

Phân tích dao động tự do của thanh có xét đến biến dạng trượt ngang bằng phương pháp chuyển vị cưỡng bức - lời giải số

Analysis of bar's free vibration with considering lateral shear strain by forced displacement method - numerical solution

> **A.PROF.PHD DOAN VAN DUAN**

Faculty of Engineering - Vietnam Maritime University

Email: duandv.ct@vamaru.edu.vn - Tel: [0945 092348](tel:0945092348)

TÓM TẮT:

Phương trình dao động tự do của thanh là phương trình trị riêng, có vế phải bằng không, để giải phương trình này các tác giả trong và ngoài nước đã sử dụng các phương pháp truyền thống là đưa ma trận hệ số của phương trình dao động tự do của thanh về dạng đường chéo hoặc dạng ma trận băng, dải dọc theo đường chéo chính bằng các thuật toán khác nhau, như thuật toán Jacobi [4], LR [4], [5], QR[5], không gian con [5]...rất phức tạp, để lấy tích của số hạng đó cho ta phương trình đa thức đặc trưng để xác định các trị riêng. Vì vậy, để đơn giản hóa việc giải các bài toán, trong bài báo này tác giả sử dụng một phương pháp mới trong [2], [3] "Phương pháp chuyển vị cưỡng bức" để tìm trị riêng và véc tơ riêng của các bài toán theo lời giải số.

Từ khóa: chuyển vị cưỡng bức; dao động; trị riêng, véc tơ riêng.

ABSTRACT

The equation of free vibration of the bar is an eigenvalue equation, with the right side equals zero, to solve this equation domestic and foreign authors have used the traditional methods to bring the coefficient matrix of the equation of free vibration of the bar to diagonal or band matrix form, strip along the main diagonal by different algorithms, such as Jacobi algorithm [4], LR [4], [5], QR[5], subspace [5]... is very complicated, to get the product of that term gives us the characteristic polynomial equation to determine the eigenvalues. Therefore, to simplify in solving the problems in this paper, the author uses a new method in [2], [3] "Forced displacement method" to find eigenvalues and eigenvectors of problems according to numerical solutions.

Keywords: forced displacement; oscillate; eigenvalues, eigenvectors.

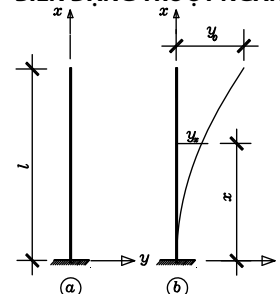
1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Các phương pháp [4], [5] mặc dù phải biến đổi ma trận phức tạp nhưng đôi khi cho lời giải không đủ tin cậy vì độ hội tụ của bài toán còn phụ thuộc vào tính chất của ma trận, đối xứng hay không đối xứng, xác định dương hay không xác định dương... Khác với các phương pháp truyền thống, phương pháp chuyển vị cưỡng bức có cách nhìn đơn giản, dễ hiểu, bằng cách kích chuyển vị tại một điểm bất kỳ trên thanh cho phép ta đưa phương trình trị riêng của thanh dao động tự do về phương trình vi phân có vế phải, giải phương trình này ta nhận được ngay các tần số dao động của thanh mà không cần thông qua các phép biến đổi ma trận phức tạp. Trong [2], [3] tác giả đã sử dụng phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải các bài toán trị riêng nói trên, theo lời giải bán giải tích.

Trong bài báo này, tác giả cũng dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức nêu trên, kết hợp với phương pháp phần tử hữu hạn để

xây dựng và giải bài toán dao động tự do của thanh có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang theo lời giải số.

2. BÀI TOÁN DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA THANH CÓ XÉT ĐẾN BIẾN DẠNG TRƯỢT NGANG



Hình 1. Thanh ngang - Tự do

Xét thanh thẳng, có tiết diện không đổi, có khối lượng m phân bố đều trên thanh. Khi có chuyển vị ngang, thì ngoài nội lực M và Q , còn phải xét đến lực quán tính f_m . Lực quán tính f_m bằng tích của khối lượng với gia tốc của chuyển động và có phương tác dụng là phương của chuyển động (phương của độ võng) của thanh.

Như vậy, lực quán tính có tác dụng giống như lực ngang, trong trường hợp này là lực ngang phân bố, đặt tại trục thanh. Nếu khối lượng m phân bố trên chiều cao của tiết diện thanh thì do tiết diện thanh bị xoay, còn có lực quán tính xoay của tiết diện thanh. Để đơn giản nghiên cứu, ta không xét lực quán tính xoay này.

Với nguyên lý D'Alambert, xem lực quán tính f_m như là ngoại lực cản tác dụng lên thanh, và vì lực quán tính là hàm của thời gian nên hàm độ võng và các hàm nội lực trong thanh đều là hàm của tọa độ và thời gian: $W = W(x, t)$ là hàm độ võng, $M = M(x, t)$ là hàm momen uốn, $V = V(x, t)$ là hàm lực cắt.

