

Phân tích độ nhạy của các tham số đầu vào ngẫu nhiên đến tải trọng tới hạn của kết cấu khung phẳng

Sensitivity analysis of input random parameters on buckling load of plan frame

> TS ĐẶNG XUÂN HÙNG

Trường Đại học Xây dựng Hà Nội; Email: hungdx@huce.edu.vn

TÓM TẮT

Bài báo nghiên cứu đánh giá độ nhạy của các tham số đầu vào ngẫu nhiên của vật liệu, tải trọng và hình học lên giá trị tải trọng tới hạn của kết cấu khung phẳng. Phương pháp phân tử hữu hạn được sử dụng để phân tích ổn định của kết cấu khung phẳng. Mô hình ngẫu nhiên được xây dựng trên cơ sở kết hợp mô hình tất định phân tích ổn định của khung phẳng với phương pháp Monte Carlo. Độ nhạy của các tham số được đánh giá thông qua chỉ số độ nhạy bậc nhất và chỉ số độ nhạy tổng thể Sobol'.

Từ khóa: Ổn định; khung phẳng; Monte Carlo; chỉ số độ nhạy Sobol'.

ABSTRACT

This paper presents the sensitivity analysis of input random parameters on the buckling load of the plan frame. The finite element method is used to determine the buckling load of the frame. A random model is then established by combining the frame buckling analysis model and the Monte Carlo method. The sensitivity index of input parameters is evaluated via first order and total order Sobol' indices.

Keywords: Bukling; plan frame; Monte Carlo; Sobol' sensitivity indices.

1. GIỚI THIỆU

Xử lý ngẫu nhiên (uncertainty treatment) nói chung và ứng dụng trong đánh giá kết cấu công trình nói riêng luôn là vấn đề có tính khoa học và thực tiễn, thu hút sự quan tâm của nhiều nhà khoa học trong và ngoài nước. Mục đích là đánh giá độ tin cậy của kết cấu công trình khi các tham số đầu vào tiềm ẩn các yếu tố không chắc chắn. Với số lượng tham số đầu vào nhiều, mô hình ứng xử phức tạp, bài toán đánh giá độ tin cậy luôn luôn tiêu hao tài nguyên tính toán lớn. Một trong những giải pháp hiệu quả là đánh giá độ nhạy của các tham số đầu vào đến ứng xử của kết cấu, từ đó có thể bỏ qua các tham số có ảnh hưởng bé và giảm khối lượng tính toán của mô hình.

Ở Việt Nam, ngay từ những năm 1990, độ nhạy của các tham số thiết kế với phiếm hàm đáp ứng độ tin cậy đã được tác giả Nguyễn Văn Phó quan tâm nghiên cứu trong [1]. Năm 1997, tác giả Nguyễn Tiến Khiêm và Đào Như Mai nghiên cứu ứng dụng đánh giá độ nhạy cảm dạng riêng trong chẩn đoán kỹ thuật công trình [2]. Tác giả Lê Xuân Huỳnh lại quan tâm đến vấn đề ứng dụng việc đánh giá độ nhạy, độ tin cậy để giải quyết bài toán tối ưu hóa kết cấu [3]. Những năm gần đây, nhóm tác giả Đặng Xuân Hùng và cộng sự cũng đặt nhiều sự quan tâm vào bài toán phân tích độ nhạy của các tham số đầu vào ngẫu nhiên đến ứng xử của kết cấu, sử dụng chỉ số độ nhạy Sobol' [4], [5].

Trên thế giới, phương pháp phân tích độ nhạy hay ứng dụng trong phân tích kết cấu cũng được quan tâm nghiên cứu. Năm 1993, I.M. Sobol' đề xuất khái niệm chỉ số độ nhạy tổng thể trong đó xét đến độ nhạy riêng lẻ và độ nhạy tương tác giữa các biến đầu vào [6]. Chỉ số này sau đó được chính tác giả sử dụng kết hợp với phương pháp Monte Carlo trong nghiên cứu [7], [8]. Chỉ số độ nhạy tổng thể cũng được tác giả Bruno Sudret nghiên cứu, ứng dụng trong [9]. Gần đây, năm 2019, Kala cũng phân tích độ nhạy tổng thể của kết cấu cầu thép [10].

