

Nghiên cứu ổn định đàn hồi của thanh có xét đến độ cứng thực tế của các liên kết bằng phương pháp chuyển vị cưỡng bức

Study on elastic stability of bars considering actual stiffness of connections by forced displacement method

> PGS.TS ĐOÀN VĂN DUẤN

Khoa Công trình, Trường Đại học Hàng hải Việt Nam; Email: duandv.ct@vimar.edu.vn

TÓM TẮT

Thông thường khi tính toán ổn định của thanh, người ta giả thiết liên kết tại hai đầu thanh, các nút giao giữa các thanh là tuyệt đối cứng hoặc là khớp lý tưởng. Thực tế các liên kết có độ cứng nằm trong khoảng giữa hai trạng thái nói trên. Độ cứng thực tế của liên kết có ảnh hưởng nhiều đến độ bền, độ cứng cũng như ổn định của thanh. Vì vậy, trong bài báo này tác giả đề xuất cách áp dụng phương pháp chuyển vị cưỡng bức để xác định các lực tới hạn Euler đối với các thanh thẳng chịu uốn dọc có xét đến độ cứng thực tế của các liên kết.

Từ khóa: Lực tới hạn Euler; độ cứng thực tế của các liên kết; ổn định thanh ...

ABSTRACT

Usually when calculating bar stability, it is assumed that the connections at the ends of the bars, the intersections between the bars are absolutely rigid or ideal pinned. In fact, the stiffness of the connections varies between the two states mentioned above. The actual stiffness of the connections has a great influence on the strength, stiffness and stability of the bars. Therefore, in this paper, the author proposes how to apply the forced displacement method to determine the Euler critical forces for straight bars subjected to longitudinal bending, considering to the actual stiffness of the connections.

Keywords: Euler critical force; actual stiffness of the connections; bar stability ...

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

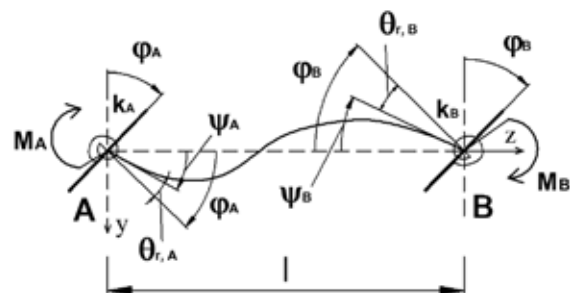
Kết cấu thanh được sử dụng phổ biến trong các công trình xây dựng dân dụng và công nghiệp, cũng như các công trình giao thông, thủy lợi... Khi thanh có chiều dài lớn, tiết diện nhỏ, độ mảnh

của thanh là đáng kể, do đó bài toán ổn định đàn hồi của thanh cần phải được quan tâm nghiên cứu cả về mặt lý thuyết và thực nghiệm.

Phương pháp chuyển vị cưỡng bức [2, 4] cho phép ta nhận được ngay các tần số dao động của thanh. Nó khác với các phương pháp truyền thống, chẳng hạn nó khác với phương pháp Rayleigh [6] chỉ cho ta tần số dao động cơ bản hoặc khác với phương pháp thường dùng hiện nay là đưa định thức của phương trình dao động về dạng đường chéo để lấy tích của số hạng đó cho ta phương trình đa thức xác định các trị riêng. Phương pháp này thường dùng các thuật toán như biến đổi Choleski, biến đổi Jacobi hoặc các biến đổi rất phức tạp khác [8]. Phương trình vi phân của bài toán ổn định cũng là phương trình vi phân thuần nhất nghĩa là không có vế phải.

Thông thường khi tính toán ổn định của thanh, người ta giả thiết liên kết tại hai đầu thanh, các nút giao giữa các thanh là tuyệt đối cứng hoặc là khớp lý tưởng. Thực tế các liên kết có độ cứng biến thiên trong khoảng giữa hai trạng thái nói trên. Độ cứng thực tế của liên kết có ảnh hưởng nhiều đến độ bền, độ cứng cũng như ổn định của thanh. Vì vậy, trong bài báo này tác giả đề xuất cách áp dụng phương pháp chuyển vị cưỡng bức để xác định các lực tới hạn Euler đối với các thanh thẳng chịu uốn dọc có xét đến độ cứng thực tế của các liên kết.

