

Phân tích dao động tự do tấm áp từ điện đồng nhất bằng phương pháp không lưới di chuyển Kriging

Free vibration analysis for homogenous magneto-electro-elastic plates using the moving Kriging meshfree method

> NGUYỄN THỊ BÍCH LIỄU

GV Khoa Xây dựng, Trường Đại học Sư phạm kỹ thuật TP.HCM
Email: lieuntb@hcmute.edu.vn

TÓM TẮT

Phân tích dao động tự do của tấm đồng nhất chịu tương tác từ điện cơ (MEE) dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất hiệu chỉnh (RFSDT) sử dụng phương pháp không lưới với hàm nội suy di chuyển Kriging (MK) được đưa ra trong bài báo này. Lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất hiệu chỉnh chỉ bao gồm bốn biến và giảm một biến so với lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất cổ điển (FSDT). Vật liệu MEE, kết hợp giữa các hiệu ứng áp điện và áp từ, được tạo thành từ vật liệu BaTiO₃ và CoFe₂O₄ là đối tượng được nghiên cứu trong bài báo này. Các thế năng từ và điện tuân theo phương trình Maxwell được giả định là sự kết hợp giữa các hàm cosin và thay đổi tuyến tính dọc theo chiều dày của tấm. Các phương trình chuyển động của các tấm MEE thu được bằng cách sử dụng nguyên lý công ảo mở rộng. Các phương trình này được giải để đạt được tần số tự nhiên của các tấm MEE bằng cách sử dụng phương pháp không lưới di chuyển Kriging. Một số ví dụ số được kiểm tra để đánh giá ảnh hưởng của tham số hình học lên tần số dao động tự nhiên của các tấm MEE.

Từ khóa: Tấm chịu tương tác từ điện cơ; phương pháp không lưới di chuyển Kriging; dao động tự do; lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất hiệu chỉnh.

ABSTRACT

This paper presents the free vibration analysis of homogeneous magneto-electro-elastic (MEE) plates using a refined first-order shear deformation theory (RFSDT) and the moving Kriging meshfree method. The RFSDT, which includes only four variables, one less than the classical first-order shear deformation theory, streamlines the analysis. The MEE materials, which exhibit coupled piezoelectric and piezomagnetic effects, are composed of BaTiO₃ and CoFe₂O₄. The magnetic and electric potentials, which satisfy Maxwell's equations, are assumed to vary along the plate thickness in a combination of cosine and linear patterns. The coupled governing equations of motion for the MEE plates are derived using the principle of extended virtual displacement. These equations are then solved to determine the natural frequencies of the MEE plates using the moving Kriging meshfree method. Several numerical examples are analyzed to assess the impact of geometrical parameters on the natural frequencies of the MEE plates.

Keywords: Magneto-electric-elastic functionally graded plates; moving Kriging meshfree method; free vibration; refined first-order shear deformation theory.

1. GIỚI THIỆU

Trong những năm gần đây, nhờ vào khả năng thay đổi của các trường cơ học, điện và từ, vật liệu chịu tương tác cơ điện từ hay còn gọi là vật liệu đàn hồi từ điện (MEE) đã được sử dụng rộng rãi trong sản xuất cảm biến và thiết bị chấp hành trong các hệ thống điều khiển. Vật liệu MEE được tạo ra bằng cách kết hợp các pha áp điện và áp từ từ vật liệu titanate bari (BaTiO₃) [1] và ferrite cobalt (CoFe₂O₄) [2,3]. Nó phù hợp cho các cấu trúc thông minh nhờ khả năng chuyển đổi năng lượng giữa các dạng cơ, điện hoặc từ thành một dạng khác.

Nghiên cứu về các cấu trúc tấm MEE đã được nhiều nhà khoa học quan tâm. Liu và cộng sự [4] và [5] lần lượt phân tích về dao động tự do và ứng xử uốn của tấm MEE đẳng hướng dựa trên lý thuyết tấm cổ điển (CPT). Trong các công trình khác, bằng cách sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT), Shooshtari và Razavi [6] đã nghiên cứu dao động tự do của các tấm chữ nhật MEE nhiều lớp dưới nền Pasternak. Tương tự như lý thuyết này, phân tích uốn phi tuyến của các tấm MEE đã được giới thiệu bởi Chen và Wu [7], Milazzo [8], và Alaimo và cộng sự [9]. Mặt khác, Vinyas và Kattimani [10] đã nghiên cứu ứng xử dao động của các tấm MEE trong môi trường nhiệt ẩm bằng cách sử dụng lý thuyết biến

dạng cắt bậc cao (HSDT). Tương tự với mô hình này, dao động tự do của các tấm MEE được gia cường bằng ống nano carbon đã được trình bày trong [11,12]. Zheng và cộng sự [13] và Xu và cộng sự [14] lần lượt khảo sát các bài toán uốn và dao động phi tuyến của các tấm MEE. Ngoài ra, Chen và cộng sự [15] đã trình bày phân tích dao động tự do của các tấm MEE phân lớp chức năng FG (FG-MEE) bằng cách sử dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều. Bằng cách sử dụng lý thuyết này, Zhang và cộng sự [16] đã phân tích các ứng xử tĩnh và động của các tấm MEE. Phân tích tĩnh về ứng xử uốn của các tấm sandwich FG-MEE cũng đã được nghiên cứu bởi Pan và cộng sự [17].

Như chúng ta đã biết, việc giải quyết các bài toán tấm sử dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều không đơn giản nếu hình học phức tạp, chi phí tính toán lớn và các yếu tố bất lợi khác. Vì vậy, sự phát triển và sử dụng các phương pháp số luôn được các nhà khoa học quan tâm. Có một số phương pháp phổ biến như phân tích đẳng hình học (IGA), phương pháp phần tử hữu hạn (FEM), phương pháp không lưới (Meshfree),... Trong số đó, các phương pháp không lưới đã chứng minh sức mạnh của chúng trong việc giải quyết nhiều bài toán khác nhau. Bởi vì chúng liên quan đến việc phân bố nút tùy ý và tính linh hoạt trong việc đặt các nút tại các vị trí ngẫu nhiên. Điều này có nghĩa là các hàm xấp xỉ của phương pháp không lưới chỉ sử dụng dữ liệu nút trong hệ tọa độ Descartes toàn cục và kết quả chuyển vị cũng như ứng suất được tính toán ngay lập tức tại các điểm tùy ý trong không gian vật lý. Điều này khác với IGA/FEM, nơi mà việc tính toán được thực hiện trong hệ tọa độ tự nhiên. Ngoài ra, khi sử dụng phương pháp không lưới với hàm nội suy di chuyển Kriging (MK), việc thực thi các điều kiện biên cần thiết để dàng thực hiện tương tự như trong FEM. Vì hàm dạng tích phân di chuyển Kriging thỏa mãn tính chất hàm delta Kronecker, nó mang lại lợi ích lớn trong việc thực thi các điều kiện biên thiết yếu mà không cần bất kỳ kỹ thuật đặc biệt nào khác như các phương pháp phạt hoặc hệ số Lagrange của các phương pháp không lưới khác.