Bài báo này sử dụng chỉ số độ nhạy tổng thể để đánh giá độ nhạy của các tham số đầu vào ngẫu nhiên lên giá trị tải trọng tới hạn của kết cấu khung phẳng. Mục 2 giới thiệu về chỉ số độ nhạy tổng thể và phương pháp đánh giá độ nhạy tổng thể. Mục 3 giới thiệu mô hình phân tử hữu hạn phân tích ổn định của kết cấu khung phẳng. Mục 4 kiểm chứng độ tin cậy của kết quả so với các công bố trên các tạp chí uy tín. Mục 5 giới thiệu về mô hình ngẫu nhiên và các tham số đầu vào ngẫu nhiên và kết quả phân tích độ nhạy cho một bài toán khung phẳng cụ thể để minh họa cho phương pháp đánh giá độ nhạy. Cuối cùng là các kết luận và kiến nghị.

2. PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ ĐỘ NHẠY TỔNG THỂ

Chỉ số độ nhạy tổng thể được xây dựng dựa trên nguyên tắc đánh giá ảnh hưởng của sự biến thiên đầu vào lên phương sai (variance) của đại lượng đầu ra. Xét mô hình kết cấu $Y=f(\mathbf{X})$, trong đó $\mathbf{X}=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ là véc tơ các tham số đầu vào X_i là các biến ngẫu nhiên độc lập trên không gian $[0,1]^n$ và Y là đại lượng vô hướng đầu ra của mô hình. Nếu các biến không thuộc không gian $[0,1]^n$ thì cần thực hiện phép đổi biến. Hàm $f(\mathbf{X})$ có thể được phân tích thành chuỗi các hàm số trong không gian có kích thước tăng dần như sau [11]:

$$f(\mathbf{X}) = f_0 + \sum_i f_i(X_i) + \sum_{i < j} f_{ij}(X_i, X_j) + \dots + f_{1\dots n}(X_1, \dots, X_n) \quad (1)$$

trong đó f_0 là hằng số và các hàm $\int_0^1 f_{i_1 \dots i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s})$ phải thỏa mãn các điều kiện:

$$\int_0^1 f_{i_1 \dots i_s}(X_{i_1}, \dots, X_{i_s}) dX_{ik} = 0 \quad (2)$$

với $\forall k \in \{1, \dots, s\}$ và $\{i_1, \dots, i_s\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Do các biến ngẫu nhiên đầu vào là các biến ngẫu nhiên độc lập nên phương sai của đại lượng đầu ra được tính bởi:

$$Var[Y] = \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} + \dots + V_{1\dots n} \quad (3)$$

và:

$$V_i = Var[E[Y|X_i]] \quad (4)$$

$$V_{ij} = Var[E[Y|X_i, X_j]] - V_i - V_j$$

$$V_{1\dots n} = Var[Y] - \sum_{i=1}^n V_i - \sum_{1 \leq i < j \leq n} V_{ij} - \dots - \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{n-1} \leq n} V_{i_1 \dots i_{n-1}}$$

trong đó $Var[\circ]$, $E[\circ]$ lần lượt là toán tử xác định phương sai và kỳ vọng của biến ngẫu nhiên.

Chỉ số độ nhạy bậc nhất (first order Sobol' index) thể hiện ảnh hưởng riêng lẻ của từng biến đầu vào đến phương sai của đại lượng đầu ra và được định nghĩa bởi:

$$S_i = \frac{V_i}{Var[Y]} \quad (5)$$

Chỉ số độ nhạy bậc k (k^{th} order Sobol' index) thể hiện ảnh hưởng tương tác giữa các biến đầu vào X_1, X_2, \dots, X_k đến phương sai của đại lượng đầu ra và được định nghĩa bởi:

$$S_{1\dots k} = \frac{V_{1\dots k}}{Var[Y]} \quad (6)$$

Chỉ số độ nhạy tổng thể (total order Sobol' index) của một biến X_i thể hiện ảnh hưởng riêng lẻ và tương tác của biến đó với tất cả các biến còn lại và được định nghĩa bởi:

$$S_{T_i} = \sum_{k \neq i} S_k = S_i + S_{ij} + S_{ik} + S_{ikl} + \dots + S_{1\dots n} \quad (7)$$

trong đó ký hiệu $\neq i$ thể hiện tất cả các tổ hợp có chứa i .

