

Phân tích giới hạn và thích nghi các tấm mỏng chịu uốn bằng thuật toán đối ngẫu

Shakedown analysis of bending plate by a dual algorithm

> GIÁP VĂN TẤN, TRẦN THANH NGỌC, NGUYỄN THỊ THÙY LIÊN

Khoa Xây dựng - Trường Đại học Kiến trúc Hà Nội

TÓM TẮT:

Bài báo trình bày thuật toán đối ngẫu của việc phân tích giới hạn và thích nghi các tấm mỏng chịu uốn. Dựa trên tiêu chuẩn chảy dẻo Von Mises và phép tối ưu hóa phi tuyến, bài báo sẽ phát triển một thuật toán đối ngẫu để tính toán đồng thời cận trên và cận dưới của giới hạn phá hoại dẻo và giới hạn thích nghi. Các phần tử tấm mỏng chịu uốn bốn nút (phần tử DKQ) sẽ được sử dụng để rời rạc hóa kết cấu. Cuối cùng bài báo sẽ khảo sát một số thí dụ cụ thể để thấy rõ các ưu điểm nổi bật của phương pháp như sự hội tụ của thuật toán cũng như độ chính xác của kết quả.

Từ khóa: Phương pháp số; tấm chịu uốn; phân tích giới hạn; phân tích sự thích nghi; đối ngẫu; lập trình phi tuyến

ABSTRACT:

In this paper, the duality between the lower and the upper bound shakedown analyses of bending plate is presented. Based on the duality theory, the shakedown load multiplier formulated by static theorem is proved actually to be the dual form of the shakedown load multiplier formulated by kinematic theorem. A dual algorithm based upon the von Mises yield criterion and a non-linear optimization procedure is then developed to compute simultaneously both the upper and lower bounds of the plastic collapse limit and the shakedown limit. The DKQ bending plate element is used to discrete the problem field. Numerical examples are presented to show the excellent convergence and accuracy of solutions obtained by the present method.

Key Words: Numerical method; bending plate; limit analysis; shakedown analysis; duality; non-linear programming

1. GIỚI THIỆU

Việc xác định giới hạn phá hoại dẻo và giới hạn thích nghi cho kết cấu công trình chịu tải trọng biến thiên theo thời gian là một vấn đề quan tâm lớn cho nhiều nhà thiết kế. Trong phân tích dẻo, có các phương pháp từng bước và phương pháp trực tiếp để xác định khả năng chịu lực của kết cấu.

Đối với phương pháp từng bước thì cần thiết phải biết mô hình vật liệu và quá trình chất tải. Dựa vào mô hình đàn dẻo hay cứng dẻo lý tưởng của vật liệu, lý thuyết phân tích giới hạn giúp đánh giá khả năng chịu tải của kết cấu dưới tác dụng của tải trọng. Ở ngoài giới hạn này, kết cấu sẽ sụp đổ do sự chảy dẻo của một số bộ phận hay toàn bộ kết cấu. Những đóng góp quan trọng cho sự phát triển của lý thuyết phân tích giới hạn là hoàn chỉnh công thức đầu tiên của cả hai định lý cận trên - cận dưới của Prager [1] và công thức thay thế sử dụng vật liệu cứng-dẻo của Hill [2]. Các ứng dụng của lý thuyết phân tích giới hạn trong cơ học tính toán sau đó được biết đến rộng rãi, trong số đó là các nghiên cứu của Hodge [3-5], Massonnet và Save [6], Chakrabarty [7], Chen và Han [8], Lubliner [9].

Tuy nhiên, do sự phức tạp của kết cấu nên ngay cả khi có các công cụ để giải quyết các bài toán về phân tích giới hạn thì phương pháp từng bước cũng chỉ giới hạn trong việc giải quyết các bài toán đơn giản. Phương pháp số, từ những ví dụ rất đơn giản trong hai chiều đến các ứng dụng rất phức tạp ba chiều, đã thể hiện khả năng tuyệt vời của nó. Dựa trên tối ưu hóa toán học và phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp trực tiếp được coi là nhanh hơn phương pháp từng bước trong việc xác định lời giải thích nghi. Phương pháp này ngày càng tỏ ra là một công cụ mạnh mẽ nhờ có sự phát triển nhanh chóng của công nghệ máy tính trong những thập kỷ qua. Trong số các nhà nghiên cứu đã góp phần vào sự phát triển của phương pháp trực tiếp phải kể đến là Biron và Hodge [10], Hodge và Belytschko [11], Maier [12], Nguyen Dang Hung [13], Casciaro và Cascini [14], Morelle [15].

Nghiên cứu hiện nay trong phân tích thích nghi của kết cấu đang tập trung vào sự phát triển của những công cụ tính toán hiệu quả dựa vào phương pháp cận trên và cận dưới. Phương pháp cận trên dựa trên định lý cận trên Koiter để xác định cực tiểu của tải trọng phá hoại. Việc tính toán được bắt đầu từ vùng nguy hiểm để tính toán miền tải trọng thích nghi bằng cách giả sử một cơ cấu phá hủy khả dĩ động. Ngược lại, phương pháp cận dưới dựa trên định lý cận dưới Melan để xác định cực đại của tải trọng an toàn, và việc tính toán được bắt đầu từ vùng an toàn của kết cấu bằng cách giả sử một trường ứng suất khả dĩ tĩnh để xác định hệ số tải trọng lớn nhất để kết cấu xảy ra thích nghi. Tính đối ngẫu giữa hai cận đã được chứng minh bằng sự kết hợp giữa hai phương pháp, gồm hai điểm chính: (1) véc tơ tốc độ biến dạng tỷ lệ thuận với gradient của hàm chảy dẻo và (2) hệ số dẻo không âm tại các điểm mà ở đó hàm chảy dẻo bằng không.