Lực quán tính của thanh được tính như sau

$$f_m = m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} \quad (1)$$

Xem lực quán tính f_m như là ngoại lực cản phân bố tác dụng lên thanh, viết ngay được hai phương trình vi phân cân bằng

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + f_m &= 0 \quad (a) \\ -\frac{\partial M}{\partial x} + V &= 0 \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Khi xét biến dạng trượt trong thanh, biến dạng trượt γ , góc xoay do momen uốn θ , biến dạng uốn χ và nội lực momen xác định theo các biểu thức sau:

$$\left. \begin{aligned} \gamma &= \frac{\alpha}{GF} V; \theta = \frac{\partial W}{\partial x} - \gamma \\ \chi &= -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{\partial V}{\partial x} \\ M &= -EJ\chi \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Đưa các biểu thức (1) và (3) vào (2) nhận được

$$\left. \begin{aligned} EJ \left(\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \right) + m \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} &= 0 \quad (a) \\ EJ \left(\frac{\partial^3 W}{\partial x^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right) + V &= 0 \quad (b) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

Nghiệm của hệ (4) có thể viết dưới dạng

$$\left. \begin{aligned} W(x, t) &= y(x) \cos(\omega t) = y \cos(\omega t) \\ V(x, t) &= Q(x) \cos(\omega t) = Q \cos(\omega t) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Khi đó hệ (3.4) có dạng

$$\left. \begin{aligned} \left(EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right) - m\omega^2 y \right) \cos(\omega t) &= 0 \\ \left(EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right) + Q \right) \cos(\omega t) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Vì thành phần trong ngoặc không phụ thuộc t nên hệ (6) được giản hóa như sau

$$\left. \begin{aligned} EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right) - m\omega^2 y &= 0 \\ EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right) + Q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Hay

$$\left. \begin{aligned} EJ \frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^3 Q}{dx^3} - m\omega^2 y &= 0 \\ EJ \frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha h^2}{6} \frac{d^2 Q}{dx^2} + Q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

Hai hàm $y = y(x)$ và $Q = Q(x)$ đều là hàm của tọa độ x . Hệ (7) không phụ thuộc vào biến t , là hệ hai phương trình vi phân tuyến tính có hệ số không đổi. Khi không xét biến dạng trượt, cho $G \rightarrow \infty$ hoặc cho $h = 0$ thì hai phương trình đầu của hệ (7) và của hệ (3.7a) trở thành phương trình dao động của thanh theo lý thuyết dầm Euler-Bernoulli, giải phương trình này tìm được độ võng y rồi dùng phương trình thứ hai để tính Q .

Phương pháp chung để giải hệ (7) là giải hai phương trình đặc trưng của chúng và xây dựng nghiệm y và Q trên cơ sở các nghiệm (trị riêng) của các phương trình đặc trưng. Tuy nhiên, ta sẽ dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải.

3. PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC

Khi xây dựng bài toán theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, có thể dùng các đại lượng biến phân (chuyển vị ảo và biến dạng ảo) không phụ thuộc thời gian

$$\left. \begin{aligned} \gamma_x &= \frac{\alpha}{GF} Q; \theta_x = \frac{\partial y}{\partial x} - \gamma_x \\ \chi_x &= -\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{\partial Q}{\partial x} \\ M_x &= EJ\chi_x \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Kí tự x ở chân các đại lượng để chỉ rằng đại lượng chỉ phụ thuộc x .

Bài toán dao động tự do của thanh được dẫn về bài toán tìm cực tiểu của lượng cưỡng bức chuyển động tại một thời điểm t bất kì:

$$Z = \int_0^l M_x [\chi_x] dx + \int_0^l V [\gamma_x] dx + \int_0^l f_m [y] dx \rightarrow \min \quad (9)$$

Đại lượng trong ngoặc vuông của phiếm hàm (9) là đại lượng biến phân.

Từ điều kiện cực tiểu

$$\delta Z = \int_0^l M_x \delta [\chi_x] dx + \int_0^l V \delta [\gamma_x] dx + \int_0^l f_m \delta [y] dx = 0 \quad (10)$$

và dùng phép tính biến phân sẽ nhận được lại hai phương trình (6) và vì bài toán tuyến tính theo t nên lại có hệ (7).

Như vậy, bài toán dao động tự do của thanh bằng cách dùng biến đổi (5) dẫn về giải hệ (7) là hệ không chứa biến t . Nghiệm $y \neq 0$ (nghiệm không tầm thường) của hệ (7) tùy thuộc vào các thông số m, EJ, ω và chiều dài thanh. Thông thường, các thông số m, EJ và chiều dài thanh đã biết nên tần số là hàm của các đại lượng này.