Chỉ số độ nhạy trong các biểu thức (5), (6), (7) được đánh giá bằng phương pháp Monte Carlo [11]. Xét hai mẫu kích thước N các thể hiện của véc tơ \mathbf{X} : $\mathbf{X}_k^{(1)} = (X_{k1}^{(1)}, X_{k2}^{(1)}, \dots, X_{kn}^{(1)})$ và $\mathbf{X}_k^{(2)} = (X_{k1}^{(2)}, X_{k2}^{(2)}, \dots, X_{kn}^{(2)})$ với $k=1, \dots, N$. Khi đó chỉ số độ nhạy bậc nhất của biến X_i được đánh giá theo biểu thức:

$$\hat{S}_i = \frac{\hat{V}_i}{\hat{V}} = \frac{\hat{U}_i - \hat{f}_0^2}{\hat{V}} \quad (8)$$

trong đó ký hiệu $\hat{\circ}$ thể hiện giá trị gần đúng được đánh giá từ mẫu các thể hiện của biến ngẫu nhiên. Giá trị gần đúng được đánh giá bởi:

$$\hat{f}_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_{k1}^{(1)}, \dots, X_{kn}^{(1)}) \quad (9)$$

giá trị gần đúng của phương sai được đánh giá bởi:

$$\hat{V} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f^2(X_{k1}^{(1)}, \dots, X_{kn}^{(1)}) - \hat{f}_0^2 \quad (10)$$

và đại lượng \hat{U}_i được đánh giá gần đúng bởi:

$$\hat{U}_i = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_{k1}^{(1)}, \dots, X_{k(i-1)}^{(1)}, X_{ki}^{(1)}, X_{k(i+1)}^{(1)}, \dots, X_{kn}^{(1)}) \times f(X_{k1}^{(2)}, \dots, X_{k(i-1)}^{(2)}, X_{ki}^{(1)}, X_{k(i+1)}^{(2)}, \dots, X_{kn}^{(2)}) \quad (11)$$

Chỉ số độ nhạy bậc 2 được đánh giá theo biểu thức:

$$\hat{S}_{ij} = \frac{\hat{U}_{ij} - \hat{f}_0^2 - \hat{V}_i - \hat{V}_j}{\hat{V}} \quad (12)$$

với \hat{U}_{ij} được đánh giá bởi:

$$\hat{U}_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f(X_{k1}^{(1)}, \dots, X_{k(i-1)}^{(1)}, X_{ki}^{(1)}, X_{k(i+1)}^{(1)}, \dots, X_{k(j-1)}^{(1)}, X_{kj}^{(1)}, X_{k(j+1)}^{(1)}, \dots, X_{kn}^{(1)}) \times f(X_{k1}^{(2)}, \dots, X_{k(i-1)}^{(2)}, X_{ki}^{(1)}, X_{k(i+1)}^{(2)}, \dots, X_{k(j-1)}^{(2)}, X_{kj}^{(1)}, X_{k(j+1)}^{(2)}, \dots, X_{kn}^{(2)}) \quad (13)$$

Chỉ số độ nhạy tổng thể được đánh giá theo biểu thức:

$$\hat{S}_{T_i} = 1 - \frac{\hat{U}_i - \hat{f}_0^2}{\hat{V}} \quad (14)$$

với \hat{U}_i được đánh giá bởi:

$$\hat{U}_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(X_{k1}^{(1)}, \dots, X_{k(i-1)}^{(1)}, X_{ki}^{(1)}, X_{k(i+1)}^{(1)}, \dots, X_{kn}^{(1)}) \times f(X_{k1}^{(1)}, \dots, X_{k(i-1)}^{(1)}, X_{ki}^{(2)}, X_{k(i+1)}^{(1)}, \dots, X_{kn}^{(1)}) \quad (15)$$

3. MÔ HÌNH PHẦN TỬ HỮU HẠN PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH KHUNG PHẪNG

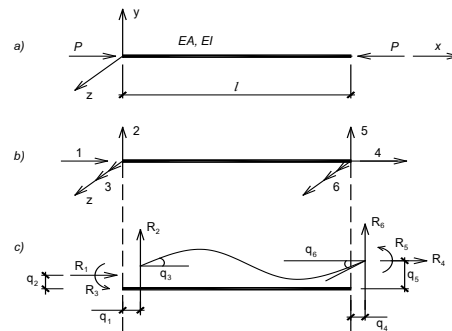
2.3. Ma trận độ cứng của phần tử khung phẳng trong hệ tọa độ địa phương