2. MÔ HÌNH PHẦN TỬ THANH CÓ XÉT ĐẾN ĐỘ CỨNG THỰC TẾ CỦA CÁC LIÊN KẾT



Hình 1. Mô hình phần tử thanh có xét độ cứng thực tế của các liên kết

Giả thiết rằng: Phần tử lò xo liên kết có chiều dài bằng không và có độ cứng chống xoay k ; Tải trọng đặt tại các nút khung; Bỏ qua ảnh hưởng của lực dọc và lực cắt đến biến dạng của liên kết cũng như của thanh trước trạng thái tới hạn; Không bỏ qua ảnh

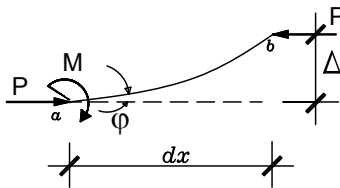
hưởng của lực dọc đến biến dạng uốn của thanh khi hệ mất ổn định.

Xét dầm AB (hình 1) liên kết với cột bởi các lò xo xoay, chiều dài bằng không và độ cứng chống xoay lần lượt tại đầu A và B là k_A, k_B ; φ_A, φ_B là góc xoay tuyệt đối của đầu cột; ψ_A, ψ_B là góc xoay tuyệt đối của đầu dầm; $\theta_{r,A}, \theta_{r,B}$ là góc xoay tương đối giữa đầu dầm và đầu cột; M_A, M_B mô men đầu dầm tại các nút A và B, ta có quan hệ:

$$\begin{cases} \theta_{r,A} = \varphi_A - \psi_A = y'_{A,cột} - y'_{A,dầm} = \frac{1}{k_A} \cdot M_A \\ \theta_{r,B} = \varphi_B - \psi_B = y'_{B,cột} - y'_{B,dầm} = -\frac{1}{k_B} \cdot M_B \end{cases} \quad (1)$$

Đây chính là điều kiện ràng buộc tại hai đầu thanh.

3. BÀI TOÁN ỔN ĐỊNH CỦA THANH THẲNG CHỊU UỐN DỌC



Hình 2. Phân tố dầm

Xét thanh thẳng chịu tải trọng nén dọc trục P, độ cứng uốn của dầm $EJ = \text{const}$ và có liên kết bất kỳ. Tách khỏi hệ một phân tố có chiều dài dx , khi phân tố chịu nén có biến dạng uốn như hình 2.

Tại đầu (a) có nội lực M gây ra biến dạng uốn

$$\chi = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (2)$$

Giả sử tại đầu (b) có chuyển vị Δ ,

Tại đầu (a) có ngoại lực $M_p = P\Delta$ gây ra góc xoay

$$\phi = \frac{dy}{dx} \quad (3)$$

vì ϕ nhỏ nên $\text{tg}\phi = \phi \rightarrow \Delta = \phi dx = \frac{dy}{dx} dx$, ta có:

$$M_p = P\Delta = P \frac{dy}{dx} dx$$

Theo phương pháp nguyên lý cực trị Gauss, lượng cưỡng bức của bài toán được viết như sau:

$$Z = \int_0^l M \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx - \int_0^l P \frac{dy}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) dx \rightarrow \min \quad (4)$$

Từ điều kiện cực trị của dầm, ta có:

$$\delta Z = -\delta \left[\int_0^l M \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) + \int_0^l P \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right) \right] dx \rightarrow \min \quad (5)$$

$$\text{Hay: } -\frac{d^2}{dx^2} [M - P] = 0 \Leftrightarrow -\frac{d^2 M}{dx^2} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0$$

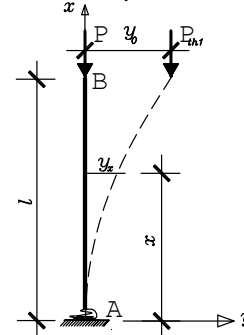
thay $\chi = -EJ \frac{d^2 y}{dx^2}$ vào phương trình trên, ta có:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = 0 \quad (6)$$

Phương trình (6) chính là phương trình ổn định của thanh thẳng chịu uốn dọc. Như vậy, từ phương pháp nguyên lý cực trị Gauss ta cũng nhận được các phương trình ổn định của thanh chịu

uốn dọc, tương tự như các nguyên lý khác. Phương trình (6) là phương trình vi phân cân bằng của thanh chịu uốn dọc bởi lực P đặt tại đầu thanh. Đó là phương trình vi phân tuyến tính thuần nhất (không có vế phải) mà phương pháp truyền thống để giải chúng cùng với các điều kiện biên đã được trình bày trong [3]. Dưới đây trình bày phương pháp chuyển vị cưỡng bức để giải phương trình (6).

