

# Phân tích uốn tĩnh của tấm có lỗ rỗng

## Static bending analysis of porous plates

> TS VŨ VĂN HOÀNG, TS NGUYỄN CHÍ THỌ

Học viện Kỹ thuật quân sự

### TÓM TẮT

Bài báo lần đầu tiên sử dụng phương pháp giải tích kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc ba để nghiên cứu bài toán uốn tĩnh của tấm làm bằng vật liệu có lỗ rỗng. Tấm gồm ba lớp vật liệu, trong đó hai lớp ngoài cùng được làm bằng vật liệu xốp (có lỗ rỗng vi mô). Lời giải được xác định dựa trên cách tiếp cận giải tích của Navier, lý thuyết tính toán được kiểm chứng thông qua so sánh với các công trình đã công bố. Bài báo cũng khảo sát một số yếu tố vật liệu, tỷ lệ thể tích lỗ rỗng, và chiều dày tấm đến đáp ứng uốn tĩnh của tấm, các kết quả nghiên cứu là tài liệu tham khảo có giá trị đối với các nhà thiết kế, chế tạo kết cấu làm bằng nhiều lớp vật liệu trong thực tế.

**Từ khóa:** Tấm có lỗ rỗng; uốn tĩnh; lời giải Navier.

### ABSTRACT

This is the first paper to integrate the analytical method with the theory of the third-order shear strain to investigate the problem of static bending of porous-material plates. The plate consists of three material layers, the exterior two of which are composed of microporous material. The solution is determined using Navier's analytic method, and the calculation theory is validated by comparing it to published works. In addition, the article investigates the effect of certain material parameters, such as porous volume ratio and plate thickness, on the static deformation response of a plate. In practice, the research outcomes are valuable references for designers and fabricators of multilayer material structures.

**Keywords:** Porous plate, static bending, Navier solution.

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Cùng với sự phát triển của khoa học kỹ thuật, các vật liệu mới đã và đang được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, như vật liệu composite ba pha, vật liệu từ tính, vật liệu áp điện, vật liệu biến đổi chức năng, ... Và để tận dụng ưu điểm của các vật liệu thành phần, cũng như đảm bảo một số yêu cầu kỹ thuật đặc biệt, các nhà khoa học đã chế tạo ra các loại vật liệu nhiều lớp, trong đó mỗi lớp vật liệu có thể có những đặc trưng cơ tính thay đổi. Một trong những loại kết cấu như vậy chính là tấm có nhiều lớp, trong đó có những lớp được chế tạo để tạo thành các lỗ rỗng vi mô (coi như vật liệu

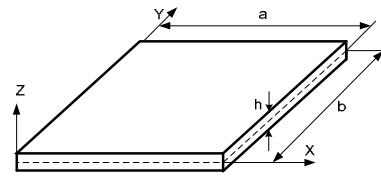
xốp), điều này cho phép tấm có khả năng cách nhiệt, cách âm, hoặc có khả năng làm việc trong môi trường đặc biệt tùy vào vật liệu tạo ra, ... Cũng chính vì tầm quan trọng của nó mà việc nghiên cứu ứng xử cơ học của các kết cấu làm bằng vật liệu có lỗ rỗng cần phải được quan tâm nghiên cứu đầy đủ.

Để nghiên cứu tính toán các kết cấu, người ta có thể sử dụng nhiều cách tiếp cận khác nhau như phương pháp giải tích, phương pháp số [1-6], tuy nhiên phương pháp giải tích là một phương pháp có độ chính xác cao, được nhiều nhà khoa học trong nước và quốc tế đánh giá cao.

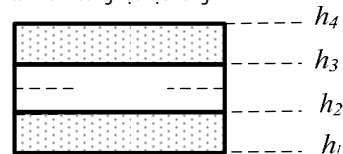
Do vậy bài báo này sử dụng phương pháp giải tích để đưa ra lời giải chính xác đối với bài toán uốn tĩnh của tấm có lỗ rỗng vi mô, các kết quả nghiên cứu này có ý nghĩa định hướng cho việc thiết kế, chế tạo và sử dụng các kết cấu làm bằng vật liệu rỗng và có nhiều lớp một cách có hiệu quả nhất.

