SỰ TỒN TẠI DÒNG CÂN BẰNG CHO BÀI TOÁN MẠNG GIAO THÔNG ĐA MỤC TIÊU

Nguyễn Xuân Hải[(1)], Nguyễn Hồng Quân[(1)]
(1) Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông - cơ sở tại TP. Hồ Chí Minh
Ngày nhận bài /2024; Chấp nhận đăng /2024
Liên hệ email: nxhai@ptithcm.edu.vn

Tóm tắt

Mục đích của bài báo này là nghiên cứu sự tồn tại nghiệm cho bài toán cân bằng mạng giao thông đa mục tiêu với nhu cầu co giãn. Sử dụng phương pháp liên quan đến vô hướng hóa, chúng tôi phân tích bài toán và thiết lập một kết quả tồn tại nghiệm cho dòng cân bằng hữu hiệu và dòng cân bằng hữu hiệu yếu của bài toán này. Kết quả thu được dựa trên giả thiết về tính đóng và tính tựa đơn điệu suy rộng, không dùng các giả thiết liên quan đến tính lồi hoặc tính lồi suy rộng. Hơn nữa, các giả thiết trong kết quả này khá đơn giản và dễ kiểm tra. Một vài ví dụ cũng được cung cấp nhằm minh họa và chỉ ra sự thuận lợi của kết quả này khi áp dụng vào các tình huống cụ thể.

Từ khóa: *cân bằng mạng giao thông đa mục tiêu, dòng cân bằng hữu hiệu, dòng cân bằng hữu hiệu yếu, sự tồn tại*

Abstract

THE EXISTENCE OF EQUILIBRIUM FLOWTS IN MULTI-OBJECTIVE TRAFFIC NETWORK PROBLEMS

The purpose of this paper is to study the existence of solutions for multi-objective traffic network equilibrium problems with elastic demands. By using methods related to scalarization techniques, we analyze the problem and give a existence result for weak effective and effective equilibrium flows. The obtained result is established based on assumptions of closedness and generalized quasimonotonicity, without using assumptions related to convexity or generalized convexity. Furthermore, the assumptions in this result are quite simple and easy to check. Some examples are also provided to illustrate and to show the advantages of this result when applied to specific situations.

1. Giới thiệu

Bài toán cân bằng mạng cổ điển là bài toán mà người tham gia giao thông (trong một mạng lưới giao thông tắc nghẽn) tìm một đường đi từ điểm bắt đầu đến điểm kết thúc sao cho chi phí (thời gian, tiền bạc,...) bỏ ra nhỏ nhất. Pigou (1920) là người đầu tiên nghiên cứu bài toán cân bằng mạng, ông đã nghiên cứu mạng vận tải gồm 2 nút và 2 đường. Về sau người ta nhận thấy bài toán cân bằng mạng liên quan gần gũi với nhiều bài toán quan trọng trong Toán kinh tế và tìm thấy nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực của khoa học-kỹ thuật và khoa học xã hội. Do đó, bài toán cân bằng mạng đã được nghiên cứu và phát triển bởi nhiều nhà nghiên cứu trên thế giới (Aashtiani và cs., 1981; Dafermos, 1980; Hai và cs., 2009; Khanh và cs., 2005; Maugeri, 1995; Smith, 1979; Zhang và cs., 1996; Wardrop, 1952). Ban đầu các bài toán mạng được nghiên cứu với cước phí chỉ một mục tiêu, tức là hàm cước phí là hàm vô hướng. Khi xét sự tồn tại dòng cân bằng người ta thường chuyển đổi bài toán mạng về bài toán bất đẳng thức biến phân, và dùng các kết quả của lý thuyết bất đẳng thức biến phân cũng như các kết quả liên quan để khảo sát (Dafermos, 1980; Khanh và cs., 2005; Maugeri, 1995; Smith, 1979; Zhang và cs., 1996). Trong thực tiễn, các bài toán mạng giao thông vô hướng không mô tả hết các tình huống thực tế, ví dụ như cước phí không chỉ là tiền bạc mà còn cả thời gian và sức khỏe, hay như trường hợp nhu cầu không cố định mà có thể thay đổi trong một phạm vi nhất định,... Do đó, các bài toán mạng được phát triển đến trường hợp đa mục tiêu (ở đó các cước phí là những hàm vector) (Chen và cs., 1999; Chen, 2011; Khanh và cs., 2004; Konnov, 2013), hoặc các bài toán mạng với nhu cầu co giãn (Konnov, 2013). Trong trường hợp đa mục tiêu, nhiều khái niệm về dòng cân bằng được các nhà nghiên cứu trên thế giới đề xuất và khảo sát, chẳng hạn như dòng cân bằng hữu hiệu, dòng cân bằng hữu hiệu yếu, dòng cân bằng chính thường Henig, dòng cân bằng chính thường Benson,...

Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu bài toán cân bằng mạng giao thông đa mục tiêu với nhu cầu co giãn, bao hàm cả trường hợp đa mục tiêu và trường hợp nhu cầu co giãn nói trên. Chúng tôi chỉ xét loại dòng cân bằng hữu hiệu và loại dòng cân bằng hữu hiệu yếu, chứng minh một kết quả về sự tồn tại cho hai loại dòng cân bằng này. Kết quả của chúng tôi được phát biểu và chứng minh mà không đòi hỏi các điều kiện về tính lồi. Nội dung chính của bài báo được trình bày trong hai mục tiếp theo. Trong mục 2 chúng tôi trình bày bài toán cân bằng mạng giao thông đa mục tiêu với nhu cầu co giãn và phát biểu hai khái niệm về dòng cân bằng. Ở mục 3, chúng tôi phát biểu và chứng minh một định lí tồn tại cho hai loại dòng cân bằng được nêu ở mục 2. Vài trường hợp đặc biệt cũng như các ví dụ áp dụng được đưa ra để minh họa và thể hiện giá trị của kết quả mới này.

2. Cơ sở lý thuyết

Trong toàn bộ bài báo này, chúng ta dùng các ký hiệu sau. $\mathbb{R}$ là tập các số thực, $\mathbb{R}^n := \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$ là không gian Euclide n chiều, $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0$ với mọi $i = 1, ..., n\}$ là nón orthant dương trong $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_{++} = \text{int}\mathbb{R}^n_+ = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0$ với mọi $i = 1, ..., n\}$.

Chúng ta mô tả bài toán mạng giao đa mục tiêu với nhu cầu co giãn. Xét bài toán mạng giao thông đa mục tiêu $G = (\mathbf{N}, \mathcal{A}, \mathbf{W}, c, d)$ với ràng buộc tải năng trên cung, trong đó:

$\mathbf{N}$ là tập tất cả các nút;

$\mathcal{A}$ là tập tất cả các cung định hướng;

$\mathbf{W}$ là tập tất cả các cặp O/D nguồn-đích của các nút mà biểu diễn điểm nguồn và điểm đích của các đường đi;

$c = (c_a)_{a\in\mathcal{A}}$ là vector tải năng với tải năng của cung a là $c_a > 0$;

$d = (d_w)_{w\in\mathbf{W}}$ là vector nhu cầu với nhu cầu của dòng giao thông trên cặp O/D nguồn-đích w là $d_w > 0$ (d_w biểu diễn lưu lượng vào và ra khỏi mạng tại điểm nguồn và điểm đích của w).

Gọi P_w là tập tất cả các đường nối cặp $w \in \mathbf{W}$, $P = \bigcup_{w\in\mathbf{W}} P_w$, và $m = |P|$. Ta kí hiệu cho dòng giao thông trên đường đi p và vector dòng đường là x_p ($p \in P$) và $x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m_+$.

Với mỗi cung $a \in \mathcal{A}$, dòng cung v_a được cho bởi

$$v_a = \sum_{w\in\mathbf{W}} \sum_{p\in P_w} \delta_{ap} x_p,$$

$$\text{ở đây } \delta_{ap} = \begin{cases} 1 & \text{nếu cung } a \text{ được chứa trong đường } p, \\ 0 & \text{nếu khác.} \end{cases}$$

Vậy, ràng buộc nhu cầu (của dòng mạng) trên cặp O/D nguồn-đích $w \in \mathbf{W}$ là

$$\sum_{p \in P_w} x_p = d_w.$$

Trong bài báo này chúng ta xét trường hợp *nhu cầu co giãn* và cước phí đa mục tiêu. Với mỗi cặp O/D nguồn-đích w, nhu cầu không cố định, mà có thể lấy trong một tập con $\mathcal{D}_w$ của $\mathbb{R}_+$, nghĩa là, ràng buộc nhu cầu có dạng

$$\sum_{p \in P_w} x_p \in \mathcal{D}_w \text{ đối với mỗi } w \in \mathbf{W}.$$

Một vector dòng x gọi là chấp nhận được nếu nó thỏa các ràng buộc nhu cầu và tải năng sau.