Quy hoạch tuyến tính và phi tuyến đã được áp dụng để giải quyết các bài toán phân tích giới hạn và thích nghi của kết cấu. Quy hoạch tuyến tính đã được sử dụng rộng rãi trong phân tích giới hạn bởi vì phương pháp này gần như cho phép giải quyết các

bài toán phức tạp. Việc sử dụng quy hoạch tuyến tính kéo theo giá trị gần đúng của hàm chảy dẻo phi tuyến do sự tuyến tính từng đoạn một hay hàm chảy dẻo bản thân nó phải tuyến tính (ví dụ tiêu chuẩn chảy dẻo Tresca). Overton [16] cho thấy rằng phương pháp Newton - Raphson có thể giải quyết khá hiệu quả bài toán phân tích giới hạn. Theo hướng này, thuật toán mới được xây dựng nhằm sử dụng trực tiếp hàm chảy dẻo Von Mises hay các hàm chảy dẻo phi tuyến khác.

Căn cứ vào định lý cận dưới và định lý cận trên, các phương pháp số khác nhau được xây dựng để phân tích những kết cấu phức tạp mà với những kết cấu này công cụ giải tích không thể giải quyết được. Thực tế việc sử dụng các phương pháp từng bước để giải quyết bài toán phân tích sự thích nghi là rất công kềnh và tốn thời gian. Do đó phương pháp trực tiếp là cần thiết. Với sự hỗ trợ của phương pháp phần tử hữu hạn, bài toán tìm lời giải thích nghi có thể được mô tả và chuyển đổi thành bài toán quy hoạch toán học. Dựa trên sự tuyến tính từng đoạn của phương pháp miền chảy dẻo, quy hoạch tuyến tính được đề xuất bởi Maier [12]. Cách tiếp cận này sau đó được hoàn thiện bởi Corradi và Zavelani [17]. Belystchko [18] áp dụng quy hoạch phi tuyến để rời rạc hóa định lý cận dưới và tiến hành nghiên cứu ví dụ cụ thể cho tấm hình vuông với lỗ tròn ở trung tâm chịu tải trọng hai trục ở trạng thái ứng suất phẳng.

2. PHÂN TÍCH THÍCH NGHI CỦA TẤM MỎNG CHỊU UỐN

2.1. Các phương trình cơ bản trong lý thuyết tấm mỏng (Lý thuyết tấm Kirchoff)

Xét tấm có diện tích bề mặt kín A với điều kiện biên tĩnh ∂A_σ và điều kiện biên động ∂A_u . Đối với các tấm mỏng, ở đây các biến dạng trượt được bỏ qua, quan hệ động học có thể được viết như sau:

$$\dot{\mathbf{k}} = [\dot{k}_{xx} \dot{k}_{yy} 2\dot{k}_{xy}]^T = \nabla^2 \dot{w} \quad (1)$$

trong đó $\dot{\mathbf{k}}$ là véc tơ các thành phần độ cong và \dot{w} là vận tốc ngang. Toán tử ∇^2 được định nghĩa bằng:

$$\nabla^2 = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right]^T$$

Hệ thức cân bằng cũng có thể được viết là:

$$(\nabla^2)^T \mathbf{m} - p = 0 \quad (2)$$

trong đó $\mathbf{m} = [m_{xx} \ m_{yy} \ m_{xy}]^T$ là véc tơ mô men uốn và mô men xoắn, p là tải trọng ngang. Gọi t là bề dày tấm và σ_y là giới hạn chảy thì phương trình mặt dẻo theo tiêu chuẩn chảy dẻo von Mises được viết như sau:

$$f(\mathbf{m}) = \sqrt{\mathbf{m}^T \mathbf{P} \mathbf{m}} - m_p = 0 \quad (3)$$

trong đó $m_p = \sigma_y t^2 / 4$ là mô men giới hạn dẻo trên một đơn vị chiều dài của tiết diện tấm và

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

2.2. Thiết lập biểu thức cận dưới

Xét một miền tải trọng đa diện lõm L và một tải trọng đường đặc biệt gồm có tất cả các tải trọng điểm \hat{P}_k ($k = 1, \dots, m$) trong L . Một điểm A trong miền xác định của bài toán được xác định bằng một véc tơ biến số \mathbf{x} và véc tơ mô men đàn hồi giả \mathbf{m}^E . Định lý thích nghi cận dưới phát biểu rằng sự thích nghi xảy ra nếu tồn tại

một trường mô men dư không phụ thuộc vào thời gian $\bar{\rho}$ là khả dĩ tính để trường mô men thực tế $\mathbf{m} = \alpha \mathbf{m}^E + \bar{\rho}$ không vi phạm điều kiện chảy dẻo tại bất kì điểm nào trong kết cấu. Dựa trên định lý này, chúng ta có thể tìm thấy một trường mô men dư là khả dĩ tính để có được một miền tải trọng lớn nhất αL đảm bảo (3). Hệ số tải trọng thích nghi tìm được α^- nói chung thấp hơn cận dưới và bài toán thích nghi có thể được xem như là bài toán tìm cực đại trong quy hoạch phi tuyến.

$$\alpha^- = \max \alpha, \quad (5a)$$

Ràng buộc:

$$\left\{ \begin{aligned} (\nabla^2)^T \bar{\rho}(\mathbf{x}) &= 0 \text{ trong } A \\ f(\alpha \mathbf{m}^E(\mathbf{x}, \hat{P}_k) + \bar{\rho}(\mathbf{x})) &\leq 0 \quad \forall k = \overline{1, m} \text{ trong } A \end{aligned} \right. \quad (5b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(\alpha \mathbf{m}^E(\mathbf{x}, \hat{P}_k) + \bar{\rho}(\mathbf{x})) &\leq 0 \quad \forall k = \overline{1, m} \text{ trong } A \end{aligned} \right. \quad (5c)$$