### 2. MÔ HÌNH TÍNH TOÁN VÀ LỜI GIẢI

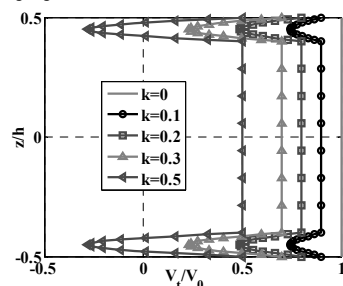
Xét tấm có chiều dài các cạnh lần lượt là  $a$  và  $b$ , chiều dày tấm  $h$  được mô tả như trên hình 1 và hình 2.



Hình 1. Mô hình tấm làm bằng vật liệu rỗng



Hình 2. Mặt cắt ngang của tấm



Hình 3. Sự phân bố tỷ lệ thể tích ứng với trường hợp tỷ lệ chiều dày các cạnh tấm là 1-8-1

Giả sử tấm được chế tạo bởi ba lớp vật liệu, tổng chiều dày tấm là  $h$ , lớp giữa là vật liệu đồng chất, hai lớp ngoài cùng là vật liệu xốp với tỷ lệ thể tích được biểu diễn theo công thức:

$$V_i^{(i)} = V_0^{(i)} \left( 1 - k + \frac{\pi k}{2} \cos\left(\frac{\pi z}{h_i}\right) \right); \quad i=1,3 \quad (1)$$

trong đó  $k$  là tham số đặc trưng cho sự phân bố vật liệu.

Trên hình 3 thể hiện sự phân bố tỷ lệ thể tích vật liệu ứng với trường hợp tỷ lệ chiều dày ba lớp lần lượt là 1-8-1.

Trường chuyển vị của tấm gồm ba thành phần chuyển vị theo ba trục tọa độ được tính theo hàm biến đổi bậc ba của biến chiều dày như sau:

$$\begin{cases} u(x, y, z) = -z\partial w_b / \partial x - \Theta_z \partial w_s / \partial x \\ v(x, y, z) = -z\partial w_b / \partial y - \Theta_z \partial w_s / \partial y \\ w(x, y, z) = w_b(x, y) + w_s(x, y) \end{cases} \quad (2)$$

trong đó hàm  $\Theta_z = -\frac{z}{4} + \frac{5}{3} \frac{z^3}{h^2}$ . Thành phần chuyển vị theo trục

$z$  ( $w$ ) gồm cả thành phần chuyển vị uốn  $w_b$  và thành phần chuyển vị cắt  $w_s$ , hàm  $\Theta_z$  là hàm bậc ba của biến chiều dày  $z$ .

Các thành phần biến dạng của tấm được tính từ các đạo hàm riêng như sau:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\varepsilon} = z\boldsymbol{\varepsilon}_z + \Theta_z \boldsymbol{\varepsilon}_f \\ \boldsymbol{\gamma}_s = \boldsymbol{\lambda}_z \boldsymbol{\gamma}_{s0} \end{cases} \quad (3)$$

trong đó:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_z &= \{\varepsilon_{zx}, \varepsilon_{zy}, \varepsilon_{zxy}\}^T \\ \boldsymbol{\varepsilon}_f &= \{\varepsilon_{fx}, \varepsilon_{fy}, \varepsilon_{fxy}\}^T \\ \boldsymbol{\gamma}_{s0} &= \{\gamma_{sxz}, \gamma_{syz}\}^T \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{zx} = -\partial^2 w_b / \partial x^2 \\ \varepsilon_{zy} &= -\partial^2 w_b / \partial y^2 \\ \varepsilon_{zxy} &= -2\partial^2 w_b / \partial x \partial y \\ \varepsilon_{fx} &= -\frac{\partial^2 w_s}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{fy} &= -\partial^2 w_s / \partial y^2; \\ \varepsilon_{fxy} &= -2\partial^2 w_s / \partial x \partial y \\ \gamma_{sxz} &= \partial w_s / \partial x; \\ \gamma_{syz} &= \partial w_s / \partial y \\ \boldsymbol{\lambda}_z &= 1 - d\Theta_z / dz \end{aligned} \quad (4)$$

Đối với lớp thứ  $i$ , quan hệ giữa ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Hooke như sau:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^i = \mathbf{G}_b^i \boldsymbol{\varepsilon}^i \\ \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}^i = \mathbf{G}_s^i \boldsymbol{\gamma}_s^i \end{cases} \quad (5)$$

trong đó các ma trận:

$$\begin{cases} \mathbf{G}_b^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu_i & 0 \\ \nu_i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu_i}{2} \end{bmatrix} \\ \mathbf{G}_s^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{cases} \quad (6)$$