Sử dụng các đại lượng không chứa biến thời gian t , bài toán (9) có dạng

$$Z = \int_0^l M_x [\chi_x] dx + \int_0^l Q [\gamma_x] dx + \int_0^l f_m [y] dx \rightarrow \min \quad (11)$$

$$\text{Ở đây} \quad M_x = EJ\chi_x, \quad f_x = -m\omega^2 y \quad (12)$$

Để giải bài toán (3.11) ta dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức bằng cách cho một điểm nào đó của thanh, ví dụ điểm x_1 , chuyển vị cưỡng bức y_0 .

$$g_1 = y(x_1) - y_0 = 0 \quad (13)$$

Bài toán cực tiểu (11) với ràng buộc (13) là bài toán tính thanh chịu chuyển vị cưỡng bức tại điểm x_1 , có ẩn là tần số ω cho nên có thể được gọi là bài toán dao động tự do của thanh. Viết phiếm hàm Lagrange mở rộng F của (11) và (13), ta có điều kiện cực trị

$$\delta F = \int_0^1 M_x \delta \left[-\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{\alpha}{GF} \frac{dQ}{dx} \right] dx + \int_0^1 Q \delta \left[\frac{\alpha}{GF} Q \right] dx + \int_0^1 f_x \delta [y] dx + \delta [\lambda g_i] = 0 \quad (14)$$

λ trong (3.14) là thừa số Lagrange và là ẩn mới của bài toán. Từ (3.14) nhận được hai phương trình cân bằng (hai phương trình Euler):

$$\left. \begin{aligned} EJ \left(\frac{d^4 y}{dx^4} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^3 Q}{dx^3} \right) - m\omega^2 y &= \begin{cases} -\lambda, x = x_1 \\ 0, x \neq x_1 \end{cases} \\ EJ \left(\frac{d^3 y}{dx^3} - \frac{\alpha}{GF} \frac{d^2 Q}{dx^2} \right) + Q &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

cùng với phương trình (13). Hệ phương trình (15) có vẻ phải là $\lambda = 0$.

Xét về cơ học, λ có thứ nguyên là lực và đó là lực giữ để chuyển vị tại điểm $x=x_1$ của thanh bằng chuyển vị cưỡng bức y_0 (phương trình (13)). Lực giữ do ta đưa vào nên phải bằng không. Về toán học thì phương trình dao động là phương trình không có vẻ phải (hệ (3.7)) cho nên λ cũng phải bằng không. Vì vậy ta có

$$\lambda = 0 \quad (16)$$

Nghiệm của phương trình (3.16) cũng là nghiệm của vế trái (3.15) hoặc của hệ (7). Như vậy, phương trình (16) là phương trình đa thức xác định trị riêng, khi các hàm $y(x)$ và $Q(x)$ thỏa mãn các điều kiện biên thì nó là phương trình đa thức xác định tần số riêng của dao động tự do của thanh. Trong trường hợp này λ là hàm của ω , $\lambda = \lambda(\omega)$.

Bài toán dao động tự do của thanh được đưa về bài toán (11) với ràng buộc (13) và sẽ được giải trực tiếp trên phiếm hàm Lagrange mở rộng để tìm được hàm $\lambda(\omega)$, giải phương trình (16) sẽ nhận được các tần số riêng, tương tự như bài toán xác định lực tới hạn của thanh [4]. Chú ý, λ là thừa số Lagrange của ràng buộc (13).

Ta đang xét trường hợp khối lượng phân bố đều trên thanh. Bài toán có vô số bậc tự do nên có vô số tần số riêng. Chúng tạo thành *dải tần số riêng dao động* của thanh có biên dưới là tần số cơ bản và biên trên là vô cùng lớn, $\omega \rightarrow \infty$. Các thanh có liên kết khác nhau sẽ dao động với tần số riêng khác nhau. Tần số riêng dao động tự do của thanh có các điều kiện liên kết khác nhau được tính theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức được trình bày dưới đây.

4. BÀI TOÁN DAO ĐỘNG TỰ DO CỦA THANH - LỜI GIẢI SỐ

4.1. Phương pháp phần tử hữu hạn

Phương pháp phần tử hữu hạn chia công trình thành những phần nhỏ được gọi là các phần tử, tính toán công trình được dẫn về tính toán những phần tử nhỏ sau đó kết nối các phần tử đó lại với nhau ta lại được lời giải của một công trình hoàn chỉnh.

Thông thường đối với phần tử dầm chịu uốn thì dùng đa thức bậc 3 để mô tả chuyển vị.

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (17)$$

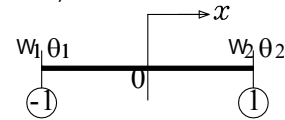
Ta thấy có 4 thông số cần xác định. Tuy nhiên để tiện dùng ta thay 4 thông số a_0, a_1, a_2, a_3 bằng chuyển vị, góc xoay của phần tử hai nút như, hình 2.

Do dùng hàm bậc 3 cho nên các lực tác dụng lên phần tử đều phải quy về nút kể cả lực quán tính trong bài toán động.

a. Hàm nội suy phần tử chịu uốn

Đối với phần tử chịu uốn như thanh thường dùng đa thức bậc ba để tính chuyển vị của nó, do đó có bốn thông số cần xác định.