Bằng việc đưa toàn bộ bài toán vào phương pháp phần tử hữu hạn và áp dụng phương pháp tích phân Gauss-Legendre, phương trình (5) có thể viết lại như sau:

$$\alpha^- = \max \alpha, \quad (6a)$$

Ràng buộc:

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{i=1}^{NG} w_i \mathbf{B}_i^T \bar{\rho}_i &= \mathbf{0} \\ f(\alpha \mathbf{m}_{ik}^E + \bar{\rho}_i) &\leq 0 \quad \forall i = \overline{1, NG} \quad \forall k = \overline{1, m} \end{aligned} \right. \quad (6b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} f(\alpha \mathbf{m}_{ik}^E + \bar{\rho}_i) &\leq 0 \quad \forall i = \overline{1, NG} \quad \forall k = \overline{1, m} \end{aligned} \right. \quad (6c)$$

trong đó \mathbf{B}_i là ma trận biến dạng, w_i là trọng số tại điểm Gauss thứ i và NG là tổng số điểm Gauss trên toàn bộ kết cấu.

2.3. Thiết lập biểu thức cận trên

Ở đây, chúng ta giới thiệu chu kỳ làm việc khả dĩ của trường độ cong dẻo $\Delta \mathbf{k}^P$. Tại mỗi đỉnh tải trọng, tốc độ cong dẻo $\dot{\mathbf{k}}_k^P$ có thể không nhất thiết phải tương thích tại mỗi thời điểm trong suốt chu kỳ (thời gian) chất tải, nhưng độ cong dẻo tích lũy trên toàn chu kỳ phải thỏa mãn điều kiện tương thích động học, nghĩa là:

$$\Delta \mathbf{k}^P = \sum_{k=1}^m \dot{\mathbf{k}}_k^P = \nabla^2 \dot{w} \quad (7)$$

Định lý cận trên phát biểu rằng kết cấu thích nghi nếu tồn tại một trường vận tốc khả dĩ động mà cường độ của tải trọng bên ngoài nhỏ hơn so với cường độ nội lực và điều này được bỏ qua trong phạm vi bài toán. Dựa trên định lý này, lời giải cận trên α^+ được xem là tìm giá trị cực tiểu của bài toán quy hoạch phi tuyến (chỉ số trên P được bỏ qua để cho đơn giản).

$$\alpha^+ = \min \sum_{k=1}^m \int_A D^P(\dot{\mathbf{k}}_k) dA, \quad (8a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \Delta \mathbf{k} = \sum_{k=1}^m \dot{\mathbf{k}}_k &= \nabla^2 \dot{w} \text{ trong } A \\ \dot{w} &= 0 \text{ trên } \partial A_u \end{aligned} \right. \quad (8b)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{w} &= 0 \text{ trên } \partial A_u \end{aligned} \right. \quad (8c)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \sum_{k=1}^m \int_A \mathbf{m}^E(x, \hat{P}_k)^T \dot{\mathbf{k}}_k dA &= 1 \end{aligned} \right. \quad (8d)$$

trong đó cường độ tiêu tán dẻo trên một đơn vị diện tích là:

$$D^P(\dot{\mathbf{k}}_k) = m_p \sqrt{\dot{\mathbf{k}}_k^T \mathbf{Q} \dot{\mathbf{k}}_k} \quad (9)$$

$$\text{với } \mathbf{Q} = \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad (10)$$

Ta biểu thị các tham số nút của phần tử hữu hạn là $\mathbf{q} = [w \partial w / \partial x \partial w / \partial y]^T$. Bằng cách sử dụng phương pháp tích phân Gauss-Legendre, dạng rời rạc hóa của (8) có thể được viết như sau:

$$\alpha^+ = \min \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{NG} w_i m_p \sqrt{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{Q} \mathbf{k}_{ik}}, \quad (11a)$$

$$\text{Ràng buộc: } \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m \mathbf{k}_{ik} = \mathbf{B}_i \mathbf{q} \quad \forall i = \overline{1, NG}, \\ \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{NG} w_i \mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{m}_{ik}^E = 1. \end{array} \right. \quad (11b)$$

$$\quad (11c)$$

Lưu ý rằng điều kiện ràng buộc thứ hai trong (8c) được bỏ qua ở đây vì nó sẽ được tự động thỏa mãn bởi hàm dạng. Khi $m=1$, công thức (6) và (11) trở thành bài toán phân tích giới hạn.

3. TÍNH ĐỐI NGẪU CỦA CẶN TRÊN VÀ CẶN DƯỚI

Trong phần này, ta sẽ giới thiệu cận trên (11) là bài toán gốc và cận dưới (6) là bài toán đối ngẫu của nó. Để đơn giản, ta đưa vào một số ký hiệu như sau:

$$\mathbf{k}_{ik} = w_i \mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{k}_{ik}, \quad \mathbf{t}_{ik} = (\mathbf{Q}^{-1/2})^T \mathbf{m}_{ik}^E, \quad \hat{\mathbf{B}}_i = w_i \mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{B}_i \quad (12)$$

$$\text{trong đó } \mathbf{Q}^{1/2} \mathbf{Q}^{-1/2} = \mathbf{I}, \quad (\mathbf{Q}^{1/2})^T \mathbf{Q}^{1/2} = \mathbf{Q}. \quad (13)$$

Thay (12) vào (11), lời giải cận trên được viết lại như sau:

$$\alpha^+ = \min \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{NG} m_p \sqrt{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{k}_{ik}}, \quad (14a)$$

Ràng buộc:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^m \mathbf{k}_{ik} - \hat{\mathbf{B}}_i \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \forall i = \overline{1, NG}, \\ \sum_{i=1}^{NG} \sum_{k=1}^m \mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{t}_{ik} - 1 = 0 \end{array} \right. \quad (14b)$$

$$\quad (14c)$$

Người ta đã chứng minh được là trong trường hợp phân tích giới hạn, tồn tại một hình thức đối ngẫu của (14), xem ví dụ Heitzer và Staat [19], Andersen và cộng sự [20]. Vu và cộng sự [21] mở rộng lý thuyết này cho trường hợp phân tích thích nghi. Trong phần này, có sự mở rộng lý thuyết của họ để phân tích thích nghi của tấm được trình bày thông qua hai mệnh đề (Tham khảo chi tiết ở [27]).