4. PHƯƠNG PHÁP CHUYỂN VỊ CƯỜNG BỨC



Hình 3. Thanh đầu ngàm - đầu tự do

Phương pháp chuyển vị cưỡng bức nhằm đưa phương trình (9) là phương trình cân bằng giữa nội lực và ngoại lực về phương trình có vế phải bằng cách cho một điểm nào đó trong thanh, ví dụ điểm $x = x_1$, một chuyển vị y_0 , hình 3:

$$g = y_{x=x_1} - y_0 = 0 \quad (7)$$

Đưa bài toán tìm cực trị của (3) với điều kiện ràng buộc (6) về bài toán cực trị không ràng buộc bằng cách xây dựng phiếm hàm mở rộng Lagrange F như sau:

$$F = Z + \lambda g \rightarrow \min \quad (8)$$

Hay: $F = Z + \lambda g \rightarrow \min$

$$F = \int_0^l M \left(-\frac{d^2 y}{dx^2} \right) dx - \int_0^l P \frac{dy}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) dx + \lambda (y_{x=x_1} - y_0) \rightarrow \min \quad (9)$$

trong đó: λ - thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán. Từ điều kiện

$$\delta F = \int_0^l (M - M_p) \delta \left[\chi \right] dx + \delta (\lambda g) = 0 \quad (10)$$

nhận được phương trình sau:

$$EJ \frac{d^4 y}{dx^4} + P \frac{d^2 y}{dx^2} = \begin{cases} -\lambda & \text{khi } x=x_1 \\ 0 & \text{khi } x \neq x_1 \end{cases} \quad (11)$$

cùng với phương trình (7). Phương trình (11) là phương trình có vế phải. Để nó trở thành phương trình uốn dọc (6) của thanh thì $\lambda(P)=0$ (12)

Về mặt toán học, phương trình (11) là phương trình đa thức xác định các trị riêng của hệ (6) bởi vì nghiệm của nó cũng là nghiệm của (6). Về cơ học, λ có thứ nguyên là lực. Đó là lực giữ để cho thanh có chuyển vị y_0 tại điểm $x = x_1$. Lực giữ phải bằng không, suy ra phương trình (12). Trị riêng của (6) phụ thuộc vào thông số P, suy ra λ cũng là hàm của P. Cho nên giải phương trình (12) theo P, sẽ nhận được các lực tới hạn của thanh bị uốn dọc.

5. XÁC ĐỊNH LỰC TỚI HẠN CỦA THANH CHỊU NÉN CÓ XÉT ĐẾN ĐỘ CỨNG THỰC TẾ CỦA CÁC LIÊN KẾT

Ví dụ 1. Thanh đầu ngàm đầu tự do

Cho thanh thẳng chiều dài l, độ cứng uốn EJ=Const, chịu nén bởi lực nén dọc trục P đặt tại đầu thanh, tại đầu A thanh có liên kết lò xo xoay đàn hồi, có độ cứng tương ứng ban đầu kA=∞ (đầu ngàm), đầu B tự do, như hình 3. Yêu cầu, xác định lực tới hạn cho thanh trong các trường hợp độ cứng lò xo thay đổi.

Trình tự các bước giải bài toán như sau:

Bước 1: Viết biểu thức đường độ võng cho thanh

Trong bài này, xấp xỉ đường đàn hồi của thanh có dạng đa thức như sau:

$$y_1 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 \quad (a1)$$

trong đó các ai(i=1÷7) là các hệ số cần xác định

Gọi χ là biến dạng uốn trong thanh, theo (2) ta có:

$$\chi = -EJ \frac{d^2y}{dx^2}$$

Như vậy trong thanh sẽ có momen uốn Mx bằng $M_x = EJ\chi$

Lực P sẽ gây ra momen uốn trong thanh là $M_P = P(y_1 - y_0)$

Bước 2: Viết biểu thức lượng cưỡng bức Z theo (3)

$$Z = \int_0^l (M - M_P)[\chi]dx \rightarrow \min \quad (b1)$$

với các điều kiện ràng buộc, số điều kiện ràng buộc tùy thuộc vào từng bài toán cụ thể, trong trường hợp này ta có các điều kiện ràng buộc sau:

Chuyển vị tại đầu thanh bằng y0; Momen uốn tại đầu thanh bằng không; Góc xoay tại ngàm được viết theo (1), đây là điều kiện ràng buộc kể đến liên kết thực tế

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= y_1|_{x=l} - y_0 = 0 \\ g_2 &= -EJ \frac{d^2y_1}{dx^2} \Big|_{x=l} = 0 \\ g_3 &= \frac{dy_1}{dx} \Big|_{x=0} + r \frac{d^2y_1}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (c1)$$

trong đó $r = \frac{EJ}{lk_A}$; kA là độ cứng xoay của lò xo

Bước 3: Viết biểu thức phiếm hàm mở rộng F theo (8)

Ta đưa bài toán tìm cực trị (b1) có ba điều kiện ràng buộc ở trên về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa thừa số Lagrange vào phiếm hàm mở rộng như sau:

$$F = Z + \sum_{k=1}^3 g_k \lambda_k \rightarrow \min$$

$$\text{Hay: } F = \int_0^l (M - M_P)[\chi]dx + g_1\lambda_1 + g_2\lambda_2 + g_3\lambda_3 \rightarrow \min \quad (d1)$$

trong đó λ1 là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán, đó là lực giữ cho hệ ở trạng thái lệch. Bài toán có 10 ẩn số là các hệ số của đa thức (a1), các ai (i=1÷7) và các thừa số Lagrange λk (k=1÷3).

Bước 4: Thành lập hệ phương trình đại số tuyến tính và giải hệ

Nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với momen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \int_0^l (M - M_P) \frac{\partial}{\partial a_i} [\chi] dx + \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^3 (g_k \lambda_k) = 0 \\ f_i &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \sum_{k=1}^3 (g_k \lambda_k) = 0; \quad a_i = 1 \div 7; \lambda_k (k = 1 \div 3) \end{aligned} \right\} \quad (e1)$$

Như vậy, từ điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F ta sẽ nhận được 10 phương trình đại số tuyến tính để xác định các ẩn số. Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng phần mềm Symbolic của Matlab. Khi giải phương trình xong thấy rằng các thông số ai (i=1÷7) và λk(k=1÷3) đều là hàm của lực P. Ở đây chỉ đưa ra thừa số Lagrange λ1, trong trường hợp r=0, ứng với độ cứng kA=∞ (ngàm lý tưởng tại chân cột A), ta có:

Bước 5: Rút ra phương trình ứng với ẩn số λ là lực giữ cho hệ ở trạng thái lệch và giải phương trình tìm được các lực tới hạn

Trong trường hợp này là λ1, ta có:

$$\lambda_{11} = 7/45 \times (46 \times P^5 \times l^{10} - 1035 \times P^4 \times r \times l^9 - 22455 \times EJ \times P^4 \times l^8 + 305280 \times EJ \times P^4 \times r \times l^7 + 3295080 \times EJ^2 \times P^3 \times l^6 - 27038880 \times EJ^2 \times P^3 \times r \times l^5 - 169884000 \times EJ^3 \times P^2 \times l^4 + 795484800 \times EJ^3 \times P^2 \times r \times l^3 + 2630232000 \times EJ^4 \times P \times l^2 - 5504241600 \times EJ^4 \times P \times r \times l - 5504241600 \times EJ^5) y_0 = 0 \quad (f1)$$

Ta thấy rằng, λ1 là đa thức bậc 5 của P. Giải (f1) ta sẽ nhận được 5 nghiệm, giá trị các nghiệm thay đổi tùy thuộc vào độ cứng k của lò xo, trong phương trình xuất hiện r, r và k có liên hệ theo biểu thức (1). Ba lực tới hạn đầu tiên của thanh như sau:

$$\begin{aligned} P_{1th} &= 2.4674011003938600238770639403298 \times EJ / l^2 \\ P_{2th} &= 22.207051504965310257836974884224 \times EJ / l^2 \\ P_{3th} &= 61.880511141684923600648591178495 \times EJ / l^2 \end{aligned}$$

Ba lực tới hạn đầu tiên hoàn toàn chính xác so với kết quả khi giải bằng các phương pháp truyền thống.