Có thể chọn phần tử hai nút, mỗi nút có hai thông số là chuyển vị W và góc xoay θ tại nút đó, hình 2.



Hình 2. Phần tử chuyển vị hai nút

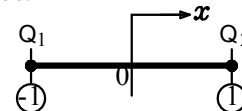
Để tính toán được tổng quát, chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị, gốc tọa độ đặt ở giữa. Như vậy, nếu biết được các thông số $W_1, W_2, \theta_1, \theta_2$ thì chuyển vị mỗi điểm nằm trong phần tử xác định theo đa thức bậc ba sau đây.

$$W(x) = f_1 W_1 + f_2 W_2 + f_3 \theta_1 + f_4 \theta_2 \quad (18)$$

trong đó:

$$\left. \begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{4}(x-1)^2(x+2); f_2 = \frac{1}{4}(x+1)^2(-x+2) \\ f_3 &= \frac{1}{4}(x-1)^2(x+1); f_4 = \frac{1}{4}(x+1)^2(x-1) \end{aligned} \right\}$$

Ta dùng đa thức bậc nhất để xấp xỉ hàm lực cắt của phần tử, phần tử lực cắt chứa hai nút, hình 3, mỗi nút có một thông số chưa biết Q là lực cắt phần tử tại vị trí đó.



Hình 3. Phần tử lực cắt hai nút

Chiều dài phần tử lấy bằng hai đơn vị, gốc tọa độ đặt ở giữa phần tử. Nếu biết các lực cắt Q_1, Q_2 tại hai nút thì lực cắt V tại điểm bất kỳ của phần tử tính theo công thức.

$$V(x) = f_5 Q_1 + f_6 Q_2 \quad (19)$$

trong đó:

$$f_5 = \frac{1}{2}(1-x); f_6 = \frac{1}{2}(1+x)$$

Như vậy, mỗi phần tử có hai chuyển vị nút W_1, W_2 hai góc xoay θ_1, θ_2 và hai lực cắt nút Q_1, Q_2 , tổng cộng có sáu thông số (6 ẩn) cần xác định.

Gọi $\{X\}$ là véc tơ cột chứa sáu ẩn của phần tử theo thứ tự sau.

$$\{X\} = [W_1 \ W_2 \ \theta_1 \ \theta_2 \ Q_1 \ Q_2]^T \quad (20)$$

thì có thể viết lại các biểu thức (10) và (11) dưới dạng ma trận như sau.

$$\begin{aligned} W(x) &= [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ 0 \ 0] \{X\} \\ V(x) &= [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ f_5 \ f_6] \{X\} \end{aligned} \quad (21)$$

Sau khi đã biết các hàm chuyển vị và hàm lực cắt thì dễ dàng tính được biến dạng uốn χ_x , nội lực mômen M_x , biến dạng trượt γ_x , góc xoay φ (do mômen gây ra) của phần tử như sau.

$$\chi_x = \left[-\frac{d^2 W}{dx^2} \beta^2 + \frac{\alpha}{GF} \frac{dV}{dx} \beta \right] \quad (22)$$

$$M_x = EJ \chi_x \quad (23)$$

$$\gamma_x = \frac{\alpha}{GF} [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ f_5 \ f_6] X \quad (24)$$

$$\varphi = \left[-\frac{dW}{dx} \beta + \frac{\alpha}{GF} V \right] \quad (25)$$

Trong các công thức trên $\beta = \frac{2}{\Delta x}$ là hệ số đưa chiều dài hai đơn vị của phần tử về chiều dài thật Δx của nó.

b. Ma trận độ cứng phần tử

Biết được hàm độ võng, hàm lực cắt của phần tử thì dễ dàng tính được ma trận độ cứng phần tử. Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta viết lượng cưỡng bức đối với bài toán tĩnh như sau.

$$Z = \int_{-1}^1 M_x [\chi_x] dx + \int_{-1}^1 V [\gamma_x] dx \rightarrow \text{Min} \quad (26)$$

χ_x và γ_x là các biểu thức chứa các ẩn $X(i)$ cho nên điều kiện dừng của (26) được viết lại như sau.

$$\delta Z = \int_{-1}^1 M_x \delta [\chi_x] dx + \int_{-1}^1 V \delta [\gamma_x] dx = 0 \quad \text{hay}$$

$$[A_e] = \delta Z = \frac{\Delta X}{2} \begin{pmatrix} \int_{-1}^1 M_x \left[\frac{\partial \chi_x}{\partial X(i)} \right] dx \\ + \int_{-1}^1 V \left[\frac{\partial \gamma_x}{\partial X(i)} \right] dx \end{pmatrix} = 0 \quad (27)$$