(i) $0 \leq v_a \leq c_a$ với mỗi $a \in \mathcal{A}$;

(j) $\sum_{p \in P_w} x_p \in \mathcal{D}_w$ với mỗi $w \in \mathbf{W}$.

Gọi A là tập các vector dòng chấp nhận được. Với mỗi vector dòng x, gọi

$$t_a(x) = (t_{1a}(x), ..., t_{ka}(x)) \in \mathbb{R}^k$$

là vector cước phí của vector dòng x trên cung a. Khi đó,

$$\mathbb{T}_p(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{ap} t_a(x) = (\sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{ap} t_{1a}(x), ..., \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{ap} t_{ka}(x)) \in \mathbb{R}^k$$

được là vector cước phí của dòng x trên đường đi p.

Ta đặt

$$\mathbb{T}(x) = \begin{pmatrix} \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{a1} t_{1a}(x)) & \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{a2} t_{1a}(x)) & \cdots & \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{am} t_{1a}(x)) \\ \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{a1} t_{2a}(x)) & \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{a2} t_{2a}(x)) & \cdots & \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{am} t_{2a}(x)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{a1} t_{ka}(x)) & \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{a2} t_{ka}(x)) & \cdots & \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{am} t_{ka}(x)) \end{pmatrix}.$$

$\mathbb{T}$ được gọi là ma trận cước phí của mạng G.

Định nghĩa 2.1. *Một cung $a \in \mathcal{A}$ được gọi là một cung bão hòa của vector dòng x nếu $v_a = c_a$. Một đường $p \in P$ được gọi là một đường bão hòa của vector dòng x nếu tồn tại một cung bão hòa a của vector dòng x sao cho a thuộc đường p.*

Sau đây là các khái niệm về dòng cân bằng của mạng G.

Định nghĩa 2.2. *Cho $x \in A$ là một vector dòng.*

(a) *x được gọi là* DÒNG CÂN BẰNG HỮU HIỆU *nếu với mọi $w \in \mathbf{W}$ và mọi $p, p' \in P_w$, ta có: $\mathbb{T}_{p'}(x) - \mathbb{T}_p(x) \in -\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\} \Rightarrow x_p = 0$, hoặc p' là đường bão hòa của dòng x.*

(b) *x được gọi là* DÒNG CÂN BẰNG HỮU HIỆU YẾU *nếu với mọi $w \in \mathbf{W}$ và mọi $p, p' \in P_w$, ta có: $\mathbb{T}_{p'}(x) - \mathbb{T}_p(x) \in -\mathbb{R}^n_{++} \Rightarrow x_p = 0$, hoặc p' là đường bão hòa của dòng x.*

Ta kí hiệu tập các dòng cân bằng hữu hiệu (tương ứng, tập các dòng cân bằng hữu hiệu yếu) của mạng G là $\mathrm{Sol}^e(G)$ (tương ứng, $\mathrm{Sol}^w(G)$). Trong mục tiếp theo chúng ta sẽ đưa ra các điều kiện để mạng G có các dòng cân bằng.

3. Kết quả

Trong mục này chúng ta thiết lập một định lí tồn tại cho các dòng cân bằng. Kết quả khác với các kết quả đã biết, giả thiết chính được dùng ở đây là một loại của tính đơn điệu suy rộng, không dùng cấu trúc tính lồi.