4. THUẬT TOÁN ĐỐI NGẪU PHÂN TÍCH THÍCH NGHI CỦA TẤM

Một vấn đề khó khăn đối với bài toán tối ưu hóa là hàm mục tiêu trong phương trình (14a) không phải khả vi tại mọi điểm. Để khắc phục, ta thêm vào $D^p(\mathbf{k}_{ik})$ một số dương nhỏ, cụ thể là ε_0^2 . Một kỹ thuật hiệu quả cho bài toán tối ưu hóa quy mô lớn, được áp dụng thành công trong [21, 22, 23], đó là sử dụng phương pháp hàm phạt để khử ràng buộc đầu (14b) kết hợp với phương pháp nhân tử Lagrange để khử ràng buộc (14c).

Phương trình hàm phạt được viết như sau:

$$P = \sum_{i=1}^{NG} \left\{ \sum_{k=1}^m (m_p \sqrt{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{k}_{ik} + \varepsilon_0^2}) + \frac{c}{2} \left(\sum_{k=1}^m \mathbf{k}_{ik} - \hat{\mathbf{B}}_i \mathbf{q} \right)^T \left(\sum_{k=1}^m \mathbf{k}_{ik} - \hat{\mathbf{B}}_i \mathbf{q} \right) \right\}, \quad (15)$$

ở đây c là tham số phạt và $c \gg 1$. Hàm Lagrange được viết như sau:

$$L = P - \alpha \left(\sum_{i=1}^{NG} \sum_{k=1}^m \mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{t}_{ik} - 1 \right). \quad (16)$$

$$\text{Chúng ta biểu thị } \beta_i = -c \left(\sum_{k=1}^m \mathbf{k}_{ik} - \hat{\mathbf{B}}_i \mathbf{q} \right). \quad (17)$$

Sử dụng phương pháp Newton-Raphson để giải các điều kiện tối ưu Karush Kuhn Tucker (KKT) của (16) và sau một số biến đổi, ta có:

$$\mathbf{K} d\mathbf{q} = -\mathbf{K} \mathbf{q} + \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 (\alpha + d\alpha), \quad (18)$$

trong đó

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^{NG} \hat{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{E}_i^{-1} \hat{\mathbf{B}}_i, \quad (19)$$

$$\mathbf{f}_1 = - \sum_{i=1}^{NG} \hat{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{E}_i^{-1} \sum_{k=1}^m \mathbf{M}_{ik}^{-1} (\beta_i + \alpha \mathbf{t}_{ik}) \frac{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{k}_{ik}}{\sqrt{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{k}_{ik} + \varepsilon_0^2}},$$

$$\mathbf{f}_2 = \sum_{i=1}^{NG} \hat{\mathbf{B}}_i^T \mathbf{E}_i^{-1} \sum_k \mathbf{M}_{ik}^{-1} \sqrt{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{k}_{ik} + \varepsilon_0^2} \mathbf{t}_{ik}$$

$$\mathbf{M}_{ik} = m_p \mathbf{I} + (\beta_i + \alpha \mathbf{t}_{ik}) \frac{\mathbf{k}_{ik}^T}{\sqrt{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{k}_{ik} + \varepsilon_0^2}},$$

$$\text{và } \mathbf{E}_i = \frac{\mathbf{I}}{c} + \sum_k \mathbf{M}_{ik}^{-1} \sqrt{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{k}_{ik} + \varepsilon_0^2}. \quad (20)$$

Phương trình (18) được xem như phương trình của phương pháp phân tử hữu hạn trong phân tích đàn hồi, $\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{r}$, với ma trận độ cứng toàn hệ \mathbf{K} . Ma trận \mathbf{E}_i^{-1} đóng vai trò ma trận đàn hồi. Giải hệ này bằng phương pháp tương tự như với việc tính toán hệ đàn hồi sẽ đảm bảo ràng buộc (8c) được thỏa mãn tự động. Ta có các véctơ số gia của tham số nút \mathbf{q} , tốc độ cong \mathbf{k}_{ik} và β_i như sau:

$$d\mathbf{q} = d\mathbf{q}_1 + d\mathbf{q}_2 (\alpha + d\alpha),$$

$$d\mathbf{k}_{ik} = (d\mathbf{k}_{ik})_1 + (d\mathbf{k}_{ik})_2 (\alpha + d\alpha), \quad (21)$$

$$d\beta_i = (d\beta_i)_1 + (d\beta_i)_2 (\alpha + d\alpha),$$

trong đó

$$d\mathbf{q}_1 = -\mathbf{q} + \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_1, \quad d\mathbf{q}_2 = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{f}_2,$$

$$(d\mathbf{k}_{ik})_1 = -\mathbf{M}_{ik}^{-1} \sqrt{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{k}_{ik} + \varepsilon_0^2} (d\beta_i)_1 - \mathbf{M}_{ik}^{-1} \left(m_p \mathbf{k}_{ik} + \sqrt{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{k}_{ik} + \varepsilon_0^2} \beta_i \right),$$

$$(d\mathbf{k}_{ik})_2 = -\mathbf{M}_{ik}^{-1} \sqrt{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{k}_{ik} + \varepsilon_0^2} (d\beta_i)_2 - \mathbf{M}_{ik}^{-1} \sqrt{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{k}_{ik} + \varepsilon_0^2} \mathbf{t}_{ik},$$