Gu [18] đã giới thiệu đầu tiên về hàm nội suy di chuyển Kriging (MK) và đã thành công trong việc chứng minh tính hữu ích của các hàm nội suy MK trong việc giải quyết các bài toán giá trị biên hai chiều. Phương pháp không lưới MK đã được sử dụng hiệu quả cho nhiều bài toán khác nhau. Thai và cộng sự [19-20] đã sử dụng phương pháp không lưới cải tiến dựa trên hàm nội suy MK cục bộ để phân tích tĩnh, động và ổn định của các tấm đồng nhất và sandwich phân lớp chức năng (FG) dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) và lý thuyết tấm cải tiến hai biến, tương ứng. Dựa trên phương pháp tương tự, Thai và cộng sự [21-22] cũng đã nghiên cứu mô hình phụ thuộc kích thước để phân tích các tấm nano composite gia cường bằng ống nano carbon phân lớp chức năng và các tấm vi mô đồng nhất và sandwich phân lớp chức năng, tương ứng. Nguyễn và cộng sự [23] đã trình bày ứng xử uốn phi tuyến tĩnh và dao động tự do của các tấm FGM bằng cách sử dụng phương pháp không lưới MK cải tiến dựa trên lý thuyết tấm cải tiến. Mặt khác, phương pháp không lưới MK dạng yếu cục bộ đã được Lam và cộng sự [24] thiết lập để kiểm tra cho những cấu trúc hai chiều. Các bài báo liên quan mở rộng thêm có thể được tìm thấy trong [25-27]. Như chúng ta thấy trong các tài liệu trên, chưa có nghiên cứu nào về dao động tự do của các tấm MEE đồng nhất sử dụng phương pháp không lưới MK. Với những động lực đó, tác giả sử dụng phương pháp không lưới MK và lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất cải tiến chứa bốn biến để phân tích dao động tự do cho tấm MEE. Có thể thấy rằng bài báo này là một chủ đề mới và chưa được công bố. Ảnh hưởng của các tham số hình học lên tần số tự nhiên của tấm MEE đồng nhất được trình bày và thảo luận.

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

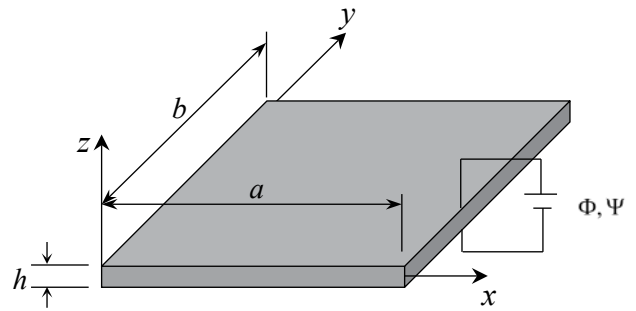
2.1. Đặc tính vật liệu tấm MEE đồng nhất

Một tấm vật liệu MEE đồng nhất (chiều dài a , chiều rộng b và chiều dày h) chịu tác dụng hàm điện $\Phi(x, y, z, t)$ và hàm từ trường

$\Psi(x, y, z, t)$ được xem xét như Hình 1. Vật liệu MEE được làm từ $BaTi_2O_3$ và $CoFe_2O_4$. Bảng 1 đưa ra đặc tính vật liệu của tấm vật liệu MEE đồng nhất.

Bảng 1. Đặc tính vật liệu của $BaTiO_3-CoFe_2O_4$.

Đàn hồi (GPa)	$c_{11} = c_{22} = 226; c_{12} = 125; c_{13} = 124;$ $c_{44} = c_{55} = 44.2; c_{66} = 50.5$
Áp điện (C/m ²)	$e_{31} = e_{32} = -2.2; e_{33} = 9.3; e_{15} = 5.8$
Điện môi (10 ⁻⁹ C/V.m)	$k_{11} = k_{22} = 5.64; k_{33} = 6.35$
Áp điện từ (N/A.m)	$q_{15} = q_{24} = 275; q_{31} = q_{32} = 290.1; q_{33} = 34$
Điện từ (10 ⁻¹² Ns/VC)	$d_{11} = d_{22} = 5.367; d_{33} = 2737.5$
Từ tính (10 ⁻⁶ Ns ² /C ²)	$\mu_{11} = \mu_{22} = -297; \mu_{33} = 83.5$



Hình 1. Hình học của tấm chữ nhật MEE.

2.2. Công thức lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất hiệu chỉnh (RFSDT)

Trường chuyển vị của tấm MEE tại một điểm bất kỳ theo FSDT cải tiến được cho bởi công thức

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \bar{u}(x, y, z) \\ \bar{v}(x, y, z) \\ \bar{w}(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \\ w^b(x, y) + w^s(x, y) \end{Bmatrix} \dots \tag{1}$$

$$-z \begin{Bmatrix} w_{,x}^b(x, y) \\ w_{,y}^b(x, y) \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{u}^1(x, y) + z \mathbf{u}^2(x, y)$$

Trong đó u, v là chuyển vị trong mặt phẳng theo phương x và y tương ứng, w^b và w^s là chuyển vị uốn và chuyển vị cắt tương ứng. Theo công thức (1), ten xơ biến dạng tuyến tính có công thức sau

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^b \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^{b1} + z \boldsymbol{\varepsilon}^{b2} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^s \end{Bmatrix} \tag{2}$$

Trong đó

$$\boldsymbol{\varepsilon}^b = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}^{b1} = \begin{Bmatrix} u_{,x} \\ v_{,y} \\ u_{,y} + v_{,x} \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}^{b2} = - \begin{Bmatrix} w_{,xx}^b \\ w_{,yy}^b \\ 2w_{,xy}^b \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}^s = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\varepsilon}^s = \begin{Bmatrix} w_{,x}^s \\ w_{,y}^s \end{Bmatrix} \tag{3}$$

Trong nghiên cứu này, các hàm thế năng điện và từ được chọn để thỏa mãn phương trình Maxwell và được đưa ra trong [28]

$$\Phi(x, y, z) = g(z)\varphi(x, y) + \frac{2z}{h}\varphi_0; \tag{4}$$

$$\Psi(x, y, z) = g(z)\psi(x, y) + \frac{2z}{h}\psi_0$$

trong đó Φ và Ψ là hàm thế năng điện và từ, tương ứng; φ_0 và ψ_0 là điện áp và thế năng từ ban đầu; $g(z) = -\cos(\pi z / h)$.