Định lí 3.1. *Xét mạng giao thông đa mục tiêu $G = (\mathbf{N}, \mathbf{A}, \mathbf{W}, c, d)$ với ràng buộc tải năng trên cung. Với $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ ta đặt*

$$g_\lambda(x, y) = \sum_{w \in W} \sum_{p \in P_w} (y_p - x_p) \sum_{a \in \mathcal{A}} \delta_{ap} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j t_{ja}(x). \tag{3.1}$$

Giả sử rằng với mỗi $w \in \mathbf{W}$, $\mathcal{D}_w$ là một tập con compact của $\mathbb{R}_+$, và tồn tại $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ sao cho các điều kiện sau đây được thỏa:

(i) *với bất kì $x^1, ..., x^m \in A$ với $x^{m+1} := x^1$, tồn tại $j \in \{1, ..., m\}$ sao cho $g_\lambda(x^j, x^{j+1}) \geq 0$;*

(ii) *với mỗi $y \in A$, tập $\{x \in A \mid g_\lambda(x, y) \geq 0\}$ là đóng.*

Khi đó,

(a) *nếu $\langle \lambda, v \rangle > 0$ cho mọi $v \in \mathbb{R}^k_+ \setminus \{0\}$, thì tồn tại dòng cân bằng hữu hiệu của G;*

(b) *nếu $\langle \lambda, v \rangle > 0$ cho mọi $v \in \mathbb{R}^k_{++}$, thì tồn tại dòng cân bằng hữu hiệu yếu của G.*

Chứng minh. Định nghĩa $f : A \times A \to \mathbb{R}^k$, được xác định bởi, với mọi $x, y \in A$,

$$f(x, y) = (\mathbb{T}(x))(y - x)^T$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_{a1} t_{1a}(x)) & \sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_{a2} t_{1a}(x)) & \cdots & \sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_{am} t_{1a}(x)) \\ \sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_{a1} t_{2a}(x)) & \sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_{a2} t_{2a}(x)) & \cdots & \sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_{am} t_{2a}(x)) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_{a1} t_{ka}(x)) & \sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_{a2} t_{ka}(x)) & \cdots & \sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_{am} t_{ka}(x)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (y_1 - x_1) \\ (y_2 - x_2) \\ \cdots \\ (y_m - x_m) \end{pmatrix}.$$

$$= (\sum_{w\in\mathbf{W}} \sum_{l\in P_w} (y_l - x_l) \sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_{al} t_{1a}(x), ..., \sum_{w\in\mathbf{W}} \sum_{l\in P_w} (y_l - x_l) \sum_{a\in\mathcal{A}} \delta_{al} t_{ka}(x)).$$

Với $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$, ta đặt $E_\lambda = \{v \in \mathbb{R}^k \mid \langle \lambda, v \rangle > 0$. Thế thì, điều kiện (i) tương đương với điều kiện sau:

(i') *với bất kì $x^1, ..., x^m \in A$ với $x^{m+1} := x^1$, tồn tại $j \in \{1, ..., m\}$ sao cho $f(x^j, x^{j+1}) \notin -E_\lambda$.*

Trong khi đó, điều kiện (ii) là tương đương với điều kiện sau:

(ii') *với mỗi $y \in A$, tập $\{x \in A \mid f(x, y) \notin -E_\lambda\}$ là đóng.*

Các điều kiện (i') và (ii') cho ta kết luận sau:

$$\bigcap_{y\in A}\{x \in A \mid f(x,y) \notin -E_\lambda\} \neq \emptyset.$$

Thật vậy, giả sử trái lại rằng,

$$\bigcap_{y\in A}\{x \in A \mid f(x,y) \notin -E_\lambda\} = \emptyset.$$

hoặc tương đương,

$$A = \bigcup_{y\in A}\{x \in A \mid f(x,y) \in -E_\lambda\}.$$

Khi $\mathcal{D}_w$ là một tập con compact cho mỗi $w \in \mathbf{W}$, A là compact. Do đó, bởi (ii'), tồn tại một tập con hữu hạn $M := \{y^1, ..., y^m\}$ của A sao cho

$$M \subset A = \bigcup_{y^j\in M}\{x \in A \mid f(x,y^j) \in -E_\lambda\}.$$

Bởi (i'), ta thấy rằng

$$y^j \notin U^j := \{x \in A \mid f(x,y^j) \in -E_\lambda\} \text{ cho mọi } j = 1, ..., m.$$