$$(d\beta_i)_1 = -\mathbf{E}_i^{-1} \sum_k \mathbf{M}_{ik}^{-1} m_p \mathbf{k}_{ik} - \mathbf{E}_i^{-1} \left(\hat{\mathbf{B}}_i d\mathbf{q}_1 - \left(\sum_{k=1}^m \mathbf{k}_{ik} - \hat{\mathbf{B}}_i \mathbf{q} \right) \right) - \beta_i,$$

$$(d\beta_i)_2 = -\mathbf{E}_i^{-1} \hat{\mathbf{B}}_i d\mathbf{q}_2 - \mathbf{E}_i^{-1} \sum_k \mathbf{M}_{ik}^{-1} \sqrt{\mathbf{k}_{ik}^T \mathbf{k}_{ik} + \varepsilon_0^2} \mathbf{t}_{ik},$$

$$\text{và } (\alpha + d\alpha) = \frac{1 - \sum_{i=1}^{NG} \sum_{k=1}^m \mathbf{t}_{ik}^T [\mathbf{k}_{ik} + (d\mathbf{k}_{ik})_1]}{\sum_{i=1}^{NG} \sum_{k=1}^m \mathbf{t}_{ik}^T (d\mathbf{k}_{ik})_2}. \quad (23)$$

Các véctơ $d\mathbf{q}$, $d\mathbf{k}_{ik}$, $d\beta_i$ và $d\alpha$ là những số gia Newton đảm bảo giá trị của hàm mục tiêu giảm đối với biến trên (14) và tăng đối với biến dưới (6). Dựa vào (21) chúng ta có thể điều chỉnh các véctơ $d\mathbf{q}$, $d\mathbf{k}_{ik}$, $d\beta_i$ và $d\alpha$. Lặp lại các bước này có thể đưa chúng đến một tập hợp ổn định của $d\mathbf{q}$, $d\mathbf{k}_{ik}$, $d\beta_i$ và $d\alpha$ thỏa mãn tất cả các điều kiện (14) và (6). Thông tin chi tiết của thuật toán đối ngẫu xem trong [23].

5. MỘT SỐ VÍ DỤ

Trong phần này, nhóm tác giả trình bày một số ví dụ số để kiểm tra hiệu quả của thuật toán phân tích thích nghi bằng thuật

toán đối ngẫu đang nghiên cứu. Một số tấm chịu tải trọng phân bố đều hoặc tải trọng tập trung được xem xét. Sử dụng phần tử tấm bốn cạnh bốn nút DKQ để rời rạc hóa kết cấu. Trong tất cả các ví dụ cụ thể, các kết cấu này được làm bằng vật liệu đàn hồi-dẻo lý tưởng. Kết quả được so sánh với các kết quả đã công bố.

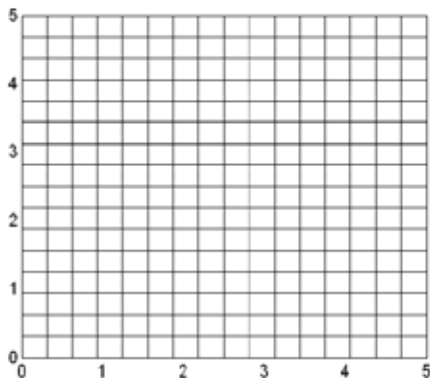
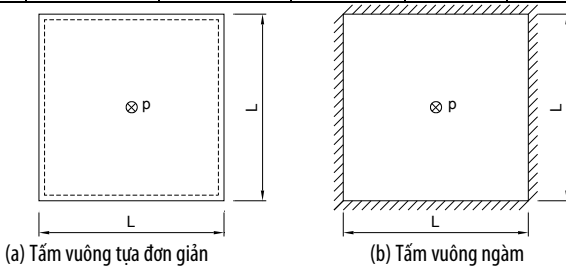
5.1. Phân tích giới hạn của tấm hình vuông chịu tải trọng phân bố đều:

Xét tấm hình vuông chịu tải trọng phân bố đều p trên bề mặt. Do tính đối xứng nên chỉ cần mô hình hóa một phần tư tấm bằng 256 phần tử DKQ, xem trên hình 1, ở đây ta xét cho trường hợp $L=10m$ và chiều dày tấm $t=0.5m$.

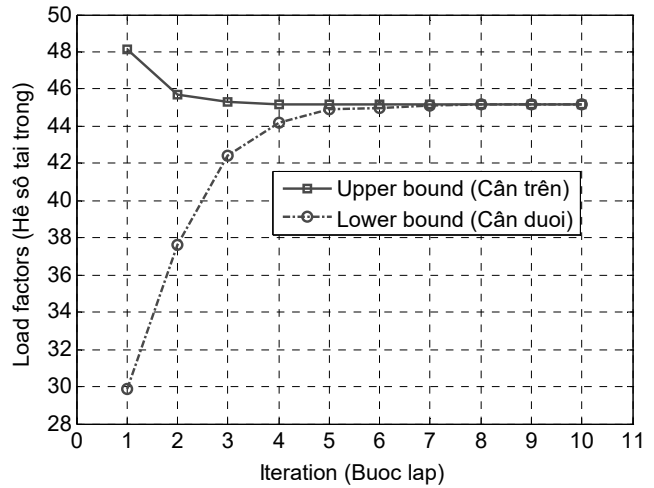
Đối với cả hai trường hợp tấm vuông bốn cạnh liên kết đơn giản và tấm vuông bốn cạnh liên kết ngàm, cận trên và dưới rất gần với nhau sau sáu lần lặp như trong hình 2, tức là trị số nghiệm dẻo đạt được trong thời gian tính toán chỉ có sáu bước đàn hồi tuyến tính. Bảng I cho thấy kết quả bằng số cho cả hai trường hợp, tấm vuông bốn cạnh liên kết đơn giản và tấm vuông bốn cạnh liên kết ngàm. Kết quả này được so sánh với kết quả tìm được theo phép giải tích của Hodge và Lubliner hoặc theo phương pháp số của Capsoni [24] bằng cách sử dụng 1 phần tử tấm C^1 và Le [25] bằng cách sử dụng phương pháp EFG. Các kết quả được chuẩn hóa với m_p/L^2 trong đó L là chiều dài của tấm. Nó được xem là kết quả hiện nay phù hợp với kết quả thu được bởi các tác giả khác. Đối với cả hai trường hợp, cận trên và dưới được xác định. Lợi thế theo phương pháp này là cận trên và dưới được tính toán đồng thời không đòi hỏi tính toán đặc biệt và chúng thì trùng khớp đã đảm bảo tính chính xác của phương pháp.