Trường điện (**E**) và trường từ (**H**) theo phương trình (4) có thể xác định bởi công thức

$$\mathbf{E} = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Phi_{,x} \\ \Phi_{,y} \\ \Phi_{,z} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} g(z)\varphi_{,x} \\ g(z)\varphi_{,y} \\ g'(z)\varphi + 2\varphi_0/h \end{Bmatrix}; \tag{5}$$

$$\mathbf{H} = \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \Psi_{,x} \\ \Psi_{,y} \\ \Psi_{,z} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} g(z)\psi_{,x} \\ g(z)\psi_{,y} \\ g'(z)\psi + 2\psi_0/h \end{Bmatrix}$$

2.3. Phương trình chủ đạo

Cho phân tích tấm MEE, các phương trình mô tả ứng suất biến dạng cho tương tác 3 trường được trình bày bởi

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{c}_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \dots$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \tilde{e}_{15} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{e}_{31} \\ \tilde{e}_{31} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{q}_{31} \\ \tilde{q}_{31} \\ 0 \\ \tilde{q}_{15} \\ \tilde{q}_{15} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{e}_{15} \\ \tilde{e}_{31} & \tilde{e}_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{k}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{k}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{d}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{d}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \tilde{q}_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \tilde{q}_{15} \\ \tilde{q}_{31} & \tilde{q}_{31} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{d}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{d}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{m}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \tilde{m}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{m}_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{Bmatrix}$$

trong đó $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ là các thành phần ứng suất; D_x, D_y, D_z là chuyển vị điện và B_x, B_y, B_z là cảm ứng từ; \tilde{c}_{ij} là các hệ số giảm đàn hồi; \tilde{e}_{ij} là các hệ số giảm áp điện; \tilde{q}_{ij} là các hằng số từ điện; \tilde{k}_{ij} là các hệ số điện môi; \tilde{d}_{ij} và \tilde{m}_{ij} là các hệ số tương tác điện từ và hệ số độ dẫn từ, tương ứng. Đặc tính vật liệu giảm sử dụng trong phương trình (6) được cho bởi công thức

$$\tilde{c}_{11} = c_{11} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}; \tilde{c}_{12} = c_{12} - \frac{c_{13}^2}{c_{33}}; \tilde{c}_{66} = c_{66}; \tilde{c}_{55} = c_{55}; \tilde{c}_{44} = c_{44};$$

$$\tilde{e}_{31} = e_{31} - \frac{e_{33}c_{13}}{c_{33}}; \tilde{e}_{15} = e_{15}; \tilde{q}_{31} = q_{31} - \frac{q_{33}c_{13}}{c_{33}}; \tilde{q}_{15} = q_{15};$$

$$\tilde{k}_{33} = k_{33} + \frac{e_{33}^2}{c_{33}}; \tilde{k}_{11} = k_{11}; \tilde{d}_{33} = d_{33} + \frac{q_{33}e_{33}}{c_{33}}; \tilde{d}_{11} = d_{11};$$

$$\tilde{m}_{33} = \tilde{m}_{33} + \frac{q_{33}^2}{c_{33}}; \tilde{m}_{11} = m_{11}$$

Để dễ cho việc tính toán số, phương trình (6) có thể được viết dưới dạng ma trận như sau

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^b \\ \boldsymbol{\sigma}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{uu}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{uu}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^b \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{u\varphi}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{u\varphi}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}^b \\ \mathbf{E}^s \end{Bmatrix} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{u\psi}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{u\psi}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{H}^b \\ \mathbf{H}^s \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{D}^b \\ \mathbf{D}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{u\varphi}^{bT} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{u\varphi}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^b \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\varphi\varphi}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\varphi\varphi}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}^b \\ \mathbf{E}^s \end{Bmatrix} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\varphi\psi}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\varphi\psi}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{H}^b \\ \mathbf{H}^s \end{Bmatrix};$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{B}^b \\ \mathbf{B}^s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{u\psi}^{bT} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{u\psi}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^b \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\psi\psi}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\psi\psi}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{E}^b \\ \mathbf{E}^s \end{Bmatrix} + \dots$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_{\psi\psi}^b & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\psi\psi}^s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{H}^b \\ \mathbf{H}^s \end{Bmatrix}$$

trong đó

$$\boldsymbol{\sigma}^b = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}; \boldsymbol{\sigma}^s = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}; \mathbf{D}^b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ D_z \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{D}^b = \begin{Bmatrix} D_x \\ D_y \end{Bmatrix}; \mathbf{B}^b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{Bmatrix}; \mathbf{B}^s = \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \end{Bmatrix};$$

$$\mathbf{E}^b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_z \end{Bmatrix}; \mathbf{E}^s = \begin{Bmatrix} E_x \\ E_y \end{Bmatrix}; \mathbf{H}^b = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ H_z \end{Bmatrix}; \mathbf{H}^s = \begin{Bmatrix} H_x \\ H_y \end{Bmatrix};$$

với

$$\mathbf{C}_{uu}^b = \begin{bmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & 0 \\ \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{c}_{66} \end{bmatrix}; \mathbf{C}_{u\varphi}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{e}_{31} \\ 0 & 0 & \tilde{e}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{C}_{u\psi}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tilde{q}_{31} \\ 0 & 0 & \tilde{q}_{31} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{uu}^s &= \begin{bmatrix} \tilde{c}_{44} & 0 \\ 0 & \tilde{c}_{55} \end{bmatrix}; \mathbf{C}_{u\varphi}^s = \begin{bmatrix} \tilde{e}_{15} & 0 \\ 0 & \tilde{e}_{15} \end{bmatrix}; \mathbf{C}_{u\psi}^s = \begin{bmatrix} \tilde{q}_{15} & 0 \\ 0 & \tilde{q}_{15} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C}_{\varphi\varphi}^b &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{k}_{33} \end{bmatrix}; \mathbf{C}_{\varphi\psi}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{d}_{33} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C}_{\psi\psi}^b &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{m}_{33} \end{bmatrix}; \\ \mathbf{C}_{\varphi\varphi}^s &= \begin{bmatrix} \tilde{k}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{k}_{22} \end{bmatrix}; \mathbf{C}_{\varphi\psi}^s = \begin{bmatrix} \tilde{d}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{d}_{22} \end{bmatrix}; \mathbf{C}_{\psi\psi}^s = \begin{bmatrix} \tilde{m}_{11} & 0 \\ 0 & \tilde{m}_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (10)$$

