

Áp dụng phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu dao động riêng của tấm có chiều dày biến đổi

Application of the finite element method to analyze the natural vibration of variable thickness plates

> TS NGUYỄN CHÍ THỌ¹, TS LÊ TRƯỜNG SƠN¹, PHAN MẠNH ĐOÀN², KS PHẠM ĐỨC THẢO¹

¹Học viện Kỹ thuật quân sự; ²Viện kỹ thuật Phòng không-không quân

TÓM TẮT

Bằng việc sử dụng phần tử tứ giác bốn điểm nút, mỗi nút có năm bậc tự do, bài báo nghiên cứu đáp ứng dao động riêng của tấm có chiều dày biến đổi tựa trên nền đàn hồi hai hệ số. Các công thức tính toán được xây dựng dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Mindlin, chiều dày của tấm có thể biến thiên theo quy luật bất kỳ. Lý thuyết tính toán được kiểm chứng độ tin cậy thông qua so sánh với các kết quả đã công bố, trên cơ sở đó bài báo tiến hành khảo sát ảnh hưởng của một số tham số chiều dày, điều kiện biên, độ cứng của nền đàn hồi đến đáp ứng dao động riêng của tấm có chiều dày biến đổi. Các kết quả của nghiên cứu này là cơ sở khoa học có giá trị giúp cho các kỹ sư trong việc thiết kế và sử dụng có hiệu quả trong thực tế kỹ thuật.

Từ khóa: Chiều dày biến đổi; phương pháp phần tử hữu hạn; dao động riêng; nền đàn hồi.

ABSTRACT

This article examines the free vibration behavior of plates with different thicknesses that are supported by a two-coefficient elastic foundation. The analysis is conducted using a quadrilateral element consisting of four nodes, each with five degrees of freedom. The fundamental basis for the calculation formulas is in Mindlin's first-order shear deformation theory. The thickness of a plate is subject to vary in accordance with a certain law. The validity of the calculation theory is evaluated through a comparative analysis with previously published findings. This work also investigates the influence of different characteristics, such as plate thickness, boundary conditions, and elastic foundation rigidity, on the specific vibration response of plates of increasing thicknesses.

Keywords: Variable thickness; finite element method; natural-vibration; elastic foundation.

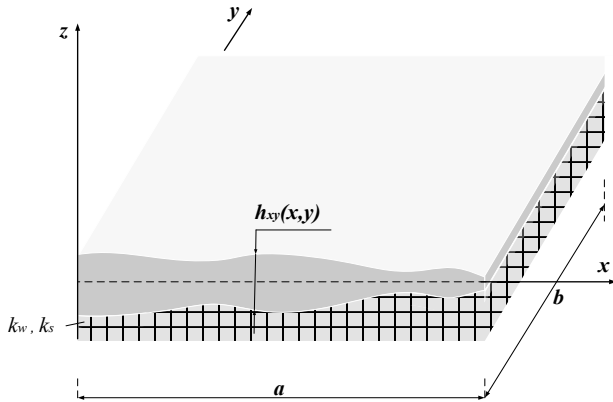
1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Để tận dụng vật liệu với khả năng làm việc tốt nhất, cũng như khai thác hợp lý khoảng không để bố trí kết cấu, các tấm, vỏ có chiều dày biến đổi đã và đang được sử dụng trong thực tế kỹ thuật, nghiên cứu đáp ứng cơ học của các kết cấu có chiều dày biến đổi cũng được các nhà khoa học quan tâm nghiên cứu và đã đạt được một số kết quả nhất định. Đoàn Hồng Đức và nhóm nghiên cứu [1] đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc ba để tính toán ổn định của tấm có chiều dày biến đổi và kể đến hiệu ứng flexo. Nguyễn Đình Đức và các đồng nghiệp [2] dựa trên lý thuyết phase-field để tìm ra tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của tấm có vết nứt và có chiều dày thay đổi. Efraim và Eisenberger [3] đã sử dụng lời giải dạng giải tích để tìm nghiệm đối với bài toán dao động riêng của tấm composite có cơ tính biến thiên và có chiều dày biến đổi dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất. Bacciocchi và các cộng sự [4] đã sử dụng phương pháp cầu phương vi phân tổng quát để nghiên cứu đáp ứng dao động riêng của tấm và vỏ có chiều dày biến đổi. Tajeddini và nhóm nghiên cứu [5] lại sử dụng lời giải dựa trên phương pháp Ritz để nghiên cứu dao động riêng của tấm tròn có chiều dày biến đổi. Dựa trên phương pháp bán giải tích, Alipour và các đồng nghiệp [6] đã xây dựng lời giải đối với bài toán dao động riêng của tấm tròn làm bằng vật liệu cơ tính biến đổi. Minh và cộng sự [7-10] phân tích ứng xử cơ học của kết cấu dầm và tấm bằng vật liệu tiên tiến, bao gồm tương tác trượt giữa các lớp nhờ các đầu nối cắt, những kết cấu này được sử dụng nhiều trong kỹ thuật xây dựng cầu đường.