$X(i)$ với $(i=1 \div 6)$ lần lượt là các ẩn chuyển vị, góc xoay và lực cắt ($W_1, W_2, \theta_1, \theta_2, Q_1, Q_2$) tại hai đầu phần tử, theo (20) được viết lại như sau:

$$\{X_e\} = [W_1 \ W_2 \ \theta_1 \ \theta_2 \ Q_1 \ Q_2]^T$$

Hệ số $\Delta x/2$ để đưa tích phân từ (-1) đến (1) về tích phân theo chiều dài phần tử. Ứng với mỗi (i) ta được một hàng 6 cột, lần lượt cho i chạy từ 1 đến 6 và tính (27) ta nhận được ma trận độ cứng phần tử [ae] có kích thước (6x6), như sau:

$$[ae] = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{12EJ}{L^3} & \frac{6EJ}{L^2} & \frac{6EJ}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{12EJ}{L^3} & \frac{12EJ}{L^3} & -\frac{6EJ}{L^2} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & 0 \\ \frac{6EJ}{L^2} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & \frac{2EJ}{L} & -\left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & \left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L \\ \frac{6EJ}{L^2} & -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & \frac{4EJ}{L} & \left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & -\left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L \\ 0 & 0 & \left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & -\left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & \left(\frac{0.667}{*10^{-5}}\right)\frac{L^3}{EJ} & \left(\frac{0.333}{*10^{-5}}\right)\frac{L^3}{EJ} \\ 0 & 0 & -\left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & \left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & \left(\frac{0.333}{*10^{-5}}\right)\frac{L^3}{EJ} & \left(\frac{0.667}{*10^{-5}}\right)\frac{L^3}{EJ} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (28)$$

Các tích phân trong (19) có thể tính chính xác hoặc tính theo các tích phân gần đúng (tích phân số) của Gauss. Sau khi tính, nhận được ma trận [ae](6x6) theo (28).

Ma trận [ae] gọi là ma trận độ cứng phần tử, L là độ dài một phần tử. Bởi vì hàm độ võng của phần tử là đa thức bậc ba nên các lực tác dụng, lực quán tính của các phần tử đều phải phân bố về nút của nó.

Có sáu ẩn ta có được sáu phương trình và có dạng sau.

$$[A_e] \{X_e\} = \{B_e\} \quad (29)$$

Trong đó:

- $\{B_e\}$ là véc tơ lực nút phần tử (đối với bài toán tĩnh), nếu như tại nút (1) có lực tác dụng P thì véc tơ $B(1)=P...$

- $\{B_e\} = \{0\}$ là véc tơ "0" (đối với bài toán dao động tự do), nếu khối lượng m đặt tại nút (1) (phần tử chuyển vị) và lực quán tính $f_m=m\omega^2 W_1$ thì thành phần này được đưa vào ma trận ae tại vị trí sau: $ae(1,1)=m\omega^2$.

Thông thường, ta sẽ đưa các lực quán tính vào ma trận tổng thể của thanh.

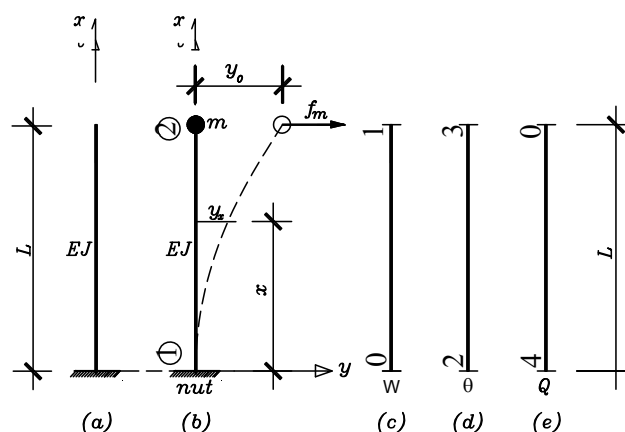
Biết được ma trận độ cứng phần tử thì dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng tổng thể của thanh. Giả sử thanh chỉ có một phần tử thì ma trận [ae] chính là ma trận độ cứng tổng thể của thanh. Giả sử chuyển vị tại nút (1) bằng không thì ta bỏ dòng 1 cột 1 của ma trận [ae], giả sử lực cắt $Q_2=0$ thì ta bỏ dòng 6 cột 6 của [Ae] bởi vì chúng ta không có hai ẩn này.

4.2. Ví dụ tính toán

Để ngắn gọn, để hiểu trong trình bày mà không làm mất đi tính tổng quát của bài toán, tác giả trình bày lời giải số của bài toán dao động tự do của thanh bằng cách kết hợp phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp chuyển vị cưỡng bức thông qua các ví dụ cụ thể sau:

Thanh đầu ngàm - đầu tự do

Cho thanh thẳng đầu ngàm - đầu tự do, chiều dài thanh L, có khối lượng phân bố đều trên suốt chiều dài thanh, thanh có độ cứng uốn $EJ=const$, hình 4a. Xác định tần số dao động riêng và dạng dao động riêng của thanh.