2.4. Phương trình vi phân

Theo nguyên lý Hamilton, phương trình chủ đạo của tấm MEE được cho bởi

$$\int_0^t (\delta\Pi + \delta K - \delta W) dt = 0 \quad (11)$$

Trong đó $\delta\Pi$, δK và δW là năng lượng biến dạng ảo, động năng ảo và công ảo được thực hiện bởi điện áp và thế năng từ bên ngoài, tương ứng

Năng lượng biến dạng ảo của tấm MEE được định nghĩa

$$\delta\Pi = \int_V \left(\begin{aligned} &\delta(\boldsymbol{\varepsilon}^b)^T \boldsymbol{\sigma}^b + \delta\boldsymbol{\gamma}^T \boldsymbol{\sigma}^s - \delta(\mathbf{E}^b)^T \mathbf{D}^b - \dots \\ &\delta(\mathbf{E}^s)^T \mathbf{D}^s - \delta(\mathbf{H}^b)^T \mathbf{B}^b - \delta(\mathbf{H}^s)^T \mathbf{B}^s \end{aligned} \right) dV \quad (12)$$

Thay thế phương trình (8) vào phương trình (12), năng lượng biến dạng ảo được xác định bởi

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^b)^T \left[\bar{\mathbf{D}}_{uu}^b \boldsymbol{\varepsilon}^b - \bar{\mathbf{D}}_{u\varphi}^b \bar{\mathbf{E}}^b - \bar{\mathbf{D}}_{u\psi}^b \bar{\mathbf{H}}^b \right] d\Omega + \dots \\ &\int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^s)^T \left[\bar{\mathbf{D}}_{uu}^s \boldsymbol{\varepsilon}^s - \bar{\mathbf{D}}_{u\varphi}^s \bar{\mathbf{E}}^s - \bar{\mathbf{D}}_{u\psi}^s \bar{\mathbf{H}}^s \right] d\Omega - \dots \\ &\int_{\Omega} \delta(\bar{\mathbf{E}}^b)^T \left[(\bar{\mathbf{D}}_{u\varphi}^b)^T \boldsymbol{\varepsilon}^b + \bar{\mathbf{D}}_{\varphi\varphi}^b \bar{\mathbf{E}}^b + \bar{\mathbf{D}}_{\varphi\psi}^b \bar{\mathbf{H}}^b \right] d\Omega - \dots \\ &\int_{\Omega} \delta(\bar{\mathbf{E}}^s)^T \left[(\bar{\mathbf{D}}_{u\varphi}^s)^T \boldsymbol{\varepsilon}^s + \bar{\mathbf{D}}_{\varphi\varphi}^s \bar{\mathbf{E}}^s + \bar{\mathbf{D}}_{\varphi\psi}^s \bar{\mathbf{H}}^s \right] d\Omega - \dots \\ &\int_{\Omega} \delta(\bar{\mathbf{H}}^b)^T \left[(\bar{\mathbf{D}}_{u\psi}^b)^T \boldsymbol{\varepsilon}^b + (\bar{\mathbf{D}}_{\psi\psi}^b)^T \bar{\mathbf{E}}^b + \bar{\mathbf{D}}_{\psi\psi}^b \bar{\mathbf{H}}^b \right] d\Omega - \dots \\ &\int_{\Omega} \delta(\bar{\mathbf{H}}^s)^T \left[(\bar{\mathbf{D}}_{u\psi}^s)^T \boldsymbol{\varepsilon}^s + (\bar{\mathbf{D}}_{\psi\psi}^s)^T \bar{\mathbf{E}}^s + \bar{\mathbf{D}}_{\psi\psi}^s \bar{\mathbf{H}}^s \right] d\Omega \end{aligned} \quad (13)$$

trong đó

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^b = \{\boldsymbol{\varepsilon}^{b1} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{b2}\}^T; \quad \bar{\mathbf{E}}^b = \{0 \quad 0 \quad \varphi\}^T; \quad \bar{\mathbf{E}}^s = \{\varphi_{,x} \quad \varphi_{,y}\}^T;$$

$$\bar{\mathbf{H}}^b = \{0 \quad 0 \quad \Psi\}^T; \quad \bar{\mathbf{H}}^s = \{\psi_{,x} \quad \psi_{,y}\}^T; \quad \bar{\mathbf{D}}_{uu}^b = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^b & \mathbf{B}^b \\ \mathbf{B}^b & \mathbf{D}^b \end{bmatrix};$$

$$(\mathbf{A}^b, \mathbf{B}^b, \mathbf{D}^b) = \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2) \mathbf{C}_{uu}^b dz; \quad \bar{\mathbf{D}}_{uu}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_{uu}^s dz;$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{u\varphi}^b = \{\hat{\mathbf{C}}_{u\varphi}^{b1} \quad \hat{\mathbf{C}}_{u\varphi}^{b2}\};$$

$$(\hat{\mathbf{C}}_{u\varphi}^{b1}, \hat{\mathbf{C}}_{u\varphi}^{b2}) = -\int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_{u\varphi}^b(1, z) g'(z) dz; \quad \bar{\mathbf{D}}_{u\varphi}^s = -\int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_{u\varphi}^s g(z) dz;$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{u\psi}^b = \{\hat{\mathbf{C}}_{u\psi}^{b1} \quad \hat{\mathbf{C}}_{u\psi}^{b2}\};$$

$$(\hat{\mathbf{C}}_{u\psi}^{b1}, \hat{\mathbf{C}}_{u\psi}^{b2}) = -\int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_{u\psi}^b(1, z) g'(z) dz; \quad \bar{\mathbf{D}}_{u\psi}^s = -\int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_{u\psi}^s g(z) dz;$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{D}}_{\varphi\varphi}^b &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_{\varphi\varphi}^b g'^2(z) dz; \quad \bar{\mathbf{D}}_{\varphi\varphi}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_{\varphi\varphi}^s g^2(z) dz; \\ \bar{\mathbf{D}}_{\varphi\psi}^b &= \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_{\varphi\psi}^b g'^2(z) dz; \end{aligned} \quad (14)$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{\psi\psi}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_{\psi\psi}^s g^2(z) dz; \quad \bar{\mathbf{D}}_{\psi\psi}^b = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_{\psi\psi}^b g'^2(z) dz;$$

$$\bar{\mathbf{D}}_{\psi\psi}^s = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{C}_{\psi\psi}^s g^2(z) dz$$

Động năng ảo được cho bởi công thức

$$\delta K = \int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega \quad (15)$$

trong đó

$$\bar{\mathbf{u}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{m} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix}; \quad \mathbf{I}_m = \begin{bmatrix} I_1 & I_2 \\ I_2 & I_3 \end{bmatrix}; \quad (16)$$

$$(I_1, I_2, I_3) = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) (1, z, z^2) dz$$