Có thể thấy rằng các công trình đã có mới chỉ dừng lại ở phương pháp giải tích hoặc tính toán cho tấm có chiều dày biến đổi với quy luật đơn giản. Để tận dụng ưu điểm của phương pháp phần tử hữu hạn là có thể giải quyết bài toán dao động riêng với quy luật bất kỳ, đồng thời điều kiện biên của kết cấu linh hoạt, bài báo này kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất với phương pháp phần tử hữu hạn để nghiên cứu đáp ứng dao động riêng của tấm có chiều dày biến đổi và tựa trên nền đàn hồi hai hệ số. Đây là bài toán mô tả gần với các kết cấu thực tế, việc giải quyết vấn đề này sẽ tạo tiền đề khoa học để giúp các kỹ sư thiết kế kết cấu dạng tấm với chiều dày biến đổi, đồng thời bài báo cũng là cơ sở để giải quyết các vấn đề thực tế như chuẩn đoán kỹ thuật công trình,...

2. MÔ HÌNH TÍNH TOÁN VÀ CÔNG THỨC TÍNH TOÁN

Xét tấm có chiều dày biến đổi có mô hình như trên hình 1, tấm có chiều dài là a và rộng là b , chiều dày tấm h biến đổi theo cả tọa độ x và y . Tấm tựa trên nền đàn hồi hai hệ số k_w và k_s .



Hình 1. Tấm có chiều dày biến đổi

Để thiết lập các biểu thức tính toán, bài báo sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Mindlin, theo đó các thành phần chuyển vị dọc theo ba trục tọa độ Oxyz có dạng:

$$\begin{cases} u(x, z) = u_0(x, y) + z\varphi_x \\ v(x, z) = v_0(x, y) + z\varphi_y \\ w(x, z) = w \end{cases} \quad (1)$$

trong đó φ_x, φ_y là các góc xoay quanh các trục x và y .

Các thành phần biến dạng dài và biến dạng trượt của tấm:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \varepsilon_{0x} + z\varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = \varepsilon_{0y} + z\varepsilon_{zy} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_y}{\partial x} \right) = \gamma_{0xy} + z\gamma_{zxy} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y \end{aligned} \quad (2)$$

Véc tơ ứng suất và biến dạng tuân theo định luật Hook như sau:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \\ &= \mathbf{C}_u \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{C}_c \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3)$$

Năng lượng của tấm được tính từ biến dạng và ứng suất:

$$\begin{aligned} NL^{tam} &= \frac{1}{2} \int_V \left(\sigma_{xx}^T \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}^T \varepsilon_{yy} + \tau_{xy}^T \gamma_{xy} + \tau_{xz}^T \gamma_{xz} + \tau_{yz}^T \gamma_{yz} \right) dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{S-h(x,y)/2}^{h(x,y)/2} \int_{-h(x,y)/2}^{h(x,y)/2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^T \mathbf{C}_u \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^T \mathbf{C}_c \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz dS \end{aligned} \quad (4)$$

Năng lượng của nền đàn hồi được định nghĩa là:

$$NL^{nen} = \frac{1}{2} \int_S \left(k_w w^2 + k_s \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + k_s \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right) dS \quad (5)$$

với k_w và k_s là hai hệ số của nền đàn hồi.