Hình 4. Thanh đầu ngàm - đầu tự do

a. Ẩn số của bài toán và cách đánh số ẩn

Đánh số ẩn theo thứ tự từ trái sang phải đối với dầm, từ dưới lên trên đối với cột, theo các ẩn như sau:

$$\{X\} = [W_1 \ W_2 \ \theta_1 \ \theta_2 \ Q_1 \ Q_2]^T \quad (a)$$

Nguyên tắc đánh số ẩn là: tại nút nào của phần tử có chuyển vị thẳng W bằng không (nút tại ngàm, tại gối tựa ..) thì đánh số ẩn là "0", tại nút nào có lực cắt Q bằng không (nút tại đầu tự do) thì cũng đánh số ẩn là "0", các nút còn lại đánh số ẩn từ 1 ÷ n (với n là tổng số ẩn của bài toán).

Với bài toán trên hình 4, nếu xem cả thanh là một phần tử thì số ẩn được đánh như hình 4c, d, e.

Theo hình 4b, tại nút (1) chân ngàm có chuyển vị thẳng bằng không, ta đánh $W(1)=0$, tại nút (2) đầu tự do của phần tử có lực cắt bằng không, ta đánh $Q(2)=0$, các ẩn khác không ta đánh theo thứ tự từ 1 ÷ 4, cụ thể là $W(2)=1$, $\theta(1)=2$, $\theta(2)=3$ và $Q(1)=4$. Như vậy, bài toán có tổng số ẩn là 4, được sắp đặt từ trái sang phải như sau:

$$\{X\} = [W_2 \ \theta_1 \ \theta_2 \ Q_1]^T = [1 \ 2 \ 3 \ 4]^T \quad (b)$$

b. Ma trận độ cứng phần tử

Từ ma trận độ cứng phần tử chung [ae] theo (28), ta bỏ hàng 1 cột 1 và hàng 6 cột 6 (vì $W(1)=0$, $Q(2)=0$), cuối cùng ta nhận được ma trận độ cứng phần tử $ae1$ như sau:

$$[ae] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{12EJ}{\Delta x^3} & -\frac{6EJ}{\Delta x^2} & -\frac{6EJ}{\Delta x^2} & 0 \\ -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & \frac{2EJ}{L} & -\left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L \\ -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & \frac{4EJ}{L} & \left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L \\ 0 & \left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & -\left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & \left(\frac{0.667}{*10^{-5}}\right)\frac{L^3}{EJ} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad (c)$$

c. Ma trận độ cứng tổng thể

Thuật toán lắp ghép ma trận độ cứng tổng thể như sau:

Bước 1: Từ ma trận độ cứng phần tử [ae(6x6)] chung, đánh số mã theo số ẩn của từng phần tử thứ i (i=1÷n) theo nguyên tắc từ trái sang phải, từ trên xuống dưới, từ bé đến lớn.

Bước 2: Trong [ae] chung (28), ta tiến hành xóa hàng, cột liên quan đến ẩn có số mã bằng "0" (nếu có) của phần tử (1), phần còn lại (không bị xóa) chính là ma trận độ cứng của phần tử (1).

Bước 3: Coi như chưa xóa hàng cột theo Bước 2, từ [ae] chung ban đầu ta xóa hàng, cột liên quan đến ẩn có số mã bằng "0" (nếu có) của phần tử (2), phần còn lại chính là ma trận độ cứng của phần tử (2). Các phần tử tiếp theo làm tương tự. Cuối cùng ta nhận được các ma trận độ cứng phần tử [ae]_i (i=1÷n).

Bước 4: Tạo ma trận [0] tổng thể [A(0)] có kích thước là tổng số ẩn của bài toán.

Bước 5: Lần lượt lấy các số hạng trong từng ma trận độ cứng phần tử đã tìm ở bước 3 đặt vào vị trí có số mã hàng (i), cột (j) tương ứng trong ma trận độ cứng tổng thể [A(0)]. Nếu tại cùng một vị trí có nhiều số hạng xếp chồng lên nhau (cùng i, j) thì được cộng dồn lại với nhau. Cuối cùng ta thu được ma trận độ cứng tổng thể của toàn hệ [A].

Xem toàn bộ thanh là một phần tử, gồm hai nút, nút 1 tại chân ngàm của thanh, nút hai tại đầu tự do của thanh, các ẩn chuyển vị W, góc xoay θ, và lực cắt Q tại hai đầu thanh, như hình 4c, d, e.

Tổng số ẩn của bài toán là 4 nên kích thước ma trận độ cứng tổng thể là [A(4x4)] (chưa kể đến điều kiện biên và điều kiện chuyển vị cưỡng bức tại đầu thanh).

Biết được ma trận độ cứng phần tử [ae] đã tính được theo (28) và biết được kích thước của ma trận tổng thể [A(4x4)] thì ta dễ dàng xây dựng được ma trận độ cứng tổng thể của toàn thanh.