Tấm MEE chịu một tải trọng ban đầu bao gồm hiệu điện thế và thế năng từ, do đó công ảo được tính như sau [28,29]

$$\delta W = h \int_{\Omega} \delta(\mathbf{B}^g)^T \mathbf{N}_0 \mathbf{B}^g d\Omega \quad (17)$$

trong đó

$$\mathbf{B}^g = \begin{Bmatrix} w_{0,x} \\ w_{0,y} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{N}_0 = \begin{bmatrix} N_x^0 & 0 \\ 0 & N_y^0 \end{bmatrix}; \quad (18)$$

$$N_x^0 = N_x^e + N_x^m; \quad N_y^0 = N_y^e + N_y^m;$$

$$N_x^e = N_y^e = -2\tilde{e}_{31}\varphi_0; \quad N_x^m = N_y^m = -2\tilde{q}_{31}\psi_0$$

Thay các phương trình (15), (13) và (17) vào phương trình (11), dạng yếu của tấm MEE được viết lại như sau

$$\begin{aligned} \delta\Pi &= \int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^b)^T \left[\bar{\mathbf{D}}_{uu}^b \boldsymbol{\varepsilon}^b - \bar{\mathbf{D}}_{u\varphi}^b \bar{\mathbf{E}}^b - \bar{\mathbf{D}}_{u\psi}^b \bar{\mathbf{H}}^b \right] d\Omega + \dots \\ &\int_{\Omega} \delta(\boldsymbol{\varepsilon}^s)^T \left[\bar{\mathbf{D}}_{uu}^s \boldsymbol{\varepsilon}^s - \bar{\mathbf{D}}_{u\varphi}^s \bar{\mathbf{E}}^s - \bar{\mathbf{D}}_{u\psi}^s \bar{\mathbf{H}}^s \right] d\Omega - \dots \\ &\int_{\Omega} \delta(\bar{\mathbf{E}}^b)^T \left[(\bar{\mathbf{D}}_{u\varphi}^b)^T \boldsymbol{\varepsilon}^b + \bar{\mathbf{D}}_{\varphi\varphi}^b \bar{\mathbf{E}}^b + \bar{\mathbf{D}}_{\varphi\psi}^b \bar{\mathbf{H}}^b \right] d\Omega - \dots \\ &\int_{\Omega} \delta(\bar{\mathbf{E}}^s)^T \left[(\bar{\mathbf{D}}_{u\varphi}^s)^T \boldsymbol{\varepsilon}^s + \bar{\mathbf{D}}_{\varphi\varphi}^s \bar{\mathbf{E}}^s - \bar{\mathbf{D}}_{\varphi\psi}^s \bar{\mathbf{H}}^s \right] d\Omega - \dots \\ &\int_{\Omega} \delta(\bar{\mathbf{H}}^b)^T \left[(\bar{\mathbf{D}}_{u\psi}^b)^T \boldsymbol{\varepsilon}^b + (\bar{\mathbf{D}}_{\psi\psi}^b)^T \bar{\mathbf{E}}^b + \bar{\mathbf{D}}_{\psi\psi}^b \bar{\mathbf{H}}^b \right] d\Omega - \dots \\ &\int_{\Omega} \delta(\bar{\mathbf{H}}^s)^T \left[(\bar{\mathbf{D}}_{u\psi}^s)^T \boldsymbol{\varepsilon}^s + (\bar{\mathbf{D}}_{\psi\psi}^s)^T \bar{\mathbf{E}}^s + \bar{\mathbf{D}}_{\psi\psi}^s \bar{\mathbf{H}}^s \right] d\Omega - \dots \\ &h \int_{\Omega} \delta(\mathbf{B}^g)^T \mathbf{N}_0 \mathbf{B}^g d\Omega + \int_{\Omega} \delta \bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{m} \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

2.5. Công thức của hàm nội suy di chuyển Kriging

Dựa trên hàm dạng nội suy di chuyển Kriging [18], trường chuyển vị trong phương trình (1) có thể được suy ra như sau

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^N N_I(x, y) \mathbf{I}_{6 \times 6} \mathbf{d}_I \quad (20)$$

Trong đó N là tổng số nút trên miền bài toán; N_I là hàm dạng nội suy di chuyển Kriging; $\mathbf{I}_{6 \times 6}$ là ma trận đơn vị và

$\mathbf{d}_I = \{u_I \quad v_I \quad w_I^b \quad w_I^s \quad \varphi_I \quad \psi_I\}^T$ là bậc tự do (DOFs) tại một nút.

Thành phần uốn và cắt được viết lại bằng cách thay thế phương trình (20) vào phương trình (2) như sau

$$\boldsymbol{\varepsilon}^b = \{\boldsymbol{\varepsilon}^{b1} \quad \boldsymbol{\varepsilon}^{b2}\}^T = \sum_{I=1}^N \{\mathbf{B}_I^{b1} \quad \mathbf{B}_I^{b2}\}^T \mathbf{d}_I = \sum_{I=1}^N \bar{\mathbf{B}}_I^b \mathbf{d}_I; \quad (21)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^s = \sum_{I=1}^N \bar{\mathbf{B}}_I^s \mathbf{d}_I$$

Trong đó

$$\mathbf{B}_I^{b1} = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{I,y} & N_{I,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_I^{b2} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{I,xx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,yy} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2N_{I,xy} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (22)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_I^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{I,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{I,y} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Thay thế phương trình (20) vào phương trình (5), trường điện và trường từ được viết lại như sau

$$\mathbf{E}^b = \sum_{I=1}^N \bar{\mathbf{B}}_{\varphi I}^b \mathbf{d}_I; \quad \mathbf{E}^s = \sum_{I=1}^N \bar{\mathbf{B}}_{\varphi I}^s \mathbf{d}_I; \quad (23)$$

$$\mathbf{H}^b = \sum_{I=1}^N \bar{\mathbf{B}}_{\psi I}^b \mathbf{d}_I; \quad \mathbf{H}^s = \sum_{I=1}^N \bar{\mathbf{B}}_{\psi I}^s \mathbf{d}_I$$

Trong đó

$$\bar{\mathbf{B}}_{\varphi I}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_I & 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{\psi I}^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_I \end{bmatrix}; \quad (24)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{\varphi I}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{I,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{I,y} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{\psi I}^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{I,x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -N_{I,y} \end{bmatrix}$$