Tích phân theo chiều dày tấm, ta thu được các thành phần nội lực của tấm bao gồm các thành phần mô men và lực cắt có dạng sau:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{G}_b^i \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^i z dz = \mathbf{A}_z \boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{B}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f \\ \begin{bmatrix} S_x \\ S_y \\ S_{xy} \end{bmatrix} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{G}_b^i \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}^i f_z dz = \mathbf{B}_f \boldsymbol{\varepsilon}_z + \mathbf{D}_f \boldsymbol{\varepsilon}_f \\ \begin{bmatrix} Q_{xz} \\ Q_{yz} \end{bmatrix} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{G}_s^i \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix}^i dz = \mathbf{A}_s \boldsymbol{\gamma}_{s0} \end{cases} \quad (7)$$

trong đó các ma trận hệ số xác định như sau:

$$\begin{cases} \{\mathbf{A}_z, \mathbf{B}_f, \mathbf{D}_f\} = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{G}_b^i \{z^2, z\Theta_z, \Theta_z\} dz \\ \mathbf{A}_s = \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \mathbf{G}_s^i \boldsymbol{\lambda}_z^2 dz \end{cases} \quad (8)$$

Để thiết lập phương trình cân bằng cho tấm, bài báo sử dụng nguyên lý công khả dĩ như sau:

$$\delta \Pi_{nl} - \delta \Pi_{ng} = 0 \quad (9)$$

trong đó  $\delta \Pi_{nl}, \delta \Pi_{ng}$  là công khả dĩ của nội lực và ngoại lực tác dụng lên tấm.

Biểu thức công khả dĩ của nội lực được xác định như sau:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{nl} &= \int_{\Omega} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left( (\sigma_x)^i \delta(\varepsilon_x)^i + (\sigma_y)^i \delta(\varepsilon_y)^i \right. \\ &\quad \left. + (\tau_{xy})^i \delta(\gamma_{xy})^i + (\tau_{xz})^i \delta(\gamma_{xz})^i \right. \\ &\quad \left. + (\tau_{yz})^i \delta(\gamma_{yz})^i \right) dz d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sum_i \int_{h_i}^{h_{i+1}} \left( -M_x \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x^2} - S_x \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x^2} - M_y \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial y^2} \right. \\ &\quad \left. - S_y \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial y^2} - 2M_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_b}{\partial x \partial y} \right. \\ &\quad \left. - 2S_{xy} \frac{\partial^2 \delta w_s}{\partial x \partial y} + Q_{xz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial x} + Q_{yz} \frac{\partial \delta w_s}{\partial y} \right) dz d\Omega \end{aligned} \quad (10)$$

Giả sử tấm chịu tác dụng của lực phân bố đều trên bề mặt của tấm, biểu thức công khả dĩ của ngoại lực được xác định như sau:

$$\delta \Pi_{nl} = \int_{\Omega} q \delta w dA = \int_{\Omega} q \delta (w_b + w_s) d\Omega \quad (11)$$

trong đó  $q$  là tải trọng phân bố đều tác dụng lên tấm. Thay các biểu thức (10) và (11) vào phương trình (9), ta rút ra được hai phương trình cân bằng theo hai biến  $w_b$  và  $w_s$  như sau:

$$\delta w_b : \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (12)$$

$$\delta w_s : \frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 S_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2} + \frac{\partial F_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial F_{yz}}{\partial y} + q = 0$$

Để giải phương trình cân bằng (12), ta sử dụng lời giải của Navier, xét tấm chịu liên kết tựa đơn trên tất cả các cạnh, nghiệm cần tìm của (12) sẽ được khai triển dưới dạng chuỗi lượng giác kép như sau:

$$\begin{cases} w_b(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} D_{bmn} \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right) \\ w_s(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} D_{smn} \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{s\pi y}{b}\right) \end{cases} \quad (13)$$

trong đó  $D_{bmn}$  và  $D_{smn}$  là biên độ của các chuyển vị. Còn biểu thức của ngoại lực tác dụng lên tấm cũng được khai triển ở dạng chuỗi lượng giác:

$$q(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{16Q_0}{\pi^2 rs} \sin\left(\frac{r\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{r\pi y}{b}\right) \quad (14)$$

trong đó  $Q_0$  là biên độ ngoại lực.