Khi $y^1 \notin U^1$, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $y^1 \in U^2$, tức là

$$f(y^1, y^2) \in -E_\lambda.$$

Thế thì, bởi (i'),

$$f(y^2, y^1) \notin -E_\lambda,$$

tức là $y^2 \notin U^1$. Vậy, $y_2 \notin U^1 \cup U^2$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $y_2 \in U^3$. Thế thì,

$$f(y^1, y^2) \in -E_\lambda \text{ và } f(y^2, y^3) \in -E_\lambda.$$

Điều này và (i') kéo theo rằng

$$f(y^3, y^2) \notin -E_\lambda \text{ và } f(x^3, x^1) \notin -E_\lambda,$$

tức là, $y^3 \notin U^2$ và $y^3 \notin U^1$. Do đó, $y^3 \notin U^1 \cup U^2 \cup U^3$. Tiếp tục quá trình này ta có

$$y^j \notin \textstyle\bigcup_{l=1}^{j} U^l \text{ cho mọi } j = 1, ..., m.$$

Đặc biệt, $y^m \notin \bigcup_{l=1}^{m} U^l = A$, mâu thuẫn. Vậy, $\bigcap_{y\in A}\{x \in A \mid f(x,y) \notin -E_\lambda\} \neq \emptyset$.

Bây giờ lấy $\bar{x} \in \bigcap_{y\in A}\{x \in A \mid f(x,y) \notin -E_\lambda\}$. Thế thì $f(\bar{x} \notin -E_\lambda$ cho mọi $y \in A$. Do đó,

$$f(\bar{x}, A) \subset \mathbb{R}^k \setminus (-E_\lambda). \tag{3.2}$$

Hơn nữa, với bất kỳ $w \in \mathbf{W}$, và $p, p' \in P_w$, đặt $\varepsilon = \min\{\min_{a\in A_{p'}}(c_a - v_a), \bar{x}_p\}$, ở đây $A_{p'} = \{a \in \mathbf{A} \mid$ đường p' đi qua $a\}$. Gọi điều kiện sau:

(∗) "$x_p > 0$ *và* p' *là đường không bão hòa của dòng* $\bar{x}$"

Dễ dàng kiểm tra rằng, nếu điều kiện (∗) được thỏa thì $\varepsilon > 0$, $y^* = (y_l^*)$, ở đây

$$y_l^* = \begin{cases} \bar{x}_l & \text{nếu } l \neq p, p', \\ \bar{x}_p - \varepsilon & \text{nếu } l = p, \\ \bar{x}_{p'} + \varepsilon & \text{nếu } l = p', \end{cases}$$

thuộc A, và với mọi $j = 1, 2, ..., k$,

$$\sum_{w\in\mathbf{W}}\sum_{l\in P_w}(y_l^* - \bar{x}_l)\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{al}t_{ja}(\bar{x}) = (y_p^* - \bar{x}_p)\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap}t_{ja}(\bar{x}) + (y_{p'}^* - \bar{x}_{p'})\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap'}t_{ja}(\bar{x})$$

$$= \varepsilon(\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap'}t_{ja}(\bar{x}) - \sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap}t_{ja}(\bar{x})).$$

Do đó,

$$f(\bar{x}, y^*) = (\sum_{w\in\mathbf{W}}\sum_{l\in P_w}(y_l^* - \bar{x}_l)\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{al}t_{1a}(\bar{x}), ..., \sum_{w\in\mathbf{W}}\sum_{l\in P_w}(y_l^* - \bar{x}_l)\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{al}t_{ka}(\bar{x}))$$

$$= (\varepsilon(\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap'}t_{1a}(\bar{x}) - \sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap}t_{1a}(\bar{x})), ..., \varepsilon(\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap'}t_{ka}(\bar{x}) - \sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap}t_{ka}(\bar{x})))$$

$$= \varepsilon(\mathbb{T}_{p'}(\bar{x}) - \mathbb{T}_p(\bar{x})).$$

(a) Khi $\langle\lambda, v\rangle > 0$ cho mọi $v \in \mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}$, $\mathbb{R}_+^k \setminus \{0\} \subset E_\lambda$. Từ (3.2) ta suy ra

$$f(\bar{x}, y) \notin -\mathbb{R}_+^k \setminus \{0\} \quad \text{với mọi } y \in A. \tag{3.3}$$