Động năng của tấm:

$$DN^{tam} = \frac{1}{2} \int_{S-h(x,y)/2}^{h(x,y)/2} \int_{-h(x,y)/2}^{h(x,y)/2} \left(\dot{u}\rho(z)\dot{u} + \dot{v}\rho(z)\dot{v} + \dot{w}\rho(z)\dot{w} \right) dz dS \quad (6)$$

Bài báo sử dụng nguyên lý Hamilton để tìm phương trình cân bằng cho tấm, theo đó ta có:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \left(NL^{tam} + NL^{nen} - DN^{tam} \right) dt = 0 \quad (7)$$

Tấm được chia thành các phần tử chữ nhật bốn nút, mỗi nút chứa năm bậc tự do:

$$\mathbf{q}_e = \sum_{i=1}^4 \begin{Bmatrix} u_{0i} \\ v_{0i} \\ w_i \\ \varphi_{xi} \\ \varphi_{yi} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

trong đó các thành phần chuyển vị tại mỗi điểm trong phần tử tấm được xấp xỉ thông qua các hàm nội suy Lagrange N_i như sau:

$$\begin{cases} u_0 = \sum_{i=1}^4 N_i u_{0i} = \mathbf{N}_u \mathbf{q}_e \\ v_0 = \sum_{i=1}^4 N_i v_{0i} = \mathbf{N}_v \mathbf{q}_e \\ w = \sum_{i=1}^4 N_i w_i = \mathbf{N}_w \mathbf{q}_e \\ \varphi_x = \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{xi} = \mathbf{N}_{\varphi_x} \mathbf{q}_e \\ \varphi_y = \sum_{i=1}^4 N_i \varphi_{yi} = \mathbf{N}_{\varphi_y} \mathbf{q}_e \end{cases} \quad (9)$$

hoặc viết gọn ở dạng ma trận như sau:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q}_e \quad (10)$$

và các thành phần biến dạng được tính theo véc tơ chuyển vị nút như:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{0x} \\ \varepsilon_{0y} \\ \gamma_{0xy} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_0 \mathbf{q}_e; \quad \begin{Bmatrix} \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{zy} \\ \gamma_{zxy} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_z \mathbf{q}_e; \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_c \mathbf{q}_e; \quad (11)$$

Từ đó, thu được biểu thức năng lượng của phần tử tấm như sau:

$$\begin{aligned} NL_e^{tam} &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \int_{S-h(x,y)/2}^{h(x,y)/2} \int_{-h(x,y)/2}^{h(x,y)/2} \left(\mathbf{B}_0^T \mathbf{C}_u \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_z^T \mathbf{C}_z \mathbf{B}_z + \mathbf{B}_c^T \mathbf{C}_c \mathbf{B}_c \right) dz dS \mathbf{q}_e \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e^{tam} \mathbf{q}_e \end{aligned} \quad (12)$$

trong đó \mathbf{K}_e^{tam} là ma trận độ cứng của phần tử tấm.

Năng lượng của nền đàn hồi được tính như sau:

$$\begin{aligned} NL_e^{nen} &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \left(\int_S \left(k_w \mathbf{N}^T \mathbf{N} + k_s \left(\frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \right) \right) dx \right) \mathbf{q}_e = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \mathbf{K}_e^{nen} \mathbf{q}_e \end{aligned} \quad (13)$$

trong đó K_e^{nen} là ma trận độ cứng phần tử của nền đàn hồi.