Thay các biểu thức (13) và (14) vào phương trình (12), ta rút ra được phương trình sau:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} D_{bmn} \\ D_{smn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_b \\ Q_s \end{Bmatrix} \quad (15)$$

trong đó các hệ số trong phương trình (16) được xác định như sau:

$$\begin{aligned} K_{11} &= m^4 A_{z11} + 2A_{z12}m^2n^2 + A_{z12}n^4 + 4A_{z33}m^2n^2 \\ K_{12} &= n^4 B_{f11} + 2B_{f12}m^2n^2 + B_{f12}m^4 + 4B_{f33}m^2n^2 \\ K_{21} &= m^4 B_{f11} + 2B_{f12}m^2n^2 + B_{f12}n^4 + 4B_{f33}m^2n^2 \\ K_{22} &= n^4 D_{f11} + 2D_{f12}m^2n^2 + D_{f12}m^4 + 4D_{f33}m^2n^2 + A_{s11}m^2 + A_{s22}n^2 \end{aligned} \quad (16)$$

$$Q_b = Q_s = \frac{16Q_0}{\pi^2 rs}$$

trong đó  $m = \pi / a$ ;  $n = \pi / b$

Như vậy các hệ số  $K_{ij}$  ở vế trái của phương trình (15) phụ thuộc vào các đặc trưng hình học và vật liệu của tấm, còn vế phải phụ thuộc vào ngoại lực tác dụng lên tấm. Giải phương trình (15), ta sẽ thu được các ẩn  $D_{bmn}$  và  $D_{smn}$ , từ đó sẽ xác định được biểu thức chuyển vị  $w$  tại bất kỳ điểm nào trên tấm.

### 3. KẾT QUẢ TÍNH TOÁN VÀ THẢO LUẬN

#### 3.1 Kiểm chứng độ tin cậy

Xét tấm vuông với thông số chiều dài cạnh là  $a$ , chiều dày  $h = a/10$ , mô đun đàn hồi  $E = 380$  GPa, hệ số Poisson  $\nu = 0.3$ . Tấm chịu tải trọng phân bố đều với cường độ  $P$ , chuyển vị lớn nhất không thứ nguyên được tính toán và so sánh  $w^* = 10w_{max}h^3E/Pa^4$ . Kết quả tính toán theo lý thuyết của bài báo là  $w^* = 0.46$ , kết quả tính theo tài liệu [6] là  $w^* = 0.46$ , điều này thể hiện sự tin cậy của lý thuyết tính toán của bài báo này.

#### 3.2 Khảo sát ảnh hưởng của một số tham số

Xét tấm có các thông số như sau: tấm vuông cạnh  $a = b$ , chiều dày  $h$ , các đặc trưng cơ tính vật liệu được lấy như sau:  $E_m = 70$  GPa,  $\nu_m = 0.3$ , tấm chịu tải trọng tác dụng phân bố đều với cường độ  $P$ , thông số để khảo sát là chuyển vị không thứ nguyên lớn nhất của tấm có biểu thức tính toán  $w^* = 100w_{max}h_0^3Em/Pa^4$ , với  $h_0 = a/10$ . Tấm chịu liên kết tựa đơn trên các cạnh.

- Khảo sát ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dày các lớp vật liệu: thay đổi chiều dày các lớp vật liệu, kết quả tính toán chuyển vị lớn nhất tại giữa tấm được thể hiện như trên bảng 1. Có thể thấy rằng khi thay đổi chiều dày các lớp vật liệu, chuyển vị lớn nhất của tấm cũng thay đổi theo. Đồng thời, khi tăng dần giá trị của tỷ lệ thể tích  $V_0$ , chuyển vị lớn nhất của tấm tăng lên, điều này chứng tỏ tấm sẽ bị "mềm" hơn khi tỷ lệ thể tích  $V_0$  tăng lên.

**Bảng 1.** Chuyển vị lớn nhất của tấm phụ thuộc tỷ lệ chiều dày các lớp vật liệu,  $\kappa = 0.1$

$V_0$	2-1-2	1-1-1	1-2-1	1-8-1
0	4.636	4.620	4.586	4.468
0.1	5.219	5.215	5.065	4.959
0.2	5.932	5.947	5.632	5.546
0.3	6.829	6.874	6.314	6.263
0.4	7.997	8.092	7.155	7.160
0.5	9.589	9.771	8.219	8.319

- Khảo sát ảnh hưởng của tham số  $\kappa$ : Bảng 2 trình bày kết quả tính toán chuyển vị lớn nhất của tấm phụ thuộc tham số  $\kappa$ . Kết

quả tính toán cho thấy khi tỷ lệ thể tích  $V_0=0$  thì chuyển vị lớn nhất của tấm là như nhau với mọi giá trị của tham số  $\kappa$ . Khi tăng dần giá trị của tham số  $\kappa$  thì chuyển vị lớn nhất có xu hướng giảm xuống.