Tương tự, thay thế phương trình (20) vào phương trình (1), trường chuyển vị được mô tả bởi

$$\bar{\mathbf{u}} = \{\mathbf{u}^1 \quad \mathbf{u}^2\}^T = \sum_{I=1}^N \{\mathbf{M}_I^1 \quad \mathbf{M}_I^2\}^T \mathbf{d}_I = \sum_{I=1}^N \bar{\mathbf{M}}_I \mathbf{d}_I \quad (25)$$

Trong đó

$$\mathbf{M}_I^1 = \begin{bmatrix} N_I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_I & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_I & N_I & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (26)$$

$$\mathbf{M}_I^2 = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ma trận \mathbf{B}^g được diễn tả bằng cách thay thế phương trình (20) vào phương trình (17) như sau

$$\mathbf{B}^g = \sum_{I=1}^N \bar{\mathbf{B}}_I^g \mathbf{d}_I \quad (27)$$

Trong đó

$$\bar{\mathbf{B}}_I^g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{I,x} & N_{I,x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,y} & N_{I,y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Cuối cùng phương trình chủ đạo cho tấm MEE được suy ra bằng cách đưa các thành phần tương ứng vào phương trình (19) như sau

$$\left((\mathbf{K} - \mathbf{K}_g) - \omega^2 \mathbf{M} \right) \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0} \quad (29)$$

Trong đó \mathbf{K} , \mathbf{M} và \mathbf{K}_g là ma trận độ cứng, ma trận khối lượng và ma trận hình học toàn cục, tương ứng, và

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \bar{\mathbf{D}}_{uu}^b \bar{\mathbf{B}}^b d\Omega - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \bar{\mathbf{D}}_{ue}^b \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega - \dots$$

$$\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \bar{\mathbf{D}}_{um}^b \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega + \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \bar{\mathbf{D}}_{uu}^s \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega - \dots$$

$$\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \bar{\mathbf{D}}_{ue}^s \bar{\mathbf{B}}^b d\Omega - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \bar{\mathbf{D}}_{um}^s \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega - \dots$$

$$\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \bar{\mathbf{D}}_{eu}^b \bar{\mathbf{B}}^b d\Omega - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \bar{\mathbf{D}}_{eu}^b \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega - \dots$$

$$\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \bar{\mathbf{D}}_{em}^b \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \bar{\mathbf{D}}_{eu}^s \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega - \dots$$

$$\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \bar{\mathbf{D}}_{ee}^b \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \bar{\mathbf{D}}_{em}^b \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega - \dots$$

$$\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \bar{\mathbf{D}}_{mu}^b \bar{\mathbf{B}}^b d\Omega - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \bar{\mathbf{D}}_{me}^b \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega - \dots$$

$$\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^b)^T \bar{\mathbf{D}}_{mm}^b \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \bar{\mathbf{D}}_{me}^s \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega - \dots$$

$$\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \bar{\mathbf{D}}_{ms}^s \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^s)^T \bar{\mathbf{D}}_{ms}^s \bar{\mathbf{B}}^s d\Omega$$

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{M}}^T \mathbf{m} \bar{\mathbf{M}} d\Omega; \quad \mathbf{K}_g = \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{B}}^g)^T \mathbf{N}_0 \bar{\mathbf{B}}^g d\Omega \quad (30)$$

Trong đó ω là tần số dao động tự nhiên và $\bar{\mathbf{d}}$ là các hình dạng mode.

3. VÍ DỤ SỐ

Trong phần này, các kết quả thu được từ lời giải hiện tại được xác minh tính tin cậy thông qua một ví dụ số bằng cách so sánh với các kết quả đã được công bố trong các tài liệu tham khảo. Hãy xem xét một tấm vuông MEE đồng nhất với điều kiện biên hoàn toàn tựa đơn. Trong nghiên cứu này, điện áp ban đầu và thế năng từ tính được cho bởi $\varphi_0 = 0$ and $\psi_0 = 0$, tương ứng.

Tần số dao động không thứ nguyên được tính $\bar{\omega} = \omega a \sqrt{\rho / c_{11e}}$. Table 2 liệt kê bốn tần số không thứ nguyên đầu tiên của tấm vuông MEE đồng nhất với điều kiện biên hoàn toàn tựa đơn. Các kết quả thu được được so sánh với các kết quả do Ke và cộng sự [28] báo cáo sử dụng lý thuyết tấm Kirchhoff (3 DOFs), Sobhy và Mukahal [30] sử dụng HSDT cải tiến (4 DOFs), Gholami và cộng sự [31] sử dụng HSDT (5 DOFs) và Abazid [32] sử dụng FSDT cải tiến (4 DOFs). Có thể thấy rằng các kết quả hiện tại và kết quả so sánh có sự tương đồng rất tốt. Ngoài ra, có thể thấy rằng các kết quả thu được tương tự với kết quả trong [32] do sử dụng cùng một lý thuyết FSDT cải tiến. Từ những kết quả này, có thể thấy việc sử dụng phương pháp đề xuất rất là quan trọng và có hữu ích khi phân tích ứng xử động của các tấm MEE vì nó cho kết quả hiện tại hoàn toàn chính xác và hiệu quả.

Bảng 1. Bốn tần số dao động không thứ nguyên đầu tiên $\bar{\omega}$ của tấm vuông MEE tựa đơn ($a/h=15$).

Tác giả	$\bar{\omega}$			
	1	2	3	4
Sobhy và Mukahal [30]	0.3830	0.9330	0.9330	1.4571
Gholami và cộng sự [31]	0.3682	0.9136	0.9136	-
Abazid [32]	0.3829	0.9329	0.9329	1.4568
Ke và cộng sự [28]	0.3698	0.9247	0.9247	1.4800
Hiện tại	0.3843	0.9404	0.9413	1.4757

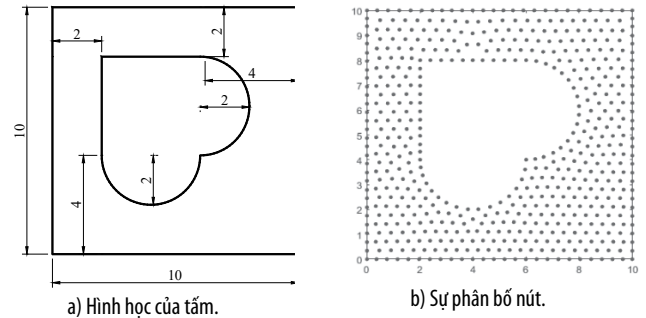
Tiếp theo, năm tần số dao động tự nhiên không thứ nguyên đầu tiên của tấm vuông MEE đồng nhất tựa đơn với các tỷ số chiều dài trên độ dày khác nhau được liệt kê trong Bảng 3. Có thể thấy rằng tần số dao động tự nhiên giảm khi tỷ số chiều dài trên độ dày tăng lên.