Bảng 1. Cho độ cứng k của loxo thay đổi từ 0 → ∞ ta nhận được các kết quả như sau:

| $r = \frac{EJ}{lk_A}$ | Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức | | | Theo phương pháp truyền thống |
|-----------------------|--------------------------------------|------------------|------------------|-------------------------------|
| | P _{1th} | P _{2th} | P _{3th} | P _{1th} |
| 0 | 2.4674 | 22.2070 | 61.8805 | 2.4674 |
| 1.0 | 7.8355 | 37.5499 | 82.2689 | |
| 5.0 | 9.4743 | 39.2282 | 83.8247 | |
| 10 | 9.6775 | 39.4385 | 84.0239 | |
| ∞ | 9.8788 | 39.6482 | 84.2238 | 9.8696 |

Qua kết quả được lập bảng ta thấy rằng, khi r=0 tương ứng với độ cứng xoay của lò xo k=∞, liên kết tại chân cột là ngàm lý tưởng ta thường gặp, kết quả lực tới hạn theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức hoàn toàn trùng khớp với kết quả nhận được khi giải bằng các phương pháp truyền thống. Khi r tăng dần lên, tương ứng với độ cứng k giảm dần ta thấy rằng, lực tới hạn tăng lên một cách nhanh chóng cho đến khi r=10 thì tốc độ tăng chậm dần, cho tới khi r=∞ (k=0) lúc này liên kết chân cột trở thành khớp lý tưởng, lực tới hạn trong trường hợp này chính là lực tới hạn của thanh hai đầu liên kết khớp lý tưởng.

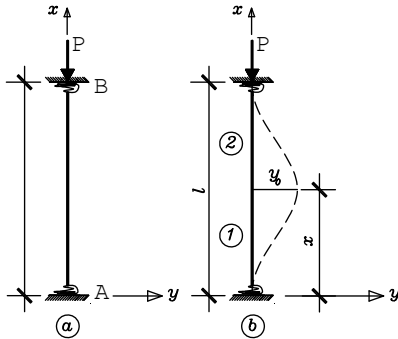
Ví dụ 2. Thanh hai đầu ngàm

Cho thanh thẳng chiều dài l, độ cứng uốn EJ=Const, chịu nén bởi lực nén dọc trục P đặt tại đầu thanh, hai đầu thanh có liên kết lò xo xoay đàn hồi có độ cứng tương ứng ban đầu kA=∞, kB=∞ (hai

đầu ngàm), như hình 3a. Yêu cầu, xác định lực tới hạn cho thanh trong các trường hợp độ cứng lò xo thay đổi, từ đó tìm ra lực tới hạn cho các thanh có hai đầu liên kết lý tưởng thường gặp trong tính toán, gồm thanh hai đầu ngàm, hai đầu khớp và đầu ngàm đầu khớp

Trong bài này ta chia thanh thành hai đoạn 1 và 2 như hình 4, xấp xỉ đường đàn hồi của 2 đoạn thanh có dạng đa thức như sau:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6 + a_7x^7 \\ y_2 &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5 + b_6x^6 + b_7x^7 \end{aligned} \right\} (a2)$$



Hình 4. Thanh hai đầu ngàm trong đó các ai(i=1÷7), bi(i=0÷7) là các hệ số cần xác định Gọi χ là biến dạng uốn trong thanh, theo (2) ta có:

$$\chi_1 = -EJ \frac{d^2 y_1}{dx^2}; \quad \chi_2 = -EJ \frac{d^2 y_2}{dx^2}$$

Như vậy trong thanh sẽ có momen uốn Mx bằng

$$M_{x1} = EJ\chi_1; \quad M_{x2} = EJ\chi_2$$

Lực P sẽ gây ra momen uốn trong thanh là

$$M_{P1} = P(y_1); \quad M_{P2} = P(y_2)$$

Viết biểu thức lượng cường bức Z theo (3)

$$Z = \int_0^{l1} (M_{x1} - M_{P1})[\chi] dx + \int_{l1}^{l2} (M_{x2} - M_{P2})[\chi] dx \rightarrow \min \quad (b2)$$

với các điều kiện ràng buộc, số điều kiện ràng buộc tùy thuộc vào từng bài toán cụ thể, trong trường hợp này ta có các điều kiện ràng buộc sau:

Góc xoay tại ngàm được viết theo (1), đây là điều kiện ràng buộc kể đến liên kết thực tế, Chuyển vị tại x1=l1 thành bằng y0, Chuyển vị tại cuối đoạn 1 bằng chuyển vị tại đầu đoạn 2, Góc xoay tại cuối đoạn 1 bằng góc xoay tại đầu đoạn 2, Chuyển vị tại cuối đoạn 2 bằng không, Góc xoay tại ngàm đầu cột được viết theo (1), đây là điều kiện ràng buộc kể đến liên kết thực tế.

$$\left. \begin{aligned} g_1 &= \frac{dy_1}{dx} \Big|_{x=0} + r_1 \frac{d^2 y_1}{dx^2} \Big|_{x=0} = 0 \\ g_2 &= y_1 \Big|_{x=l1} - y_0 = 0 \\ g_3 &= y_1 \Big|_{x=l1} - y_2 \Big|_{x=0} = 0 \\ g_4 &= \frac{dy_1}{dx} \Big|_{x=l1} - \frac{dy_2}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \\ g_5 &= y_2 \Big|_{x=l2} = 0 \\ g_6 &= \frac{dy_2}{dx} \Big|_{x=l2} + r_2 \frac{d^2 y_2}{dx^2} \Big|_{x=l2} = 0 \end{aligned} \right\} (c2)$$

trong đó $r_1 = \frac{EJ}{lk_A}$; kA độ cứng xoay của lò xo tại A; $r_2 = \frac{EJ}{lk_B}$; kB

độ cứng xoay của lò xo tại B.

Ta đưa bài toán tìm cực trị (b2) có sáu điều kiện ràng buộc (c2) về bài toán cực trị không có ràng buộc bằng cách đưa thừa số Lagrange vào phiếm hàm mở rộng như sau:

$$\left. \begin{aligned} F &= Z + \sum_{k=1}^6 g_k \lambda_k \rightarrow \min \\ F &= \int_0^{l1} (M_{x1} - M_{P1})[\chi] dx + \int_{l1}^{l2} (M_{x2} - M_{P2})[\chi] dx + \left. \begin{aligned} &+ g_1 \lambda_1 + g_2 \lambda_2 + g_3 \lambda_3 + g_4 \lambda_4 + g_5 \lambda_5 + g_6 \lambda_6 \end{aligned} \right\} \rightarrow \min \quad (d2)$$

trong đó λ_2 là thừa số Lagrange và cũng là ẩn của bài toán, đó là lực giữ cho hệ ở trạng thái lệch. Bài toán có 21 ẩn số là các hệ số của đa thức (a2), các ai (i=1÷7); bi (i=0÷7) và các thừa số Lagrange λ_k (k=1÷6).

Nguyên lý cực trị Gauss xem các biến dạng uốn là độc lập với momen tác dụng cho nên điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F là:

$$\left. \begin{aligned} h_i &= \int_0^{l1} (M_{x1} - M_{P1}) \frac{\partial}{\partial a_i} [\chi] dx + \int_{l1}^{l2} (M_{x2} - M_{P2}) \frac{\partial}{\partial a_i} [\chi] dx + \\ &+ \frac{\partial}{\partial a_i} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) = 0; \\ k_i &= \int_0^{l1} (M_{x1} - M_{P1}) \frac{\partial}{\partial b_i} [\chi] dx + \int_{l1}^{l2} (M_{x2} - M_{P2}) \frac{\partial}{\partial b_i} [\chi] dx + \\ &+ \frac{\partial}{\partial b_i} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) = 0; \\ f_i &= \frac{\partial}{\partial \lambda_k} \sum_{k=1}^6 (g_k \lambda_k) = 0; a_i = 1 \div 7; b_i = 0 \div 7; \lambda_k (k = 1 \div 6) \end{aligned} \right\} (e2)$$

Như vậy, từ điều kiện cực trị của phiếm hàm mở rộng F ta sẽ nhận được 21 phương trình đại số tuyến tính để xác định các ẩn số. Có thể giải bài toán trên bằng cách sử dụng phần mềm Symbolic của Matlab. Khi giải phương trình xong thấy rằng các thông số ai (i=1÷7), bi (i=0÷7) và λ_k (k=1÷6) đều là hàm của lực P. Ở đây chỉ đưa ra thừa số Lagrange λ_2 , trong trường hợp r1=0, ứng với độ cứng kA=∞, r2=0, ứng với độ cứng kB=∞, (ngàm lý tưởng tại A và B). Trong trường hợp này là λ_2 quá dài nên không trình bày ở đây.