Động năng của phần tử tấm:

$$DN_e^{tam} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T \left(\int_{S-h(x,y)/2}^{h(x,y)/2} \int \rho(z) (\mathbf{N}^T \mathbf{L}^T \mathbf{L} \mathbf{N}) dz dS \right) \mathbf{q}_e = \frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T (\mathbf{M}_e^{tam}) \mathbf{q}_e \quad (14)$$

trong đó \mathbf{M}_e^{tam} là ma trận khối lượng của phần tử tấm.

Thay các biểu thức từ (12) - (14) vào phương trình (7), ta thu được phương trình xác định tần số dao động riêng và dạng dao động riêng tương ứng của tấm có chiều dày biến đổi như sau:

$$\sum_e (\mathbf{K}_e^{tam} + \mathbf{K}_e^{nen} - \omega^2 \mathbf{M}_e^{tam}) \mathbf{u}_e = \mathbf{0} \quad (15)$$

Có thể thấy rằng ma trận độ cứng và ma trận khối lượng phần tử tấm phụ thuộc vào quy luật biến đổi chiều dày, do vậy đáp ứng dao động của tấm sẽ phụ thuộc vào quy luật này.

3. VÍ DỤ KIỂM CHỨNG ĐỘ TIN CẬY

Ví dụ này kiểm chứng tần số dao động riêng của dầm tựa trên nền đàn hồi hai hệ số. Tấm có chiều rộng là a , chiều dài là b , bề dày $h = a/10$, Mô đun đàn hồi $E = 380$ GPa, hệ số Poisson là 0,3, khối lượng riêng 3960 kg/m³. Tấm tựa trên nền đàn hồi hai hệ số với

$$\bar{K}_w = \frac{k_w a^4}{D_w}, \text{ và } \bar{K}_s = \frac{k_s a^2}{D_w} \text{ (với } D_w = \hat{E} h^3 / 12(1-\nu^2), \hat{E} = 70 \text{ GPa).}$$

Tần số không thứ nguyên được so sánh có công thức $\omega = \omega_1 h \sqrt{\rho / \hat{E}}$; $\rho = 2707$ kg/m³, bảng 1 trình bày kết quả so sánh với các kết quả tính bằng phương pháp giải tích trong tài liệu [11] với lưới chia phần tử tăng dần, có thể thấy kết quả đảm bảo hội tụ cần thiết và lưới chia 200 phần tử cho kết quả có độ tin cậy tốt, do đó bài báo này sẽ sử dụng lưới chia này để tính toán.

Bảng 1. So sánh tần số dao động của tấm tựa trên nền đàn hồi hai hệ số

Nền đàn hồi		L/h=10				Kết quả giải tích [11]
		Bài báo				
\bar{K}_w	\bar{K}_s	50	128	200	800	
0	0	0.1111	0.1111	0.1111	0.1111	0.1134
	100	0.1566	0.1566	0.1566	0.1566	0.1599
100	0	0.1139	0.1138	0.1138	0.1138	0.1162
	100	0.1586	0.1585	0.1585	0.1585	0.1619

4. KHẢO SÁT MỘT SỐ YẾU TỐ ẢNH HƯỞNG ĐẾN DAO ĐỘNG RIÊNG CỦA TẤM CÓ CHIỀU DÀY BIẾN ĐỔI

Tấm có thông số hình học $a = 0.5$ m, $b = a$, chiều dày tấm biến đổi theo quy luật: $h = h_0 e^{\beta \frac{x}{a}}$ với $h_0 = a/20$ và β là tham số thể hiện mức độ biến đổi của chiều dày, các thông số đặc trưng cơ tính $E = 70$ GPa, $\nu = 0.3$, khối lượng riêng $\rho = 2700$ kg/m³. Tấm tựa trên nền đàn hồi với hai hệ số:

$$\Omega_i = \omega_1 h \sqrt{\frac{\rho}{E}}; R_w^* = \frac{k_w a^4}{D_w}; R_s^* = \frac{k_s a^2}{D_w}; D_w = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (16)$$