Giả sử rằng $\bar{x}$ không phải là dòng cân bằng hữu hiệu. Thế thì, $\mathbb{T}'_p(\bar{x}) - \mathbb{T}_p(\bar{x}) \in -\mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}$ và (∗) thỏa. Khi đó, $f(\bar{x}, y^*) = \varepsilon(\mathbb{T}_{p'}(\bar{x}) - \mathbb{T}_p(\bar{x})) \in -\mathbb{R}_+^k \setminus \{0\}$, điều này mâu thuẫn với (3.3). Vậy, $\bar{x}$ phải là dòng cân bằng hữu hiệu.

(b) Khi $\langle\lambda, v\rangle > 0$ cho mọi $v \in \mathbb{R}_{++}^k$, $\mathbb{R}_{++}^k \subset E_\lambda$. Từ (3.2) ta suy ra

$$f(\bar{x}, y) \notin -\mathbb{R}_{++}^k \quad \text{với mọi } y \in A. \tag{3.4}$$

Giả sử rằng $\bar{x}$ không phải là dòng cân bằng hữu hiệu yếu. Thế thì, $\mathbb{T}'_p(\bar{x}) - \mathbb{T}_p(\bar{x}) \in -\mathbb{R}_{++}^k$ và (∗) thỏa. Khi đó, $f(\bar{x}, y^*) = \varepsilon(\mathbb{T}_{p'}(\bar{x}) - \mathbb{T}_p(\bar{x})) \in -\mathbb{R}_{++}^k$, điều này mâu thuẫn với (3.4). Vậy, $\bar{x}$ phải là dòng cân bằng hữu hiệu yếu. □

Dưới đây là vài trường hợp đặc biệt mà các điều kiện của Định lí 3.1 được thỏa.

(I) Cước phí $t_a(x)$ trên cung a có dạng $t_a(x) = r_a(\gamma_1(x), ..., \gamma_k(x))$, ở đây $\gamma_1, ..., \gamma_k : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ ($P = \bigcup_{w\in W} P_w$, $m = |P|$).

Với $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ ta tính

$$g_\lambda(x, y) = \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(y_p - x_p)\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j t_{ja}(x)$$

$$= \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(y_p - x_p)\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j r_a \gamma_j(x)$$

$$= \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(y_p - x_p)(\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap} r_a)\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \gamma_j(x)$$

$$= [\sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap} r_a)y_p - \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap} r_a)x_p]\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \gamma_j(x)$$

$$= (\varphi(y) - \varphi(x))\gamma_\lambda(x),$$

ở đây $\varphi(x) = \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap} r_a)x_p$ và $\gamma_\lambda(x) = \sum_{j=1}^{k}\lambda_j\gamma_j(x)$.

Nếu "$\gamma_\lambda(x) \leq 0$ cho mọi $x \in A$" hoặc "$\gamma_\lambda(x) \geq 0$ cho mọi $x \in A$", thế thì dễ dàng thấy rằng giả thiết (i) của Định lí 3.1 được thỏa. Vì φ là hàm liên tục, giả thiết (ii) của Định lí 3.1 cũng được thỏa.

(II) Xét trường hợp $t_a(x)$ có dạng $t_a(x) = (\alpha_a^1\gamma(x), ..., \alpha_a^k\gamma(x))$ với $a \in \mathcal{A}$, ở đây $\alpha_a^j \in \mathbb{R}$ và $\gamma : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Với $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$ và $(x, y) \in A \times A$, ta có

$$g_\lambda(x,y) = \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(y_p - x_p)\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j t_{ja}(x)$$

$$= \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(y_p - x_p)\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap}\sum_{j=1}^{k}\lambda_j \alpha_a^j\gamma(x)$$

$$= \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(y_p - x_p)(\sum_{j=1}^{k}\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap}\lambda_j \alpha_a^j)\gamma(x)$$

$$= [\sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(\sum_{j=1}^{k}\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap}\lambda_j \alpha_a^j)y_p - \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(\sum_{j=1}^{k}\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap}\lambda_j \alpha_a^j)x_p]\gamma(x)$$

$$= (\varphi(y) - \varphi(x))\gamma(x),$$

ở đây $\varphi(x) = \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(\sum_{j=1}^{k}\sum_{a\in\mathcal{A}}\delta_{ap}\lambda_j\alpha_a^j)x_p$.