Bảng 2. Năm tần số dao động tự nhiên không thứ nguyên đầu tiên $\bar{\omega} = \omega L \sqrt{\rho / \bar{c}_{11e}}$ của tấm vuông MEE đồng nhất tựa đơn.

a/h	$\bar{\omega}$				
	1	2	3	4	5
5	1.0345	1.7911	1.7917	2.2646	2.2661
10	0.5656	1.3504	1.3516	1.7917	2.0756
20	0.2902	0.7170	0.7177	1.1352	1.4084
50	0.1170	0.2922	0.2925	0.4677	0.5843
100	0.0586	0.1465	0.1467	0.2349	0.2938

Cuối cùng, một tấm vuông MEE-FG hoàn toàn tựa đơn bị cắt bởi hình trái tim ở giữa được đưa ra, như minh họa trong Hình 2. Như quan sát trong Bảng 4, khi tăng tỷ số chiều dài trên độ dày dẫn đến sự giảm tần số dao động tự nhiên của tấm vuông MEE. Hơn nữa, kết quả từ tấm vuông MEE có hình trái tim bị cắt ra ở giữa cao hơn một chút so với kết quả từ các tấm vuông MEE không bị cắt khi so sánh

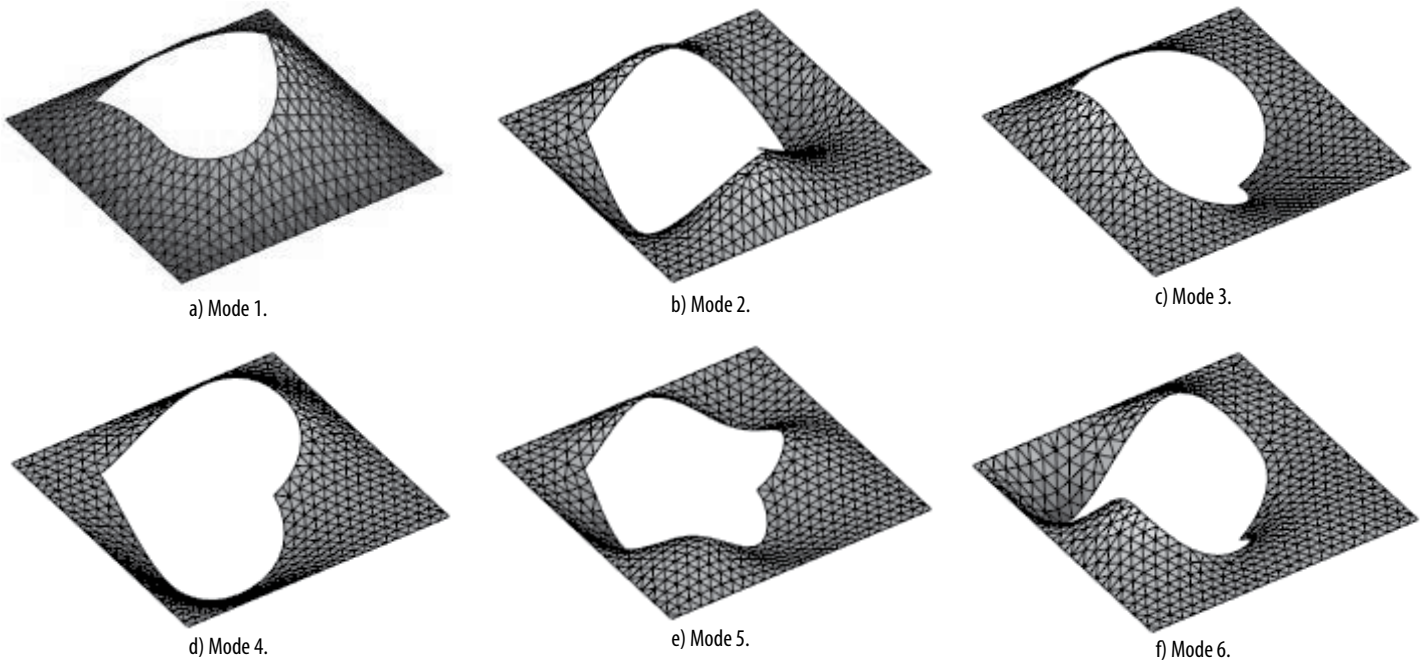
giữa Bảng 3 và Bảng 4. Hình 3 vẽ hình dạng 6 mode dao động đầu tiên tấm vuông MEE tựa đơn bị cắt bởi hình trái tim ở giữa.



Hình 1. Hình học và sự phân bố nút của tấm vuông MEE bị cắt bởi hình trái tim ở giữa.

Bảng 3. Năm tần số dao động tự nhiên không thứ nguyên đầu tiên của tấm vuông MEE $\bar{\omega} = \omega L \sqrt{\rho / \bar{c}_{11e}}$ tựa đơn bị cắt bởi hình trái tim ở giữa.

a/h	$\bar{\omega}$				
	1	2	3	4	5
10	0.6582	1.0199	1.0942	1.2227	1.7833
20	0.3385	0.5729	0.6422	1.0199	1.0324
50	0.1365	0.2325	0.2608	0.4240	0.4647
100	0.0684	0.1165	0.1307	0.2128	0.2334



Hình 2. Hình dạng 6 mode dao động đầu tiên của tấm vuông MEE tựa đơn bị cắt bởi hình trái tim ở giữa.