a. Ảnh hưởng của tham số β

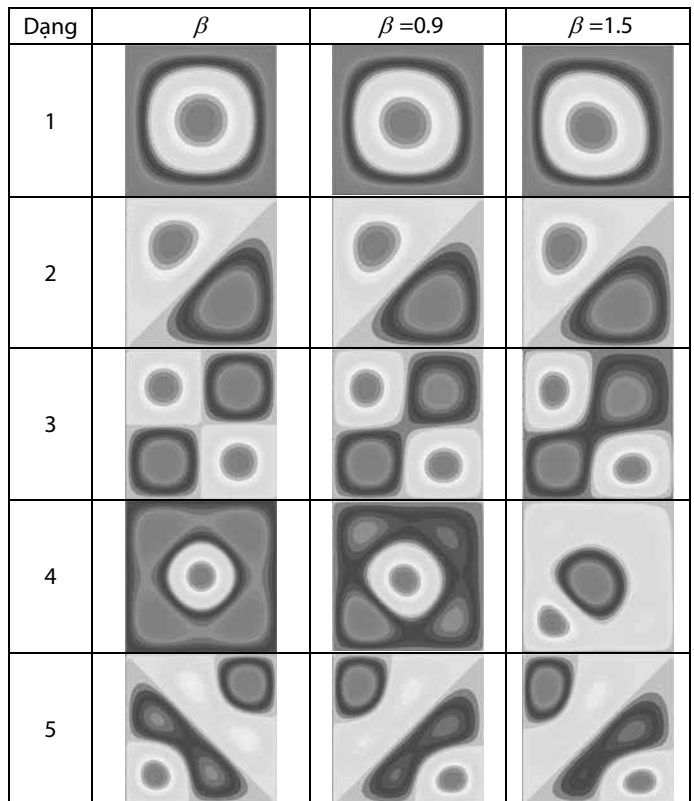
Tham số β thể hiện mức độ biến đổi của chiều dày nhiều hay ít, giá trị của tham số này được cho tăng dần từ 0 đến 1.5, kết quả tính toán năm tần số dao động riêng đầu tiên được cho như trong bảng 2, hình 2 trình bày năm tần số dao động riêng của tấm với các giá trị tham số β khác nhau. Một số nhận xét được rút ra như sau:

+ Khi giá trị của tham số β càng lớn thì tần số dao động riêng của tấm càng lớn, điều này là do tham số này ảnh hưởng tới chiều dày tấm, làm thay đổi độ cứng và khối lượng của tấm, nhưng độ cứng tăng mạnh hơn so với khối lượng nên tần số dao động riêng của tấm tăng lên.

+ Giá trị của tham số β còn ảnh hưởng đáng kể đến các dạng dao động riêng đầu tiên. Từ đây có thể kết luận rằng tham số β có ảnh hưởng tới cả giá trị tần số cũng như các dạng dao động riêng của tấm có chiều dày biến đổi.

Bảng 2. Năm tần số dao động riêng đầu tiên của tấm phụ thuộc tham số β , tấm tựa đơn các cạnh

β	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
0	0.037	0.064	0.088	0.103	0.125
0.1	0.055	0.096	0.132	0.155	0.188
0.2	0.082	0.143	0.198	0.232	0.282
0.3	0.122	0.215	0.297	0.349	0.423
0.4	0.181	0.321	0.446	0.525	0.637
0.5	0.269	0.481	0.670	0.789	0.957
0.8	0.890	1.612	2.281	2.690	3.267
0.9	1.329	2.418	2.449	4.051	4.924
1.5	15.119	27.869	40.561	47.333	58.138



Hình 2. Năm tần số dao động riêng của tấm phụ thuộc tham số β , tấm tựa đơn các cạnh (SSSS)