Bảng I. Tải trọng giới hạn của tấm hình vuông: giới hạn trên/dưới (pL^2/m_p).

Phương pháp	Hodge và cộng sự [11]	Lubliner [9]	Capsoni và cộng sự [24]	Le và cộng sự [25]	Hiện tại
Tựa đơn giản	26.54/24.86	27.71/23.81	25.02/-	25.01/-	25.04/25.04
Ngàm	49.25/42.86	52.01/-	45.29/-	45.07/-	45.16/45.16



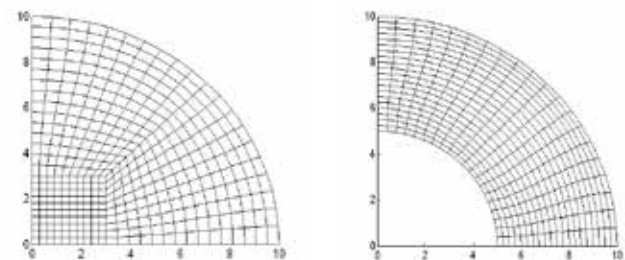
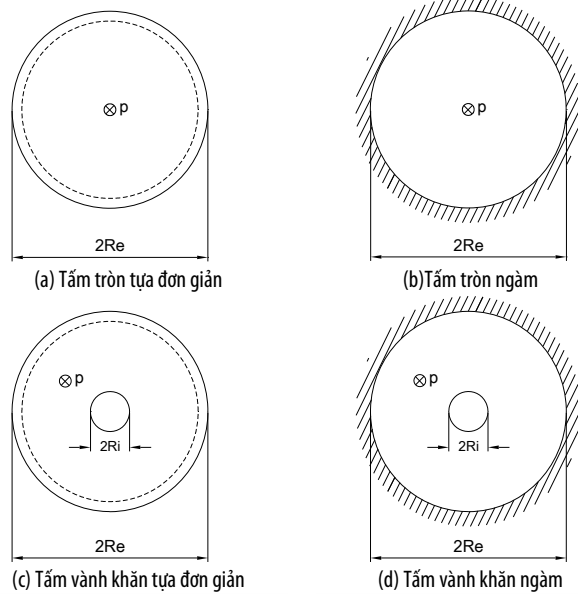
Hình 1. Lưới FE và kích thước hình học của tấm hình vuông



Hình 2. Tấm hình vuông ngàm: Sự hội tụ của lời giải

5.2. Phân tích giới hạn của tấm hình tròn và tấm hình vành khăn chịu tải trọng phân bố đều

Xét các tấm hình tròn và hình vành khăn với mép ngoài tựa đơn giản hoặc ngàm và chịu tải trọng phân bố đều p trên bề mặt (hình 3a, b, c, d).



(e) Mô hình hóa phần tử DKQ của 1/4 tấm tròn và tấm vành khăn

Hình 3. Lưới FE và kích thước hình học của tấm tròn và tấm vành khăn

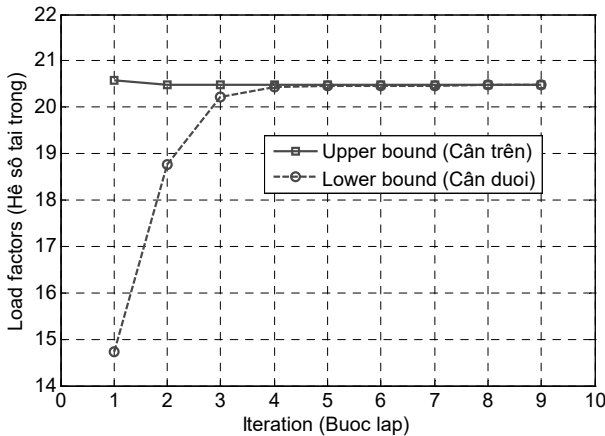
Gọi R_e và R_i là bán kính của tấm và của lỗ trung tâm, với tấm tròn thì $R_i=0$. Do tính đối xứng, một phần tư tấm được mô hình hóa bằng 400 phần tử, xem trên hình 3e, ở đây xét cho trường hợp $R_e=10m$. Kết quả số được tóm tắt trong bảng II đối với tỉ số R_i/R_e , dựa vào dạng không thứ nguyên $\pi(R_e^2 - R_i^2)p_i/m_p$. Bảng II cho thấy

lời giải số hiện tại hoàn toàn phù hợp với lời giải giải tích của Cinquini và Zanon [26] với trường hợp các tấm tựa đơn giản. Với trường hợp tấm ngàm, kết quả nghiên cứu cũng phù hợp với những kết quả trong [26] (sai lệch tối đa là 1.98%).