Xét phần tử khung phẳng có chiều dài L , độ cứng khi kéo (nén) và độ cứng khi uốn lần lượt là EA và EI . Thanh chịu nén uốn với thứ tự nút, các thành phần chuyển vị nút, lực nút có chiều dương quy ước như thể hiện trên Hình 1. Theo [12] thì ma trận độ cứng trong hệ tọa độ địa phương có dạng như biểu thức (17). Trong đó:

$$\phi_1 = \frac{v^3 \sin v}{12\phi_n}; \phi_2 = \frac{v^2(1 - \cos v)}{6\phi_n}; \phi_3 = \frac{v(\sin v - v \cos v)}{4\phi_n}; \phi_4 = \frac{v(v - \sin v)}{2\phi_n} \quad (16)$$

với $\phi_n = 2 - 2 \cos v - v \sin v$ và $v = L \sqrt{\frac{P}{EI}}$.

$$[k^e] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/L & 0 & 0 & -A/L & 0 & 0 \\ 0 & 12\phi_1/L^2 & \phi_2 & 0 & -12\phi_1/L^2 & -6\phi_2/L \\ 0 & 6\phi_2/L & 4\phi_3 & 0 & -6\phi_2/L & 2\phi_4 \\ -A/L & 0 & 0 & A/L & 0 & 0 \\ 0 & -12\phi_1/L^2 & -6\phi_2/L & 0 & 12\phi_1/L^2 & -6\phi_2/L \\ 0 & 6\phi_2/L & 2\phi_4 & 0 & -6\phi_2/L & 4\phi_3 \end{bmatrix} \quad (17)$$



Hình 1. Phần tử khung phẳng chịu nén uốn [12]

Trường hợp lực dọc trong các phần tử là nhỏ, các hàm số ϕ_i có thể khai triển theo chuỗi Taylor và dừng lại ở số hạng đầu tiên.

$$\phi_1 = 1 - \frac{v^2}{10}; \phi_2 = 1 - \frac{v^2}{60}; \phi_3 = 1 - \frac{v^2}{30}; \phi_4 = 1 + \frac{v^2}{60} \quad (18)$$

Khi đó ma trận độ cứng của phần tử khung phẳng chịu nén uốn bằng tổng của ma trận độ cứng đàn hồi $[k_d^e]$ và ma trận độ cứng hình học $[k_h^e]$.

$$[k^e] = [k_d^e] \mp [k_h^e] \quad (19)$$

trong đó dấu (-) ứng với trường hợp thanh chịu nén và ngược lại.

Các ma trận độ cứng đàn hồi và ma trận độ cứng hình học được xác định bởi.

$$[k_d^e] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} A/L & 0 & 0 & -A/L & 0 & 0 \\ 0 & 12/L^2 & 6/L & 0 & -12/L^2 & -6/L \\ 0 & 6/L & 4 & 0 & -6/L & 2 \\ -A/L & 0 & 0 & A/L & 0 & 0 \\ 0 & -12/L^2 & -6/L & 0 & 12/L^2 & -6/L \\ 0 & 6/L & 2 & 0 & -6/L & 4 \end{bmatrix} \quad (20)$$

và

$$[k_h^e] = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/5 & L/10 & 0 & -6/5 & -L/10 \\ 0 & L/10 & 2L^2/15 & 0 & -L/10 & -2L^2/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/5 & -L/10 & 0 & 6/5 & -L/10 \\ 0 & L/10 & -L^2/30 & 0 & -L/10 & 2L^2/15 \end{bmatrix} \quad (21)$$

2.3. Ma trận độ cứng của phần tử khung phẳng trong hệ tọa độ tổng quát

Ma trận độ cứng của các phần tử khi xét trong hệ trục tọa độ tổng quát sẽ cần phải thực hiện chuyển trục tọa độ. Ma trận chuyển hệ trục tọa độ địa phương lên hệ trục tọa độ tổng quát có dạng [13].

$$[T^e] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (22)$$

trong đó θ là góc giữa phần tử đang xét và phương ngang (x). Khi đó véc tơ chuyển vị nút trong hệ trục tọa độ tổng quát được xác định như sau.

$$[U^e] = [T^e][q^e] \quad (23)$$

Ma trận độ cứng phần tử trong hệ tọa độ tổng quát được xác định theo biểu thức:

$$[K^e] = [T^e]^T \{ [k_d^e] \mp [k_h^e] \} [T^e] \quad (24)$$

2.3. Ma trận vị trí định vị phần tử trong hệ

Mỗi phần tử có một vị trí trong hệ kết cấu nên cần có ma trận vị trí $[H^e]$ để định vị véc tơ chuyển vị $[q^e]$ trong véc tơ chuyển vị $[U]$, và định vị ma trận độ cứng phần tử $[k^e]$ trong ma trận độ cứng của toàn hệ $[K]$.