Giả sử ma trận tổng thể là ma trận "0" có kích thước (4x4) như sau:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Vì W(1)=0 nên trong [ae] ta xóa hàng 1 cột 1, Q(2)=0 nên ta xóa hàng 6 cột 6, thu được [ae(4x4)]. Ta cộng từng số hạng ae(j,i) trong [ae] với phần tử a(i,j) tương ứng về vị trí trong [A], cuối cùng ta dành được ma trận tổng thể như sau:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \frac{12EJ}{\Delta x^3} & -\frac{6EJ}{\Delta x^2} & -\frac{6EJ}{\Delta x^2} & 0 \\ -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & \frac{2EJ}{L} & -\left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L \\ -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & \frac{4EJ}{L} & \left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L \\ 0 & \left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & -\left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & \left(\frac{0.667}{*10^{-5}}\right)\frac{L^3}{EJ} \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \quad (d)$$

Chú ý ngoài các ẩn chuyển vị, góc xoay, lực cắt của thanh còn phải xét thêm các ẩn là các thừa số Lagrange λ của các điều kiện liên kết ở hai đầu thanh.

Trong bài này, ta còn thêm hai ẩn λ₁, λ₂ là hai thừa số Lagrange ứng với hai điều kiện ràng buộc là góc xoay tại ngàm chân thanh bằng không và chuyển vị cưỡng bức tại đầu tự do của thanh bằng y₀. Cụ thể như sau:

$$g_1 = \varphi = \lambda_1 \left[-\frac{dW}{dx} \beta + \frac{\alpha}{GF} V \right]_{[phantu(1) \text{ tai } x=-1]} = 0$$

$$g_2 = \lambda_2 [y(npt,2) - y_0] = 0 \quad (e)$$

Như vậy, ma trận độ cứng tổng thể [A] sẽ được mở rộng thêm hai hàng, hai cột như sau:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \left(\frac{12EJ}{L^3} - \frac{1}{2}EJk_1^2L\right) & -\frac{6EJ}{L^2} & -\frac{6EJ}{L^2} & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{4EJ}{L} & \frac{2EJ}{L} & -\left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & 1 & 0 \\ -\frac{6EJ}{L^2} & \frac{2EJ}{L} & \frac{4EJ}{L} & \left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & -\left(\frac{0.2^*}{10^{-4}}\right)L & \left(\frac{0.667}{*10^{-5}}\right)\frac{L^3}{EJ} & \left(\frac{-1}{50000}\right)\frac{L^2}{EJ} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{50000}\frac{L^2}{EJ} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} \quad (f)$$

Trong ma trận độ cứng tổng thể ta thấy trong số hạng a(1,1) xuất hiện lực

$$f_m = -m\omega^2 y(x) = -EJ \frac{m\omega^2}{EJ} y(x) = -EJk_1 y(x) \quad (g)$$

$$k_1 = \frac{m\omega^2}{EJ}; \quad \omega = k_1 \sqrt{\frac{EJ}{m}} \quad (h)$$

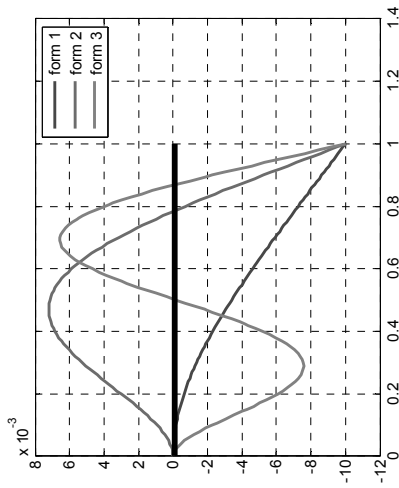
f_m: là lực quán tính, m là khối lượng trên một đơn vị chiều dài, tại các nút có khối lượng tập trung (mL), tại đầu tự do là (mL/2). Lực quán tính tác dụng tại các nút sẽ là:

$$f_{mi} = -m\omega^2 W_i L \quad (i \text{ là các nút giữa})$$

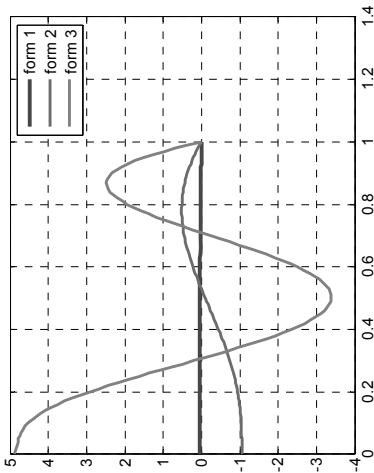
$$f_{mi} = -m\omega^2 W_i L/2 \quad (i \text{ là các nút tại đầu tự do})$$

Vì ở đây coi thanh là một phần tử có chiều dài L, nên lực quán tính tại đầu thanh bằng:

$$f_m = -\frac{1}{2} EJk_1^2 L$$



Hình 5. Ba dạng dao động ứng với ba tần số đầu tiên



Hình 6. Ba dạng đường lực cắt ứng với ba tần số đầu tiên

Nhận xét:

Theo hình 5, ta thấy rằng đồ thị biểu diễn ba dạng dao động tương ứng với ba tần dao động đầu tiên giao nhau tại đầu thanh (đây là vị trí kích chuyển vị cưỡng bức bằng y0; hình 6 là đồ thị biểu diễn ba dạng đường lực cắt tương ứng với ba tần dao động đầu tiên giao nhau tại đầu thanh (đây là vị trí có lực cắt bằng không), dạng đường lực cắt trùng với trục thanh (lực cắt bằng không).