Ta thấy rằng, λ_2 là đa thức bậc 10 của P. Giải $\lambda_2=0$ ta sẽ nhận được 10 nghiệm, giá trị các nghiệm thay đổi tùy thuộc vào độ cứng k của lò xo tại hai đầu thanh, trong phương trình xuất hiện r, r và k có liên hệ theo biểu thức (1). Ba lực tới hạn đầu tiên của thanh như sau:

$$\begin{aligned} P1th &= 39.478824118495069584111564600163xEJ/l2 \\ P2th &= 80.825695046688147896021690263184xEJ/l2 \\ P3th &= 158.37387144315981451128300560260xEJ/l2 \end{aligned}$$

Ba lực tới hạn đầu tiên hoàn toàn chính xác so với kết quả khi giải bằng các phương pháp truyền thống. Bây giờ ta cho độ cứng k của lò xo thay đổi từ 0 → ∞ ta nhận được các kết quả như sau:

Bảng 2. Trường hợp 1, đầu A là ngàm, độ cứng k=∞ (rA=0) không thay đổi, đầu B thay đổi k giảm dần

| Chân cột A | Đầu cột B | Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức | Theo phương pháp truyền thống |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|
| $r_1 = \frac{EJ}{lk_A}$ | $r_2 = \frac{EJ}{lk_B}$ | P_{1th} | P_{1th} |
| 0 | 0 | 39.4788 | 39.4784 |
| 0 | 1.0 | 20.2562 | |
| 0 | 5.0 | 20.1931 | |
| 0 | 10 | 20.1912 | |
| 0 | ∞ | 20.1907 | 20.1907 |

Khi chân cột A là ngàm, độ cứng $k_A = \infty$ ($r_A = 0$) không thay đổi, đầu B thay đổi k_B giảm dần (r_B tăng dần) ta thấy rằng các lực tới hạn nhận được tương ứng giảm dần và tiệm cận với kết quả của thanh đầu ngàm A, đầu khớp B, Khi $r_B \rightarrow \infty$, kết quả nhận được là không thay đổi (bảng 2), điều đó chứng tỏ ngàm ban đầu tại B đã trở thành liên kết khớp lý tưởng. Kết quả nhận được tại hàng thứ nhất và hàng cuối cùng trong bảng 2 hoàn toàn trùng khớp với các kết quả của thanh hai đầu ngàm và thanh đầu ngàm đầu khớp nhận được theo các phương pháp truyền thống, chứng tỏ độ tin cậy của phương pháp chuyển vị cưỡng bức.

Bảng 3. Trường hợp 2, cả hai đầu A, B đều thay đổi k giảm dần

| Chân cột A | Đầu cột B | Theo phương pháp chuyển vị cưỡng bức | Theo phương pháp truyền thống |
|-------------------------|-------------------------|--------------------------------------|-------------------------------|
| $r_1 = \frac{EJ}{lk_A}$ | $r_2 = \frac{EJ}{lk_B}$ | P_{1th} | P_{1th} |
| 0 | 0 | 39.4788 | 39.4784 |
| 1.0 | 1.0 | 9.9266 | |
| 5.0 | 5.0 | 9.8718 | |
| ∞ | ∞ | 9.8696 | 9.8696 |

Kết quả nhận được từ bảng 3 cho thấy, khi độ cứng k_A, k_B cùng giảm dần, các lực tới hạn nhận được tương ứng giảm dần và tiệm cận với kết quả của thanh hai đầu khớp lý tưởng thường gặp, Khi $r_B \rightarrow \infty$, kết quả nhận được gần như không thay đổi (bảng 3), điều đó chứng tỏ khi $r_A, r_B \rightarrow \infty$ thì ngàm ban đầu tại A, B đã trở thành liên kết khớp lý tưởng. Kết quả nhận được tại hàng thứ nhất và hàng cuối cùng trong bảng 3 hoàn toàn trùng khớp với các kết quả của thanh hai đầu ngàm và thanh hai đầu khớp nhận được theo các phương pháp truyền thống, chứng tỏ độ tin cậy của phương pháp chuyển vị cưỡng bức.