Nếu "$\gamma_(x) \leq 0$ cho mọi $x \in A$" hoặc "$\gamma(x) \geq 0$ cho mọi $x \in A$", thế thì dễ dàng thấy rằng giả thiết (i) của Định lí 3.1 được thỏa. giả thiết (ii) của Định lí 3.1 cũng được thỏa vì φ là hàm liên tục.

Sau đây là vài ví dụ minh họa cho các kết quả trên.

Ví dụ 3.1. Xét mạng giao thông đa mục tiêu G với $\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{A} = \{a_{12}, a_{14}, a_{15}, a_{24}, a_{45}, a_{34}\}$, $\mathbf{W} = \{(1,5),(3,4)\}$ (khi đó $m = 4$), c là tùy ý và $\mathcal{D}_w \subset \mathbb{R}$ là tập compact tùy ý cho mỗi $w \in \mathbf{W}$. Thế thì, A được xác định và compact. Cho $t_{a_{ij}}(x) = (\gamma_{a_{ij}}(x), \gamma(x) - \gamma_{a_{ij}}(x)) \in \mathbb{R}^2$ với $a_{ij} \in \mathcal{A}$, ở đây $\gamma_{a_{ij}} : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ và $\gamma : \mathbb{R}^4 \to (0, +\infty)$.

Lấy $\lambda = (1,1)$. Thế thì, với mọi $(x,y) \in A \times A$ ta có

$$\begin{aligned} g_\lambda(x,y) &= \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(y_p - x_p)\sum_{a_{uv}\in\mathcal{A}}\delta_{a_{uv}p}\sum_{j=1}^{2}\lambda_j t_{ja_{uv}}(x) \\ &= \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(y_p - x_p)\sum_{a_{uv}\in\mathcal{A}}\delta_{a_{uv}p}(\gamma_{a_{ij}}(x) + \gamma(x) - \gamma_{a_{ij}}(x)) \\ &= \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(y_p - x_p)\sum_{a_{uv}\in\mathcal{A}}\delta_{a_{uv}p}\gamma(x) \\ &= [\sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(\sum_{a_{uv}\in\mathcal{A}}\delta_{a_{uv}p}(y_p - x_p))]\gamma(x) \\ &= [3(y_1 - x_1) + (y_2 - x_2) + 2(y_3 - x_3) + (y_4 - x_4]\gamma(x) \\ &= (\varphi(y) - \varphi(x))\gamma(x), \end{aligned}$$

ở đây $\varphi(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4$. Vậy, ta dễ dàng kiểm tra các giả thiết của Định lí 3.1. Vì $\langle\lambda, v\rangle > 0$ cho mọi $v \in \mathbb{R}^k_+$, Bài toán cân bằng mạng trong trường hợp này có các dòng cân bằng hữu hiệu.

Ví dụ 3.2. Xét mạng giao thông đa mục tiêu G với $\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5\}$, $\mathcal{A} = \{a_{12}, a_{14}, a_{15}, a_{24}, a_{45}, a_{34}, a_{35}\}$, $\mathbf{W} = \{(1,5),(3,5)\}$ (khi đó $m = 5$), c là tùy ý và $\mathcal{D}_w \subset \mathbb{R}$ là tập compact tùy ý cho mỗi $w \in \mathbf{W}$. Thế thì, A được xác định và compact. Cho $t_{a_{ij}}(x) = (\gamma_{a_{ij}}(x), \gamma(x)) \in \mathbb{R}^2$ với $a_{ij} \in \mathcal{A}$, ở đây $\gamma_{a_{ij}} : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ và $\gamma : \mathbb{R}^5 \to (0, +\infty)$.