$$[q^e] = [H^e][U] \quad (25)$$

$$[K]^e = [H^e]^T [K^e] [H^e]$$

Khi đó ma trận độ cứng của toàn hệ sẽ được xác định bởi.

$$[K] = \sum_{i=1}^n [K]^i = \sum_{i=1}^n [H^i]^T [K^i] [H^i] \quad (26)$$

2.3. Điều kiện ổn định

Điều kiện ổn định của hệ được xác định thông qua nguyên lý Lejeune - Dirichlet theo tiêu chí năng lượng [12]. Hệ được coi là ở trạng thái cân bằng ổn định khi đồng thời thỏa mãn các điều kiện sau.

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Pi}{\delta U} &= 0 \\ \frac{\delta^2 \Pi}{\delta U^2} &> 0 \end{aligned} \quad (27)$$

trong đó Π và U lần lượt là phiếm hàm thế năng toàn phần và véc tơ chuyển vị nút của hệ. Khai triển các điều kiện (27) ta thu được:

$$\begin{aligned} [K][U] &= [R] \\ \det(K) &> 0 \end{aligned} \quad (28)$$

với R là véc tơ lực nút của hệ. Tải trọng tới hạn của kết cấu khung phẳng được xác định từ (28) bằng phương pháp phân tích P-delta.

4. KIỂM CHỨNG ĐỘ TIN CẬY CỦA CÁC CHƯƠNG TRÌNH TÍNH

2.3 Kiểm chứng độ tin cậy của chương trình đánh giá độ nhạy

Để kiểm chứng độ tin cậy của chương trình đánh giá độ nhạy, người ta thường kiểm chứng với ví dụ quen thuộc sử dụng hàm số Ishigami [11]:

$$Y(X) = \sin X_1 + 7 \sin^2 X_2 + \frac{1}{10} X_3^4 \sin X_1 \quad (29)$$

trong đó X_1, X_2, X_3 là các biến ngẫu nhiên có phân phối đều trong khoảng $[-\pi, \pi]$. Kết quả phân tích độ nhạy của chương trình được so sánh với kết quả đã công bố trong [11] sau 20.000 lần mô phỏng và được giới thiệu chi tiết trong Bảng 1.

Bảng 1. Bảng so sánh kết quả phân tích độ nhạy tổng thể của hàm Ishigami

X_i	Chương trình		Theo [11]		Độ sai lệch (%)	
	S_i	S_{Ti}	S_i	S_{Ti}	S_i	S_{Ti}
X_1	0,315	0,577	0,313	0,576	0,63%	0,17%
X_2	0,432	0,440	0,434	0,438	0,46%	0,45%
X_3	0,002	0,258	0,001	0,254	50,0%	1,55%

Có thể thấy rằng chương trình đánh giá độ nhạy cho kết quả phù hợp với kết quả kiểm chứng trong [11]. Sai số tương đối chỉ ở mức dưới 2%, duy nhất sai số tương đối của chỉ số độ nhạy bậc nhất của biến X_3 là ở mức 50%. Tuy nhiên khi quan sát Bảng 1 thì có thể thấy rằng giá trị tuyệt đối của chỉ số này là rất bé và gần như bằng 0 nên việc đánh giá sai số tương đối là không có ý nghĩa.

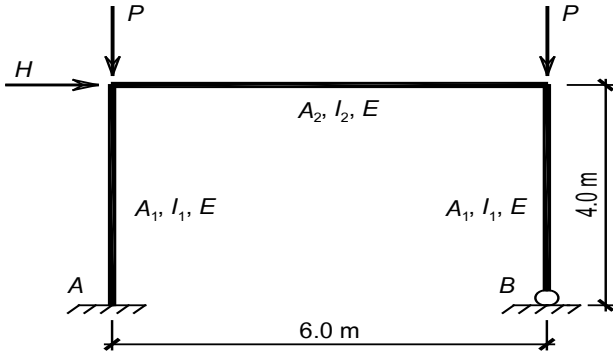
2.3 Kiểm chứng độ tin cậy của chương trình phân tích ổn định khung phẳng

Để kiểm chứng độ tin cậy của chương trình phân tích ổn định khung phẳng, bài báo tiến hành phân tích ví dụ trong [14] như thể hiện trên Hình 2, với các thông số kích thước, vật liệu và tải trọng

được giới thiệu trong Bảng 2. Bài toán kiểm chứng thực hiện với ba trường hợp.