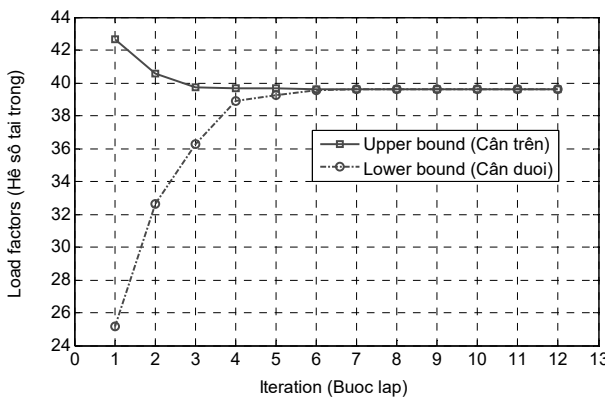
Bảng II. Tải trọng giới hạn của tấm hình tròn và hình vành khăn ($\pi(R_c^2 - R_i^2)p_l / m_p$)

$\frac{R_i}{R_c}$	Tựa đơn giản		Ngàm	
	Cinquini và cộng sự [26]	Hiện tại	Cinquini và cộng sự [26]	Hiện tại
0	20.47	20.47	39.43	39.63
0.1	19.50	19.50	38.42	39.09
0.2	18.05	18.05	37.72	38.34
0.3	16.80	16.80	38.19	38.81
0.4	15.79	15.79	40.01	40.68
0.5	14.97	14.97	43.58	44.34
0.6	14.31	14.31	49.82	50.74
0.7	13.76	13.76	61.09	62.30
0.8	13.29	13.29	84.54	85.40
0.9	12.90	12.90	156.59	158.08

Hình 4 và hình 5 cho thấy sự hội tụ của cận trên và cận dưới đối với tấm hình tròn tựa đơn giản và tấm tròn ngàm. Hai giới hạn này gần như dừng chỉ sau bốn lần lặp tối ưu hóa (đối với tấm tròn tựa đơn giản) và sáu lần lặp tối ưu hóa (đối với tấm tròn ngàm). Điều này cho thấy phương pháp này rất hiệu quả về thời gian tính toán so với phương pháp phân tích từng bước.

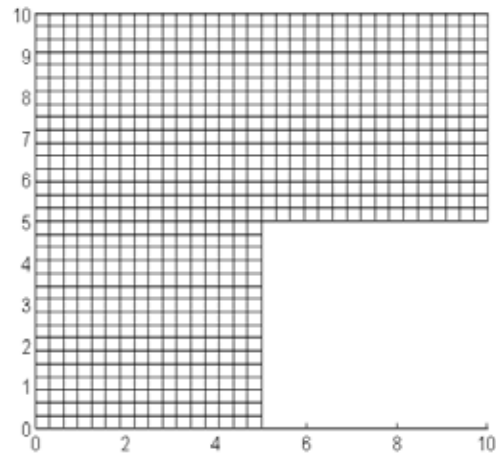
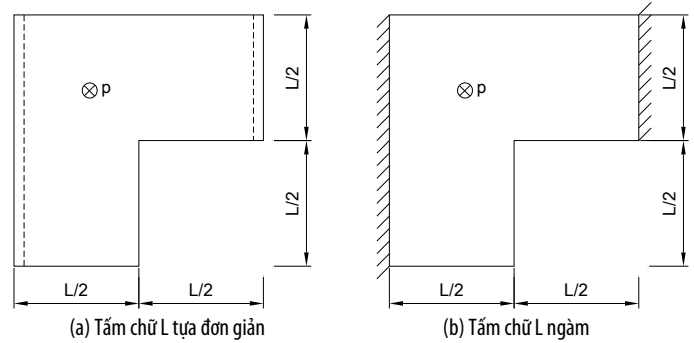


Hình 4. Tấm tròn tựa đơn giản: Sự hội tụ của lời giải



Hình 5. Tấm tròn ngàm: Sự hội tụ của lời giải

5.3. Tấm hình chữ L chịu tải trọng phân bố đều

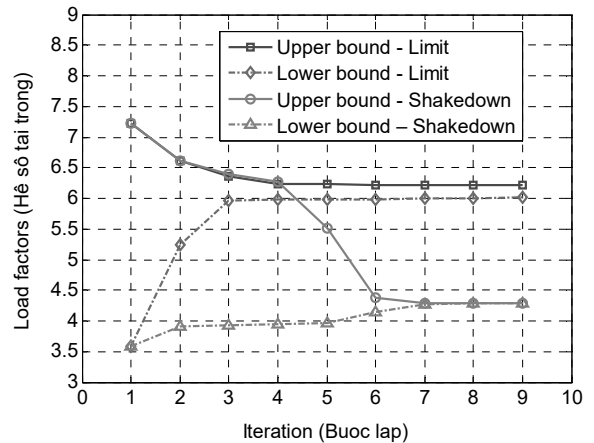


(c) Mô hình hóa phần tử DKQ của 1/4 tấm chữ L

Hình 6. Lưới FE và kích thước hình học của tấm chữ L

Xét tấm hình chữ L chịu tải trọng phân bố đều p (hình 6.a, b). Tải trọng p không đổi khi phân tích giới hạn, và thay đổi trong phạm vi $p \in [0, p_{max}]$ khi phân tích thích nghi. Bài toán này đã được nghiên cứu trong [27] theo phương pháp cận trên và phương pháp EFG. Ở đây, tấm được mô hình hóa bằng 768 phần tử DKQ như trên hình 6.c.

Hình 7 cho thấy sự hội tụ của cận trên và cận dưới đối với trường hợp tấm chữ L tựa đơn giản. Hai cận này gần như dừng sau 6-7 lần lặp tối ưu hóa. Lời giải cho phân tích thích nghi và phân tích giới hạn trình bày trong bảng III đều được chuẩn hóa với m_p/L^2 . Những sự khác nhau nhỏ giữa cận dưới và cận trên tồn tại ở đây là do tấm hình chữ L xuất hiện ứng suất tập trung tại góc lõm.