Lấy $\lambda = (0,1)$. Thế thì, với mọi $(x,y) \in A \times A$ ta có

$$\begin{aligned} g_\lambda(x,y) &= \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(y_p - x_p)\sum_{a_{uv}\in\mathcal{A}}\delta_{a_{uv}p}\sum_{j=1}^{2}\lambda_j t_{ja_{uv}}(x) \\ &= \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(y_p - x_p)\sum_{a_{uv}\in\mathcal{A}}\delta_{a_{uv}p}t_{2a_{uv}}(x) \\ &= \sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(y_p - x_p)\sum_{a_{uv}\in\mathcal{A}}\delta_{a_{uv}p}\gamma(x) \\ &= [\sum_{w\in W}\sum_{p\in P_w}(\sum_{a_{uv}\in\mathcal{A}}\delta_{a_{uv}p}(y_p - x_p))]\gamma(x) \\ &= [3(y_1 - x_1) + 2(y_2 - x_2) + (y_3 - x_3) + 2(y_4 - x_4) + (y_5 - x_5)]\gamma(x) \\ &= (\varphi(y) - \varphi(x))\gamma(x), \end{aligned}$$

ở đây $\varphi(x) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5$. Vậy, ta dễ dàng kiểm tra các giả thiết của Định lí 3.1. Vì $\langle\lambda, v\rangle > 0$ cho mọi $v \in \mathbb{R}^k_{++}$, Bài toán cân bằng mạng trong trường hợp này có các dòng cân bằng hữu hiệu yếu.

4. Kết luận

Bài báo này giới thiệu một bài toán cân bằng mạng giao thông đa mục tiêu với nhu cầu co giãn. Một kết quả tồn tại nghiệm được thiết lập cho bài toán này dựa trên tính đơn điệu suy rộng và điều kiện liên quan đến vô hướng hóa, nhưng không dùng các giả thiết về tính lồi hoặc tính lồi suy rộng. Kết quả này chứa các giả thiết đơn giản và dễ kiểm tra, và do đó dễ dàng áp dụng cho nhiều tình huống cụ thể. Hơn nữa, kỹ thuật chứng minh tương đối đơn giản, chỉ dùng các công cụ toán học cơ bản và có thể áp dụng kỹ thuật này để nghiên cứu nhiều bài toán khác nhau trong Lý thuyết tối ưu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Aashtiani, H. Z., Magnanti, T. L. (1981). Equilibria on a congested transportation network. *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, 2, 213-226 and *Engineering Management*, 6, 130-132.

[2] Chen G. Y. (2011). On vector network equilibrium problems. *International Journal of Management Science.*

[3] Chen G. Y., Goh C. J., Yang X. Q. (1999). Vector network equilibrium problems and nonlinear scalarization methods. *Mathematical Methods of Operations Research*, 49, 239-253.

[4] Dafermos, S. (1980). Traffic equilibrium and variational inequalities. *Transportation Science*, 14, 42-54.

[5] Hai N. X., Khanh P. Q., Quan N. H. (2009). On the existence of solutions to quasivariational inclusion problems. *Journal of Global Optimization*, 45, 565-581.

[6] Khanh, P. Q., Luu, L. M. (2004). The existence of solutions to vector quasivariational inequalities and quasicomplementarity problems with applications to traffic network equilibria. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 123, 533-548.

[7] Khanh, P. Q., Luu, L. M. (2005). Some existence results quasivariational inequalities involving multifunctions and applications to traffic equilibrium problems. *Journal of Global Optimization*, 32, 551-568.

[8] Konnov, I. (2013). Vector network equilibrium problems with elastic demands. *Journal of Global Optimization*, 57, 521-531.

[9] Maugeri, A. (1995). Variational and quasivariational inequalities in network flow models: Recent developments in theory and algorithms. In: Giannessi, F., Maugeri, A. (eds.), Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems. *Plenum Press*, 195-211. New York.

[10] Pigou, A. C. (1920). *The Economics of Welfare*. MacMillan, London, England.

[11] Smith, M. J. (1979). Existence, uniqueness, and stability of traffic equilibria. *Transportation Research*, 13B, 259-304.

[12] Wardrop, J. G. (1952). Some theoretical aspects of road traffic research. *Proceedings of the Institute of Civil Engineers*, Part II, 325-378.

[13] Xu Y. D., Li S. J., Teo K. L. (2012). Vector network equilibrium problems with capacity constraints of arcs. *Transportation Research*, 48B, 567-577.

[14] Zhang D., Nagurney A. (1996). On the local and global stability of a travel route choice adjustment process *Transportation Research*, 30B, 245-262.