4. KẾT LUẬN

Một công thức dạng yếu dựa trên lý thuyết tấm FSDT cải tiến để phân tích dao động tự do của tấm đồng nhất chịu tương tác cơ từ điện MEE đã được trình bày trong nghiên cứu này bằng cách sử dụng nguyên lý công ảo mở rộng. Các phương trình chủ đạo cũng được giải bằng phương pháp không lưới di chuyển Kriging để xác định tần số dao động tự nhiên của các tấm MEE. Lý thuyết tấm FSDT cải tiến giảm một biến số so với lý thuyết tấm FSDT cổ điển cũng được đưa ra và áp dụng hiệu quả. Để thỏa mãn các phương trình Maxwell, các thế năng từ và điện được xem xét bằng cách kết hợp các hàm cosin và hàm tuyến tính thông qua chiều dày của tấm. Các kết quả thu được đã được so sánh với các kết quả đã công bố trên các tạp chí uy tín trước đây. Trong nghiên cứu này, có thể kết luận rằng tần số dao động tự nhiên của các tấm vuông MEE giảm khi ta tăng tỷ số chiều dài trên chiều dày và kết quả này thấp hơn một chút so với các tấm vuông MEE bị cắt bởi hình trái tim ở giữa.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. Suzuki K, Kijima K. Optical Band Gap of Barium Titanate Nanoparticles Prepared by RF-plasma Chemical Vapor Deposition. *Japanese Journal of Applied Physics*. 2005;44:2081-2.
- [2]. Olabi AG, Grunwald A. Design and application of magnetostrictive materials. *Materials & Design*. 2008;29:469-83.
- [3]. Hosni N, Zehani K, Bartoli T, Bessais L, Maghraoui-Meherzi H. Semi-hard magnetic properties of nanoparticles of cobalt ferrite synthesized by the co-precipitation process. *Journal of Alloys and Compounds*. 2017;694:1295-301.
- [4]. Liu M-F, Chang T-P. Closed form expression for the vibration problem of a transversely isotropic magneto-electro-elastic plate. 2010.
- [5]. Liu M-F. Exact solution for the bending deformations of layered magneto-electro-elastic laminates based on thin-plate formulation. *International Journal of Engineering and Applied Sciences*. 2016;3:257692.
- [6]. Shooshtari A, Razavi S. Large amplitude free vibration of symmetrically laminated magneto-electro-elastic rectangular plates on Pasternak type foundation. *Mechanics Research Communications*. 2015;69:103-13.
- [7]. Chen H, Yu W. A multiphysics model for magneto-electro-elastic laminates. *European Journal of Mechanics - A/Solids*. 2014;47:23-44.
- [8]. Milazzo A. Large deflection of magneto-electro-elastic laminated plates. *Applied Mathematical Modelling*. 2014;38:1737-52.
- [9]. Alaimo A, Benedetti I, Milazzo A. A finite element formulation for large deflection of multilayered magneto-electro-elastic plates. *Composite Structures*. 2014;107:643-53.
- [10]. Vinyas M, Kattimani SC. Finite element evaluation of free vibration characteristics of magneto-electro-elastic rectangular plates in hygrothermal environment using higher-order shear deformation theory. *Composite Structures*. 2018;202:1339-52.
- [11]. Vinyas M. A higher-order free vibration analysis of carbon nanotube-reinforced magneto-electro-elastic plates using finite element methods. *Composites Part B: Engineering*. 2019;158:286-301.
- [12]. Mahesh V, Harursampath D. Nonlinear vibration of functionally graded magneto-electro-elastic higher order plates reinforced by CNTs using FEM. *Engineering with Computers*. 2020:1-23.
- [13]. Zheng Y-f, Xu L-l, Chen C-p. Nonlinear bending analysis of magneto-electro-elastic rectangular plates using higher order shear deformation theory. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 2021;35:1099-108.
- [14]. Xu LL, Kang CC, Zheng YF, Chen CP. Analysis of nonlinear vibration of magneto-electro-elastic plate on elastic foundation based on high-order shear deformation. *Composite Structures*. 2021;271:114149.
- [15]. Chen W, Lee KY, Ding H. On free vibration of non-homogeneous transversely isotropic magneto-electro-elastic plates. *Journal of Sound and Vibration*. 2005;279:237-51.
- [16]. Zhang P, Qi C, Fang H, Ma C, Huang Y. Semi-analytical analysis of static and dynamic responses for laminated magneto-electro-elastic plates. *Composite Structures*. 2019;222:110933.
- [17]. Pan E, Han F. Exact solution for functionally graded and layered magneto-electro-elastic plates. *International Journal of Engineering Science*. 2005;43:321-39.
- [18]. Gu L. Moving kriging interpolation and element-free Galerkin method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2003;56:1-11.
- [19]. Thai CH, Do VNV, Nguyen-Xuan H. An improved Moving Kriging-based meshfree method for static, dynamic and buckling analyses of functionally graded isotropic and sandwich plates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2016;64:122-36.
- [20]. Thai CH, Nguyen TN, Rabczuk T, Nguyen-Xuan H. An improved moving Kriging meshfree method for plate analysis using a refined plate theory. *Computers & Structures*. 2016;176:34-49.
- [21]. Thai CH, Tran TD, Phung-van P. A size-dependent moving Kriging meshfree model for deformation and free vibration analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite nanoplates. *Engineering Analysis with Boundary Elements*. 2020.
- [22]. Thai CH, Ferreira AJM, Lee J, Nguyen-Xuan H. An efficient size-dependent computational approach for functionally graded isotropic and sandwich microplates based on modified couple stress theory and moving Kriging-based meshfree method. *International Journal of Mechanical Sciences*. 2018;142-143:322-38.
- [23]. Nguyen TN, Thai CH, Nguyen-Xuan H, Lee J. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded material plates using an improved moving Kriging meshfree method based on a refined plate theory. *Composite Structures*. 2018;193:268-80.
- [24]. Lam KY, Wang QX, Li H. A novel meshless approach—local Kriging (LoKriging) method with two-dimensional structural analysis. *Comput Mech* 2004;3:235-44.
- [25]. Li H, Wang QX, Lam KY. Development of a novel meshless Local Kriging (LoKriging) method for structural dynamic analysis. *Comput Methods Appl Mech Eng* 2004;193:2599–619.
- [26]. Chen L, Liew KM. A local Petrov-Galerkin approach with moving Kriging interpolation for solving transient heat conduction problems. *Comput Mech* 2011;47:455-67.
- [27]. Dai BD, Cheng J, Zheng BJ. A moving Kriging interpolation-based meshless local Petrov-Galerkin method for elastodynamic analysis. *Int J Appl Mech* 2013;5:1350011.
- [28]. Ke L-L, Wang Y-S, Yang J, Kitipornchai S. Free vibration of size-dependent magneto-electro-elastic nanoplates based on the nonlocal theory. *Acta Mechanica Sinica*. 2014;30:516-25.
- [29]. Feng W, Yan Z, Lin J, Zhang C. Bending analysis of magneto-electro-elastic nanoplates resting on Pasternak elastic foundation based on nonlocal theory. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2020;41:1769-86.
- [30]. Sobhy M, Al Mukahal F. Analysis of Electromagnetic Effects on Vibration of Functionally Graded GPLs Reinforced Piezoelectromagnetic Plates on an Elastic Substrate. *Crystals*. 2022;12:487.
- [31]. Gholami R, Ansari R, Gholami Y. Size-dependent bending, buckling and vibration of higher-order shear deformable magneto-electro-thermo-elastic rectangular nanoplates. *Materials Research Express*. 2017;4:065702.
- [32]. Abazid MA. The nonlocal strain gradient theory for hygrothermo-electromagnetic effects on buckling, vibration and wave propagation in piezoelectromagnetic nanoplates. *International Journal of Applied Mechanics*. 2019;11:1950067.