- org : ma trận độ cứng phần tử tính theo công thức (17).
- appro : ma trận độ cứng phần tử tính theo công thức gần đúng (18).
- [14]-Calfem : kết quả công bố trong [14] với ma trận độ cứng phần tử tính theo công thức (17).

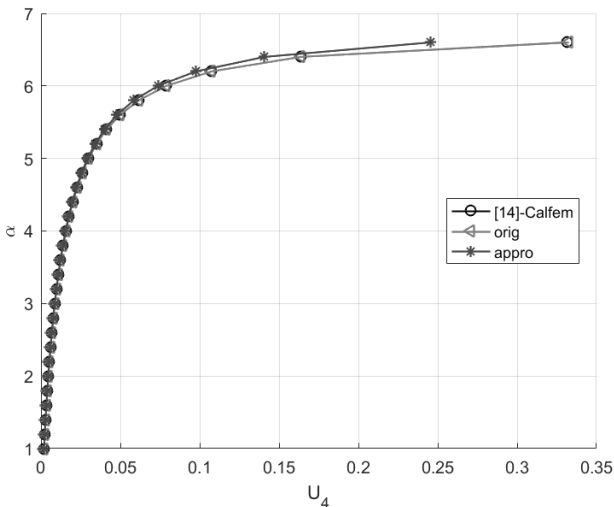
Kết quả phân tích ổn định khung phẳng theo phương pháp phân tích P-delta với cả ba trường hợp được thể hiện trên Hình 3.



Hình 2. Sơ đồ kết cấu khung phẳng [14]

Bảng 2. Thông số hình học, vật liệu và tải trọng của phụng phẳng

TT	Tham số	Ký hiệu	Giá trị
1	Mô đun đàn hồi	E	200 GPa
2	Diện tích tiết diện cột	A_1	$2,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
3	Mômen quán tính cột	I_1	$1,6 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
4	Diện tích tiết diện dầm	A_2	$6,0 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
5	Mômen quán tính dầm	I_2	$5,4 \cdot 10^{-5} \text{ m}^4$
6	Lực ngang	H_0	1,0 kN
7	Lực thẳng đứng	P_0	150,0 kN



Hình 3. Chuyển vị ngang của nút bên trái theo sự tăng dần của tỷ số $\alpha = P / P_0$

Hình 3 cho thấy kết quả phân tích của chương trình tính trong bài báo và kết quả trong [14] là hoàn toàn trùng khớp khi ma trận độ cứng phần tử được tính theo công thức gốc (17) và có sai số không đáng kể khi tính theo công thức gần đúng (18). Kết quả này cho phép tác giả sử dụng chương trình tính gần đúng để giảm tài nguyên và thời gian tính toán.

