \right]
\end{aligned} \tag{17}$$

2.2.3. Thiết lập hệ phương trình đại số xác định các thông số biên của thanh cong phẳng

Từ phương trình (13) cho phép tìm được hàm nghiệm giải tích nội lực và chuyển vị của thanh cong phẳng. Các ẩn số tìm được là các thông số nội lực và chuyển vị tại điểm biên của phần tử. Thay các giá trị của thông số biên phần tử $x=0$ và $x=\alpha_1$ vào các ma trận A, B, Y trong phương trình (13), hệ phương trình (18) trở thành hệ phương trình đại số (19) chứa các thông số biên của thanh cong phẳng

$$Y(\alpha_1) = A(\alpha_1) X(0) + B(\alpha_1) \rightarrow A(\alpha_1) X(0) - Y(\alpha_1) = -B(\alpha_1) \tag{18}$$

Ẩn số trong các ma trận X(0) và Y(α). Gán các điều kiện biên tĩnh học và hình học vào để giải các phương trình trong (16), các điều kiện biên tĩnh học được thiết lập dựa trên các phương trình cân bằng tĩnh học tại các nút. Các điều kiện biên hình học được thiết lập dựa trên các điều kiện chuyển vị tại biên của các phần tử.

Để giải hệ phương trình (18), thực hiện việc di chuyển các thông số điều kiện biên trong các véc tơ Y(α) tới véc tơ X(0), thu được hệ phương trình đại số giải bài toán phân tích tĩnh cho phần tử thanh cong.

$$A^*(\alpha_1) X^*(0, \alpha_1) = -B(\alpha_1) \tag{19}$$

Trong đó, ma trận $A^*(\alpha)$ là ma trận thu được khi di chuyển các thông số cuối của véc tơ Y (Y(α₁)) tới vị trí thông số có giá trị bằng 0 của véc tơ X (X(0)). Lúc này véc tơ Y(α₁) sẽ bằng 0.

Như vậy, giải hệ phương trình đại số (19) thu được giá trị nội lực và chuyển vị tại các vị trí các tiết diện của thanh cong phẳng.

3. Kết luận

Áp dụng phương pháp phần tử biên trong bài toán phân tích tĩnh hệ thanh cong phẳng cho phép xác định được phương trình trạng thái của từng phần tử trong hệ và từ đó xác định được nội lực và chuyển vị tại các điểm chia của hệ. Hệ phương trình đại số thiết lập cho phần tử thanh cong là cơ sở cho việc áp dụng các phần mềm lập trình để giải các bài toán chịu tải trọng phức tạp và có điều kiện biên bất kỳ. Nghiệm của bài toán là hàm nội lực và chuyển vị xác định theo hệ phương trình đại số (19) hoàn toàn trùng khớp với nghiệm giải tích. Từ đó, có thể thấy rõ ưu điểm của phương pháp phần tử biên trong việc áp dụng bài toán xác định nội lực và chuyển vị của thanh cong phẳng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Lê Thị Trinh (CB), Cơ học kết cấu phần 1, NXB KH&KT, 2009.
- [2] Lê Thị Trinh (CB), Cơ học kết cấu phần 2, NXB KH&KT, 2009.
- [3] Nguyễn Văn Liên, Đinh Trọng Bằng, Nguyễn Phương Thành (2004), Sức bền vật liệu, NXB Xây Dựng, Hà Nội.
- [4] Chu Quốc Thắng, Phương pháp Phần Tử Hữu Hạn, NXB Khoa học & kĩ thuật, 1997.
- [5] Крауч С., Старфилд А. (1987). Методы граничных элементов в механике твердого тела. - М.: Мир. (Krauch S., Starphild A. (1987). Phương pháp phần tử biên trong cơ học vật rắn - М.: Mir).
- [6] Vũ Thị Bích Quyên (2015), Phương pháp phần tử biên giải bài toán tĩnh hệ thanh biến dạng đàn hồi. Tập 2 - Tuyển tập Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học vật rắn biến dạng lần thứ 12, Đà Nẵng.
- [7] P.K. Banerjee and R. Butterfield (1981), Boundary Element Methods in Engineering, McGraw- Hill Book Company (UK) Limited.
- [8] Nguyễn Mạnh Yên (2000), Phương pháp số trong cơ học kết cấu, NXB khoa học và kỹ thuật, Hà Nội.
- [9] В.Н. Иванов (2007), Основы численных методов расчета конструкций. Москва «высшая школа». (V.N. Ivanov (2007), Cơ sở các phương pháp số trong tính toán kết cấu công trình. Moskva "Vushaia Shkola").
- [10] Баженов В.А., Оробей В.Ф., Дашченко А.Ф., Коломиец Л.В. (2001). Применение метода граничных элементов. Одесса «Астропринт» (Bazhenov V.A., Orabei V.F., Dashchenko A.F., Kolomies L.V. (2001). Ứng dụng phương pháp phần tử biên. Odessa "Astroprint").
- [11] An Introduction to the Boundary Element Method (BEM) and Its Applications in Engineering Yijun Liu, Professor of Mechanical Engineering, University of Cincinnati Cincinnati, Ohio 45221-0072, U.S.A.
- [12] Boundary Element Methods in Engineering Science, P.K.Banerjee - State University of New York at Buffalo and R.Butterfield - Professor and head of Department of Civil Engineering - University of Southampton, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1981.
- [13] Boundary Element Method Course Notes, Tara LaForce Stanford, CA 1st June 2006.
- [14] Principles of Boundary Element Methods, Martin Costabel, Technische Hochschule Darmstadt.
- [15] P.K. Banerjee and R. Butterfield, Boundary Element Methods in Engineering Science, McGraw-Hill Book Company (UK) Limited, 1981.