6. KẾT LUẬN VÀ KIẾN NGHỊ

Tác giả đã sử dụng thành công phương pháp chuyển vị cưỡng bức để xây dựng và giải bài toán ổn định đàn hồi của thanh thẳng chịu uốn dọc, có xét đến độ cứng thực tế của các liên kết. Điều này, chứng tỏ tính ưu việt của phương pháp chuyển vị cưỡng bức đối với các bài toán trị riêng và véc tơ riêng so với các phương pháp khác, khi không phải biến đổi ma trận về ma trận đường chéo...mà nhận được ngay đa thức đặc trưng xác định lực tới hạn của thanh chỉ bằng cách cho cho một điểm bất kỳ trên thanh chuyển vị cưỡng bức một đoạn y_0 nào đó.

Các kết quả nhận được khi không xét đến độ cứng thực tế của các liên kết, hoàn toàn trùng khớp với các kết quả nhận được bằng các phương pháp hiện có. Các lực tới hạn nhận được khi có xét đến độ cứng thực tế của các liên kết cho thấy sự phù hợp về tính chất

vật lý của các liên kết, khi tăng độ cứng xoay của lò xo thì kết quả hội tụ về trường hợp liên kết ngàm và ngược lại, khi giảm độ cứng k thì kết quả tiệm cận dần với trường hợp liên kết khớp. Điều này cho phép người thiết kế, dùng bài toán này tìm ra kết quả nhiều bài toán khác, bằng cách thay đổi độ cứng xoay của lò xo, chẳng hạn như trong bài toán ở ví dụ 2, ta có thể nhận được đồng thời kết quả của ba bài toán, thanh hai đầu ngàm (khi cho độ cứng k) tại hai đầu bằng không, kết quả của thanh đầu ngàm đầu khớp (khi cho độ cứng $k_A = \infty, k_B = 0$) và kết quả của thanh hai đầu khớp (khi cho độ cứng $k_A = 0, k_B = 0$). Tương tự, từ bài toán thanh hai đầu khớp ta cũng có thể tìm được kết quả của hai bài toán, thanh hai đầu ngàm và thanh đầu ngàm đầu khớp.

Kiến nghị, có thể nghiên cứu tính toán hệ dầm liên tục, hệ khung, hệ dàn có xét đến độ cứng thực tế của các liên kết, đối với các bài toán tĩnh, động và ổn định.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Ha Huy Cuong (2005), Gaussian extreme principle method, Scientific and technical journal, IV Page 112 to 114.
- [2]. Doan Van Duan (2014), Forced displacement method to solve eigenvalues and eigenvectors, Construction Journal, no. 11. Pages 82 to 84.
- [3]. Doan Van Duan (2016), Study on elastic stability of bar system structure with consideration of lateral shear strain, Contruction publisher, 156 pages.
- [4]. Vu Thanh Thuy (2010), Study of internal force and displacement of flexural bar system considering the influence of shear strain, Technical PhD thesis, Hanoi University of Architecture.
- [5]. Pham Van Trung (2006), New method for calculating wire systems and hanging roofs, Technical PhD Thesis, Hanoi University of Architecture.
- [6]. Cornelius Lanczos (1949), The variational principles of Mechanics, University of Toronto Press,
- [7]. Ferdinand P. Beer - E. Russell Johnston, Jr. - John T. DeWolf (2006), Mechanics of Materials (fourth edition), McGraw-Hill Companies, INC, New york, 787 pages.
- [8]. G. Korn - T. Korn (1961), Mathematical Handbook for scientists and Engineers, McGraw-Hill, New york (Russian translation, edited by I. Bramovich, Nauka - Moscow Publisher, 1964).
- [9]. Stephen P. Timoshenko - J. Goodier (1970), Theory of elasticity, McGraw-Hill, New york (Russian translation, edited by G. Shapiro, Nauka - Moscow Publisher, 1979), 560 pages.
- [10]. Stephen P. Timoshenko - Jame M. Gere (1961), Theory of elastic stability, McGraw-Hill Book Company, INC, New york - Toronto - London, 541 Tr.