4. KẾT LUẬN

Với việc kết hợp phương pháp chuyển vị cưỡng bức và phương pháp phần tử hữu hạn, tác giả đã xây dựng thành công bài toán dao động tự do của thanh có xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang, tìm được lời giải số của các bài toán hoàn toàn phù hợp với kết quả giải bằng các phương pháp hiện có. Khi chia thanh thành nhiều phần tử, ta sẽ nhận được nhiều nghiệm chính xác.

Các tần số dao động nhận được theo phương pháp PTHH gần như trùng khớp với kết quả nhận được theo phương pháp giải tích trong trường hợp không xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang (h/L=1/100), sai số không đáng kể, chẳng hạn thanh đầu ngàm - đầu tự do kết quả nhận được so với kết quả chính xác có sai số 0,14%, 0,47% và 0,79% tương ứng với ba tần số dao động đầu tiên (bảng 3), điều này chứng tỏ độ tin cậy và hiệu quả của phương pháp phần tử hữu hạn đối với với bài toán dao động của thanh.

Kết quả nhận được trong hai trường hợp có xét và không xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang thay đổi lớn (tần số dao động riêng giảm lần lượt 4.807%, 23.654% và 38.199% ứng với ba tần số dao động đầu tiên - bảng 2) đối với thanh đầu ngàm - đầu tự do. Điều này cho thấy cần phải xét đến ảnh hưởng của biến dạng trượt ngang khi (h/L ≥ 1/10).

Khi không xét đến biến dạng trượt ngang (G→∞) hoặc (h→0) các biểu thức, ma trận độ cứng và kết quả nhận được trùng với bài toán xây dựng theo lý thuyết Euler - Bernoulli truyền thống.

Khi dùng phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải bài toán dao động tự do của thanh cho ta ngay phương trình đã thức xác định tần số dao động riêng của thanh mà không phải thông qua các phép biến đổi phức tạp để đưa ma trận về ma trận đường chéo và không cần phải tra bảng. Phương pháp phần tử hữu hạn kết hợp với phương pháp chuyển vị cưỡng bức được trình bày ở đây cho ta một thuật toán rất hiệu quả, một cách tiếp cận mới để đánh giá tần số dao động của bài toán trị riêng của thanh và hệ thanh. Đó có thể là ưu điểm nổi bật nhất của bài báo này.

Kiến nghị: Dùng cách tiếp cận mới đã xây dựng ở trên để tìm trị riêng và véc tơ riêng của các bài toán cơ học nói riêng và tìm nghiệm của bài toán có vẻ phải bằng không nói chung.

Lời cảm ơn

Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Hàng hải Việt Nam trong đề tài mã số: DT21-22.80

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Ha Huy Cuong (2005), Gaussian extreme principle method, Scientific and technical journal, IV Page 112 to 114.
2. Doan Van Duan (2014), Forced displacement method to solve eigenvalues and eigenvectors, Construction Journal, no. 11. Pages 82 to 84.
3. Doan Van Duan (2016), Study on elastic stability of bar system structure with consideration of lateral shear strain, Contraction publisher, 156 pages.
4. Alan Jennings. Matrix Computation for Engineers and Scientists, John Wiley & Sons - Chicheste - New York - Brisbane - Toronto. PP. 65-69.
5. Lin T. Y. and Yong B. W. (1965), Two large shells of posttensioned precast concrete, Civil Engineering. ASCE, pp. 56-59.
6. Cornelius Lanczos (1949), The variational principles of Mechanics, University of Torono Press,
7. Ferdinand P. Beer - E. Russell Johnston, Jr. - John T. DeWolf (2006), Mechanics of Materials (fourth edition), McGraw-Hill Companies, INC, New york, 787 pages.
8. G. Korn - T. Korn (1961), Mathematical Handbook for scientists and Engineers, McGraw-Hill, New york (Russian translation, edited by I. Bramovich, Nauka - Moscow Publisher, 1964).
9. O.C. Zienkiewicz - R.L. Taylor (1991), The finite element method (fourth editon) Volume 2, McGraw-Hill Book Company, INC, 807 pages.
10. Stephen P. Timoshenko - J. Goodier (1970), Theory of elasticity, McGraw-Hill, New york (Russian translation, edited by G. Shapiro, Nauka - Moscow Publisher, 1979), 560 pages.
11. Stephen P. Timoshenko - Jame M. Gere (1961), Theory of elastic stability, McGraw-Hill Book Company, INC, New york - Toronto - London, 541 Tr. William T. Thomson, First Edition (2014), Pearson New International Edition, 523 pages.