**Bảng 2.** Chuyển vị lớn nhất của tấm phụ thuộc vào giá trị của tham số  $\kappa$  (tỷ lệ ba lớp vật liệu là 1-1-1)

$V_0$	$\kappa = 0$	$\kappa = 0.1$	$\kappa = 0.2$	$\kappa = 0.3$
0	4.620	4.620	4.620	4.620
0.1	5.221	5.215	5.209	5.203
0.2	5.947	5.947	5.932	5.916
0.3	6.874	6.874	6.844	6.813
0.4	8.092	8.092	8.038	7.983
0.5	9.771	9.771	9.676	9.581

- Khảo sát ảnh hưởng của chiều dày tấm  $h$ : thay đổi chiều dày tấm  $h$  sao cho tỷ lệ  $a/h$  tăng dần từ 10 đến 40, kết quả tính toán chuyển vị lớn nhất của tấm được thể hiện như trên bảng 3. Dễ dàng nhận thấy rằng khi giảm chiều dày tấm, tấm trở lên "mềm" hơn, do vậy chuyển vị lớn nhất của tấm tăng lên.

**Bảng 3.** Chuyển vị lớn nhất của tấm phụ thuộc vào tỷ lệ chiều dài và chiều dày tấm  $a/h$  (tỷ lệ ba lớp vật liệu là 1-1-1,  $\kappa = 0.1$ )

$V_0$	$a/h = 10$	$a/h = 20$	$a/h = 30$	$a/h = 40$
0	4.620	35.743	119.874	283.516
0.1	5.215	40.405	135.544	320.606
0.2	5.947	46.136	154.808	366.204
0.3	6.874	53.391	179.193	423.923
0.4	8.092	62.922	211.230	499.754
0.5	9.771	76.076	255.447	604.415

### 4. KẾT LUẬN

Bài báo lần đầu tiên sử dụng phương pháp giải tích dựa trên lời giải dạng Navier để nghiên cứu đáp ứng uốn tĩnh của tấm làm bằng nhiều lớp vật liệu và có lỗ rỗng vi mô. Các công thức tính toán được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc ba, lý thuyết này mô tả đầy đủ và chính xác các đáp ứng của tấm. Lý thuyết tính toán đã được kiểm chứng đảm bảo độ tin cậy cần thiết. Bài báo cũng tiến hành khảo sát ảnh hưởng của một số tham số đến đáp ứng uốn tĩnh của tấm. Các kết quả nghiên cứu trong bài báo này là cơ sở khoa học có giá trị tham khảo khi thiết kế và sử dụng kết cấu tấm nhiều lớp có lỗ rỗng trong kỹ thuật và đời sống.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Viet, D. N.; Binh, V. P. Static bending, free vibration, and buckling analyses of two-layer FGM plates with shear connectors resting on elastic foundations. Alexandria Engineering Journal, 2023, 62, 369-390.
- [2] Nam, H. V.; Duc, H. D.; Khoa, M. N.; Thom, D. V.; Hong, T. T. Phase-field buckling analysis of cracked stiffened functionally graded plates. Composite Structures, 2019, 217, 50-59.
- [3] Aman, G.; Chalak, H. D.; Anupam, C. Bending analysis of functionally graded sandwich plates using Hozt including transverse displacement effects. Mechanics Based Design of Structures and Machines. 2022, 50 (10), 3563-3577.
- [4] Ouinas, D.; Fekirini, H.; Olay, J. A.; Achour, B.; Boukendakdji, M. New hybrid HSDT for bending, free vibration, and buckling analysis of FGM plates (2D & quasi-3D). Smart Structures and Systems, 2022, 29 (3), 395-420.
- [5] Imam, J. M.; Sundararajan, N.; Irwan, K. Application of discrete shear quadrilateral element for static bending, free vibration and buckling analysis of functionally graded material plate. Composite Structures, 2022, 284, 51-87.
- [6] Zenkour, A. M. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. Applied Mathematical Modelling, 2009, 30 (1), 67-84.