b. Ảnh hưởng của điều kiện biên

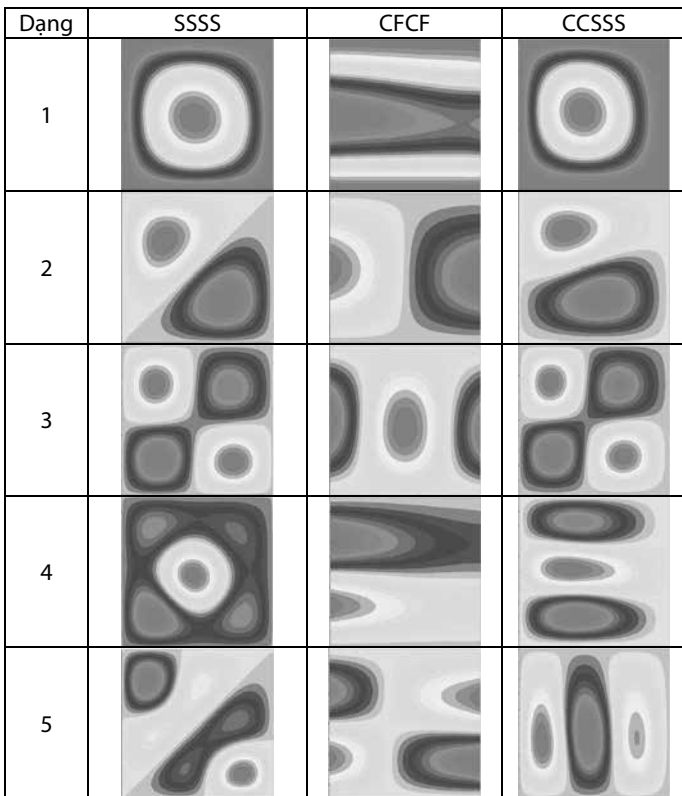
Xét tấm có chiều dày biến đổi với tham số $\beta = 0.9$, khảo sát đối với sáu điều kiện biên khác nhau, kết quả tính toán năm tần số đầu tiên phụ thuộc các điều kiện biên này được chỉ ra như trên bảng 3, năm dạng dao động riêng đầu tiên với các điều kiện biên khác nhau được vẽ như trên hình 3. Một số nhận xét có thể rút ra như sau:

- Với dầm tấm ngàm 1 cạnh (CFFF) thì tần số có giá trị bé nhất, với tấm ngàm bốn cạnh thì tần số dao động riêng của tấm là lớn nhất, điều này do tấm bị hạn chế càng nhiều cạnh thì kết cấu càng trở lên cứng hơn.

- Ngoài ra, điều kiện biên còn ảnh hưởng tới các dạng dao động riêng đầu tiên, điều này thể hiện rõ rệt như trong hình 3.

Bảng 3. Năm tần số dao động riêng đầu tiên của tấm phụ thuộc điều kiện biên

Biên	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
SSSS	1.329	2.418	2.449	4.051	4.924
CFFF	0.470	0.933	1.065	1.427	1.810
CFCF	1.182	1.514	2.373	2.599	2.922
CSCS	1.539	2.553	2.911	3.788	4.130
CCSS	1.513	2.668	2.752	3.761	4.372
CCCC	1.719	2.969	3.053	4.110	4.784



Hình 3. Năm tần số dao động riêng đầu tiên của tấm phụ thuộc điều kiện biên

c. Ảnh hưởng của tham số độ cứng nền đàn hồi

Tấm tựa đơn các cạnh, tham số $\beta = 0.9$, tăng dần giá trị của các tham số độ cứng, các giá trị của năm tần số dao động riêng của tấm được cho như trong bảng 4, có thể thấy rằng khi giá trị tham số độ cứng của nền đàn hồi càng lớn, tấm càng trở lên cứng hơn, do vậy tần số dao động riêng của tấm tăng lên..