Hình 7. Tấm hình chữ L tựa đơn giản: Sự hội tụ của lời giải cận trên và cận dưới

Bảng III. Tải trọng Giới hạn của tấm hình chữ L: cận trên/dưới ($p)L^2/m_p$)

Phương pháp	Tựa đơn giản		Ngàm	
	Giới hạn	Thích nghi	Giới hạn	Thích nghi
Le và cộng sự [25]	6.298/-	-/-	-/-	-/-
Hiện tại	6.191/6.044	4.284/4.284	15.85/15.63	15.85/15.63

6. KẾT LUẬN

Bài báo đã trình bày một thuật toán mới trong phân tích thích nghi và giới hạn tấm mỏng chịu uốn, bằng phương pháp đối ngẫu. Sử dụng phương pháp phần tử hữu hạn theo mô hình chuyển vị và tiêu chuẩn chảy dẻo von Mises, nghiên cứu cho thấy lời giải cận dưới thực sự là đối ngẫu của lời giải cận trên. Trong thuật toán này, phương pháp hàm phạt và phương pháp Lagrange được sử dụng đồng thời để khử các ràng buộc. Phương pháp Newton-Raphson được sử dụng để giải hệ điều kiện KKT. Các ví dụ cụ thể được nghiên cứu đã chứng tỏ sự hội tụ chính xác và tính đúng đắn của các nghiệm thu được từ thuật toán này.

Sự hội tụ của thuật toán đối ngẫu được chứng minh cả về lý thuyết và ví dụ minh họa. Các ví dụ cụ thể thể hiện khả năng tính toán cao: cả cận trên và cận dưới hội tụ nhanh chóng đến nghiệm chính xác với sai số nhỏ. Mặc dù không có bằng chứng nào đưa ra để đảm bảo rằng cận dưới tăng lên sau mỗi lần lặp, nhưng đó là một đặc điểm thú vị mà chúng ta thấy trong tất cả các ví dụ khảo sát. Đặc điểm này cho phép chúng ta chấm dứt quá trình tính toán trước đó và do đó giảm chi phí tính toán. Sai số nhỏ giữa cận dưới và cận trên cho thấy rằng thuật toán này thực sự đáng tin cậy.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Prager W., Hodge P. G. Jr. (1951). *Theory of perfectly plastic solids*. Wiley, New York.
- Hill R. (1952). On discontinuous plastic states, with special reference to localized necking in thin sheets. *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 1, pp. 19-30.
- Hodge P. G. Jr. (1959). *Plastic analysis of structures*, McGRAW-HILL book company, INC.
- Hodge P. G. Jr. (1961). The Mises yield condition for rotationally symmetric shells. *Quarterly of Applied Mathematics*, Vol XVIII, No. 4, 305-311
- Hodge P. G. Jr. (1963). *Limit analysis of Rotationally symmetric plates and shells*. Prentice Hall, Englewood, New Jersey.
- Massonnet C., Save M. (1976). *Calcul plastique des constructions*, Vol 1, 3ème édition, Nelissen.
- Chakrabarty J. (1988). *Theory of plasticity*. McGraw-Hill international editions.
- Chen, W. F., Han D. J. (1988). *Plasticity of structural engineers*. Springer-Verlag, New York Inc.
- Lubliner J. (1990). *Plasticity theory*. Macmillan publishing company.
- Biron A., Hodge P. G. (1967). Limit analysis of rotationally symmetric shells under central boss loadings by a numerical method. *Journal of Applied Mechanics*, Volume 34, pp. 644-650.
- Hodge PG, Belytschko T. Numerical methods for the limit analysis of plates. *Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics* 1968; **35**:796-801.
- Maier G. (1970). A matrix structural theory of piecewise-linear plasticity with interacting yield planes. *Meccanica* 7, pp. 51-66.
- Nguyen Dang Hung (1976). Direct limit analysis via rigid-plastic element computer methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 8, pp. 81-116.
- Casciaro R., Cascini L. (1982). A mixed formulation and mixed finite elements for limit analysis. *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, Vol. 18, pp. 211-243.

15. Morelle P. (1989). *Analyse duale de l'adaptation plastique des structures par la méthode des éléments finis et la programmation mathématique*. Thèse de Doctorat, Université de Liège, Belgique.

16. Overton M. L. (1984). *Numerical solution of a model problem from collapse load analysis*. In: J.L. Lions and R. Glowinski, eds., *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering VI* (edited by Glowinski R. and Lions J. L.), North-Holland, pp. 421-437.

17. Corradi L., Zavelani A. (1974). A linear programming approach to shakedown analysis of structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 3, pp. 37-53.

18. Belytschko (1972). Plane stress shakedown analysis by finite elements. *Int. J. Mech. Sci.*, Vol. 14, pp. 619-625.

19. Heitzer M, Staat M. FEM-computation of load carrying capacity of highly loaded passive components by direct methods. *Nuclear Engineering and Design* 1999; **193**(3):349-358.

20. Andersen KD, Christiansen E, Conn AR, Overton ML. An efficient primal-dual interior-point method for minimizing a sum of Euclidean norms. *SIAM Journal on Scientific Computing* 2000; **22**:243-262.

21. Vu DK, Yan AM, Nguyen DH. A dual form for discretized kinematic formulation in shakedown analysis. *International Journal of Solids and Structures* 2004; **41**:267-277.

22. Vu DK, Yan AM, Nguyen DH. A primal-dual algorithm for shakedown analysis of structure. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2004; **193**:4663-4674.

23. Tran TN, Liu GR, Nguyen-Xuan H, Nguyen-Thoi T. An edge-based smoothed finite element method for primal-dual shakedown analysis of structures. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2010; **82**:917-938.

24. Capsoni A, Corradi L. Limit analysis of plates-a finite element formulation. *Structural Engineering and Mechanics* 1999; **8**:325-341.

25. Le VC, Gilbert M, Askes H. Limit analysis of plates using the EFG method and second-order cone programming. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2009; **78**:1532-1552.

26. Cinquini C, Zanon P. Limit analysis of circular and annular plates. *Ingenieur-Archiv* 1985; **55**:157-175.

27. Tran TN, A dual algorithm for shakedown analysis of plate bending. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2011.