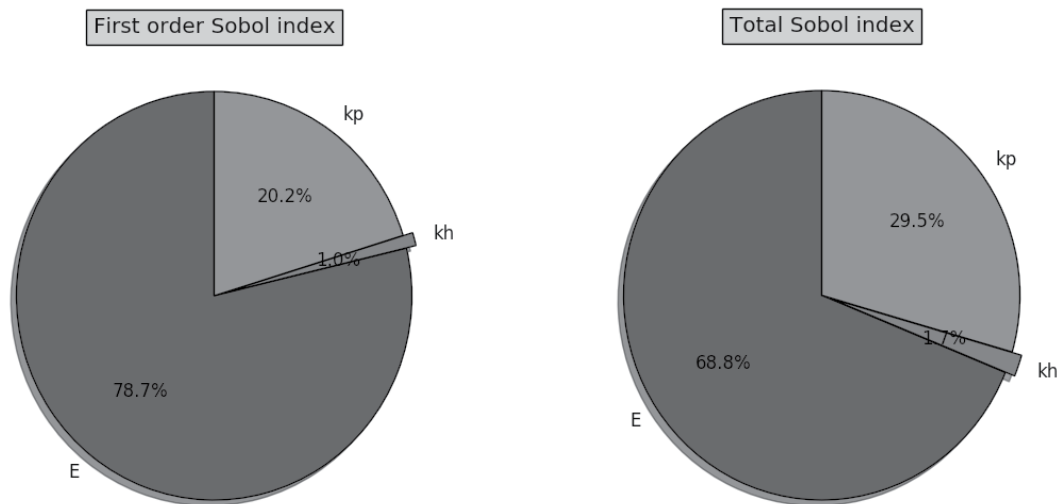
5. ĐỘ NHAY CỦA CÁC THAM SỐ ĐẦU VÀO ĐẾN ỔN ĐỊNH CỦA KẾT CẤU KHUNG PHẪNG

Để minh họa cho phương pháp đánh giá độ nhạy của kết cấu đã nghiên cứu ở trên, bài báo tiến hành đánh giá độ nhạy của các tham số đầu vào ngẫu nhiên đến ổn định của kết cấu khung phẳng như thể hiện trên Hình 2. Chúng ta biết rằng diện tích tiết diện và mô men quán tính có liên hệ với nhau; độ cứng tương đối giữa các phần tử ảnh hưởng đến sự phân bố nội lực; tỷ lệ giữa lực dọc/lực ngang và mô đun đàn hồi là những tham số ảnh hưởng chính đến ổn định của khung. Vì vậy, bài báo giả thiết các phần tử đều có tiết diện hình chữ nhật với chiều rộng giống nhau. Hai cột có cùng tiết diện $b_c \times h_c$ và khác với tiết diện dầm $b_d \times h_d$. Các tham số tất định và ngẫu nhiên được giả thiết như thể hiện trong Bảng 3. Kết quả phân tích độ nhạy sau 10000 lần mô phỏng được giới thiệu trong Bảng 4 và được thể hiện dưới dạng đồ thị trên Hình 4.

Bảng 3. Tham số đầu vào tất định và ngẫu nhiên của bài toán phân tích độ nhạy

STT	Tham số	Ký hiệu	Luật phân bố	Giá trị tất định	Tham số ngẫu nhiên
1	Mô đun đàn hồi	$E (MPa)$	Chuẩn	-	$N(200, 20)$
2	Diện tích tiết diện cột	$A_1 (m^2)$	Tất định	$2,0 \cdot 10^{-3}$	-
3	Mômen quán tính cột	$I_1 (m^4)$	Tất định	$1,6 \cdot 10^{-5}$	-
4	Tỷ lệ h_d / h_c	k_h	Đều	-	$U[1.8, 2.2]$
5	Tỷ lệ lực dọc/lực ngang	k_p	Đều	-	$U[135, 165]$

Quan sát Hình 4 có thể thấy rằng ảnh hưởng riêng của mô đun đàn hồi E lên giá trị lực tới hạn của kết cấu là lớn nhất (78.7%), tiếp đến là tỷ lệ lực dọc/lực ngang k_p (20.2%) và cuối cùng là tỷ lệ chiều cao tiết diện k_h (1%). Kết quả này tương đối phù hợp với logic định tính bởi các phần tử trong kết cấu khung phẳng luôn luôn chịu nén uốn cho đến khi khung mất ổn định. Do đó mô đun đàn hồi của vật liệu sẽ có vai trò rất quan trọng. Tỷ lệ lực dọc/lực ngang ảnh hưởng trực tiếp đến độ lệch tâm của các cấu kiện nên sẽ có ảnh hưởng lớn đến ổn định của khung. Tỷ lệ chiều cao tiết diện chỉ ảnh hưởng đến sự phân phối nội lực giữa các phần tử và mức độ biến động cũng tương đối nhỏ (theo giả thiết là $\pm 10\%$ quanh giá trị trung bình) nên mức độ ảnh hưởng sẽ không lớn.



Hình 4. Độ nhạy tính theo tỷ lệ phần trăm của các tham số đầu vào ngẫu nhiên lên giá trị tải trọng tới hạn của khung phẳng sau 10000 lần mô phỏng

Bảng 4. Chỉ số độ nhạy bậc nhất và chỉ số độ nhạy tổng thể của các tham số đầu vào ngẫu nhiên lên giá trị lực tới hạn của khung phẳng sau 10000 lần mô phỏng

STT	X_i	Chỉ số độ nhạy bậc nhất (S_i)	Chỉ số độ nhạy tổng cộng (S_{Ti})
1	E	0.82085	0.69068
2	k_h	0.01077	0.01704
3	k_p	0.21083	0.29559