Bảng 4. Năm tần số dao động riêng đầu tiên của tấm phụ thuộc tham số độ cứng nền đàn hồi, SSSS

(R_w^*, R_s^*)	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
(0,0)	0.686	1.621	1.672	2.596	3.149
(10,0)	0.691	1.623	1.674	2.597	3.164
(100,0)	0.730	1.641	1.691	2.608	3.173
(0,10)	0.773	1.717	1.766	2.691	3.263
(0,100)	1.306	2.405	2.437	3.427	4.043
(100,100)	1.329	2.418	2.449	4.051	4.924

5. KẾT LUẬN

Dựa trên phương pháp phần tử hữu hạn, bài báo nghiên cứu dao động riêng của tấm có chiều dày biến đổi tựa trên nền đàn hồi hai hệ số, phần tử chữ nhật 4 điểm nút với mỗi nút năm bậc tự do đã được sử dụng trong bài báo này, tấm có quy luật biến đổi của chiều dày theo hàm phi tuyến. Một số kết luận chính được rút ra như sau:

- + Chiều dày tấm thay đổi, giá trị của tần số dao động riêng và các dạng dao động riêng của tấm cũng thay đổi.
- + Điều kiện biên ảnh hưởng tới cả giá trị tần số dao động riêng cũng như các dạng dao động riêng của tấm.
- + Nền đàn hồi có độ cứng càng lớn, tấm càng cứng, tần số dao động riêng của tấm càng lớn.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đoàn Hồng Đức; Phạm Minh Phúc; Đỗ Văn Thơm. Tính toán ổn định của tấm nano chiều dày biến đổi có vết nứt và có xét đến ảnh hưởng của hiệu ứng flexo. Tạp chí Khoa học Giao thông vận tải, 5, 2022, 470-485.

[2] Nguyễn Đình Đức; Phạm Minh Phúc; Đoàn Hồng Đức; Đỗ Văn Thơm. Phân tích dao động tự do của tấm chiều thay đổi có nứt dựa trên lý thuyết Phase-Field và lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Hội nghị Khoa học toàn quốc Cơ học Vật rắn lần thứ XIV 1, 2018 478 (2018).

[3] E. Efraim; M. Eisenberger. Exact vibration analysis of variable thickness thick annular isotropic and FGM plates. Journal of Sound and Vibration, 299, 2007, 720-738.

[4] M. Baccocchi; Moshe Eisenberger; Nicholas Fantuzzi; Francesco Tornabene; Erasmo Viola. Vibration analysis of variable thickness plates and shells by the Generalized Differential Quadrature method. Composite Structures, 156, 2016, 218-237.

[5] V. Tajeddini; Abdolreza Ohadi; Mojtaba Sadighi. Three-dimensional free vibration of variable thickness thick circular and annular isotropic and functionally graded plates on Pasternak foundation. International Journal of Mechanical Sciences, 53, 2011, 300-308.

[6] M. M. Alipour; M. Shariyat; M. Shaban. A semi-analytical solution for free vibration of variable thickness two-directional-functionally graded plates on elastic foundations, International Journal of Mechanics and Materials in Design, 6, 2010, 293-304.

[7] M. Van Phung; D. T. Nguyen; L. T. Doan; D. Van Nguyen and T. Van Duong. Numerical Investigation on Static Bending and Free Vibration Responses of Two-Layer Variable Thickness Plates with Shear Connectors. Iran. J. Sci. Technol. - Trans. Mech. Eng., vol. 46, no. 4, pp. 1047-1065, 2022.

[8] V. M. Phung. Static Bending Analysis of Symmetrical Three-Layer Fgm Beam With Shear Connectors Under Static Load. J. Sci. Tech., vol. 15, no. 3, pp. 68-78, 2020.

[9] D. Nguyen Thai; P. Van Minh; C. Phan Hoang; T. Ta Duc; N. Nguyen Thi Cam and D. Nguyen Thi. Bending of Symmetric Sandwich FGM Beams with Shear Connectors. Math. Probl. Eng., vol. 2021, 2021.

[10] L. M. Thai; D. T. Luat; T. Van Ke and M. Phung Van. Finite-Element Modeling for Static Bending Analysis of Rotating Two-Layer FGM Beams with Shear Connectors Resting on Imperfect Elastic Foundations. J. Aerosp. Eng., vol. 36, no. 3, 2023.

[11] Baferani AH; Saidi AR and Ehteshami H. Accurate solution for free vibration analysis of functionally graded thick rectangular plates resting on elastic foundation. Composite Structures, 93, 2011, 1842-1853.