Ngoài ra có thể nhận thấy sự thay đổi đáng kể giá trị của độ nhạy khi xét đến yếu tố tương tác giữa các tham số. Kết quả này thể hiện qua đồ thị của chỉ số độ nhạy tổng thể. Mô đun đàn hồi có ảnh hưởng riêng lẻ là 78.7% nhưng khi tương tác với các biến khác thì mức độ ảnh hưởng chỉ còn 68.8% (giảm 10.1%). Ngược lại khi xét đến sự ảnh hưởng tương tác thì độ nhạy của tỷ lệ lực dọc/lực ngang lại tăng từ 20.2% lên 29.5% (tăng 9.3%). Tương tự như vậy thì độ nhạy của tỷ lệ chiều cao tiết diện cũng tăng nhẹ từ 1.0% lên 1.7%. Kết quả này cho thấy tính ưu việt của việc sử dụng chỉ số độ nhạy Sobol'. Chỉ số này không chỉ đánh giá được ảnh hưởng riêng lẻ mà còn đánh giá được ảnh hưởng tương tác giữa các tham số. Điều đó cho chúng ta cái nhìn tổng quát hơn về ảnh hưởng của các tham số đến ứng xử của kết cấu.

6. KẾT LUẬN

Bài báo nghiên cứu phương pháp đánh giá độ nhạy của các tham số đầu vào ngẫu nhiên lên giá trị tải trọng tới hạn của kết cấu khung phẳng. Tác giả đã thành công xây dựng chương trình phân tích ổn định kết cấu khung phẳng bằng phương pháp PTHH; từ đó xây dựng chương trình đánh giá độ nhạy của các tham số đầu vào ngẫu nhiên lên giá trị tải trọng tới hạn của kết cấu khung phẳng, sử dụng chỉ số độ nhạy Sobol' và phương pháp mô phỏng Monte Carlo. Các chương trình tính đều được kiểm chứng với các công bố uy tín để chứng minh độ tin cậy của kết quả thu được. Tác giả sau đó tiến hành khảo sát một bài toán cụ thể để minh họa cho phương pháp đã nghiên cứu và rút ra các bình luận, phân tích hữu ích.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nguyễn Văn Phó (1994). Bài toán xác định độ nhạy của các tham số thiết kế với phiếm hàm đáp ứng độ tin cậy. *Tạp chí Cơ học*, XVI No - 04, 16-24.

[2] Nguyễn Tiến Khiêm, Đào Như Mai (1997). Độ nhạy cảm của dạng riêng - tính toán và ứng dụng trong chẩn đoán kỹ thuật công trình. *Tuyển tập công trình khoa học Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ 6*, T3.

[3] Lê Xuân Huỳnh (2005). *Tối ưu hóa trong tính toán kết cấu*. Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật, Hà Nội.

[4] Đặng Xuân Hùng, Nguyễn Trọng Hà (2015). Phân tích độ nhạy tổng thể của các tham số kết cấu lên giá trị lực tới hạn theo điều kiện ổn định của Cupon sườn chịu tải trọng gió. *Tuyển tập Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn biến dạng lần thứ XII*, Đà Nẵng, 622-629.

[5] Đặng Xuân Hùng, Nguyễn Trọng Hà (2017). Đánh giá ảnh hưởng của các tham số đầu vào ngẫu nhiên đến ổn định của cột thép tiết diện thay đổi. *Tuyển tập Hội nghị Cơ học toàn quốc lần thứ X, Hà Nội*, T3(1), 512-518.

[6] Sobol', I.M. (1993). Sensitivity analysis for non-linear mathematical models. *Mathematical Modeling & Computational Experiment (Engl. Transl)*, 01, 407-414.

[7] Sobol', I.M. (2001). Global sensitivity indices for nonlinear mathematical models and their Monte Carlo estimates. *Mathematics and Computers in Simulation*, 55, 271-280.

[8] Sobol', I.M., Kucherenko, S.S (2005). On global sensitivity analysis of quasi Monte Carlo algorithms. *Monte Carlo Method and appl*, Vol. 11, No 1, 1-9.

[9] Sudret, B. (2007). Global sensitivity analysis using polynomial chaos expansion. *Reliab Eng Syst Safety*, doi :10.1016/j.res.2007.04.002.

[10] Kala, Z. (2019). Global sensitivity analysis of reliability of structural bridge system. *Engineering Structures*, 194, 36-45.

[11] Morio, J. (2011). Global and local sensitivity analysis methods for a physical system. *Eur. J. Phys.*, 32, 1577-1583.

[12] Leu, T. T. (2007). *Ổn định công trình*. Nhà xuất bản Khoa học kỹ thuật, Hà Nội.

[13] Moaveni, S. (2008). *Finite element analysis: theory and application with ANSYS*, Pearson Education.

[14] Austrell, P., E. & al. (2004), *CALFEM - A finite element toolbox Version 3.4*, Lund University, Sweden.