

SO SÁNH TỐC ĐỘ CỘNG HƯỞNG CỦA CÁC MẠNG LƯỚI GỒM HAI HỆ PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN DẠNG HINDMARSH – ROSE 2D VỚI LIÊN KẾT TUYẾN TÍNH HAI CHIỀU VÀ MỘT CHIỀU

Phan Văn Long Em⁽¹⁾, Nguyễn Minh Phúc⁽¹⁾, Nguyễn Tấn Đạt⁽¹⁾

(1) Trường Đại học An Giang - Đại học Quốc Gia Thành Phố Hồ Chí Minh

Ngày nhận bài 29/7/2024; Chấp nhận đăng 30/9/2024

Liên hệ email: pvlem@agu.edu.vn

Tóm tắt

Nghiên cứu này đưa ra kết quả so sánh tốc độ cộng hưởng của các mạng lưới gồm hai hệ phương trình vi phân dạng Hindmarsh-Rose 2D với liên kết tuyến tính một chiều và hai chiều. Kết quả cho thấy rằng mạng lưới với liên kết tuyến tính hai chiều đồng bộ dễ hơn so với mạng lưới với liên kết tuyến tính một chiều. Bài báo còn có phần kiểm tra kết quả lý thuyết bằng phương pháp số trên R và xét sự tương quan của hai phương pháp.

Từ khóa: độ mạnh liên kết, liên kết tuyến tính một chiều, liên kết tuyến tính hai chiều, mô hình Hindmarsh-Rose 2D, sự cộng hưởng đồng nhất.

Abstract

COMPARISON OF SYNCHRONIZATION SPEED OF NETWORKS CONSISTING OF TWO ORDINARY DIFFERENTIAL SYSTEMS OF HINDMARSH – ROSE TYPE WITH BIDIRECTIONALLY AND UNIDIRECTIONALLY LINEAR COUPLING

This research presents the result about comparison of synchronization speed of networks consisting of two ordinary differential systems of Hindmarsh-Rose type with bidirectionally and unidirectionally linear coupling. The result shows that the network with bidirectionally linear coupling synchronizes more easily than the other one. The paper also shows this theoretical result numerically on R and see that there is a compromise.

1. Giới thiệu

Sự đồng bộ hóa hay sự cộng hưởng là tính năng phổ biến trong tự nhiên. Sự đồng bộ hóa của hai phương trình vi phân có nghĩa là phương trình này sao chép tính chất của phương trình kia kể từ một thời điểm nào đó. Một cách tổng quát, khi các hệ phương trình có cùng tính chất ở một thời điểm nào đó thì các phương trình đó được gọi là đồng bộ (Aziz-Alaoui., 2006).

Trong những năm gần đây, sự đồng bộ hóa đã được nghiên cứu rộng rãi trong nhiều lĩnh vực, nhiều hiện tượng tự nhiên cũng phản ánh sự đồng bộ hóa như là sự di chuyển của đàn chim tạo thành đám mây, sự di chuyển của đàn cá ở trong hồ, sự di chuyển của đoàn diễu hành, sự tiếp nhận và truyền thông tin của một nhóm tế bào,... (Aziz-Alaoui, 2006). Vì thế, việc nghiên cứu về đồng bộ hóa trên mạng lưới tế bào có ý nghĩa góp phần làm phong phú thêm những kiến thức mới về đồng bộ hóa nói chung và ngành Toán học

giải tích ứng dụng nói riêng. Có nhiều bài báo nghiên cứu về sự cộng hưởng của mạng lưới các tế bào, nhưng đa số chỉ nghiên cứu trên những tế bào được mô phỏng bằng hệ phương trình FitzHugh-Nagumo (Ambrosio & Aziz-Alaoui, 2012; Ambrosio & Aziz-Alaoui, 2013) hay hệ phương trình vi phân Hindmarsh-Rose (Corson, 2009). Tuy nhiên, chúng tôi nhận thấy rằng các công trình nghiên cứu này đều liên quan đến sự đồng bộ hóa trong mạng lưới các hệ phương trình vi phân FitzHugh-Nagumo, hoặc làm việc trên mạng lưới chỉ gồm hai hoặc ba hệ Hindmarsh-Rose, hoặc nghiên cứu về sự đồng bộ hóa trên mạng lưới đầy đủ tổng quát gồm n hệ phương trình vi phân hoặc hệ phản ứng - khuếch tán dạng Hindmarsh-Rose với liên kết tuyến tính hoặc phi tuyến (Phan Van Long Em, 2022, 2023). Theo hiểu biết của chúng tôi, chưa có một công trình nào trình bày về sự so sánh tốc độ cộng hưởng của hai nhóm tế bào với liên kết tuyến tính một chiều và hai chiều, mà trong đó mỗi tế bào được mô phỏng bằng mô hình Hindmarsh-Rose 2D.

Để cho việc nghiên cứu dễ dàng hơn, chúng tôi chỉ xét mạng lưới của hai tế bào thần kinh được kết nối với nhau bằng cách liên kết tuyến tính và tìm ra điều kiện đủ đối với độ mạnh liên kết để đạt được sự đồng bộ hóa. Mỗi tế bào thần kinh được biểu diễn bằng một phương trình vi phân có tên là Mô hình Hindmarsh-Rose 2D. Nó được biết đến như là một mô hình hai chiều đơn giản hóa từ mô hình nổi tiếng của Hodgkin-Huxley (Ermentrout & Terman, 2009; Hodgkin & Huxley, 1952). Tuy mô hình đơn giản nhưng nó có nhiều kết quả giải tích đáng chú ý và duy trì được việc biểu diễn các tính chất của tế bào về mặt sinh học. Mô hình được tạo thành từ hai phương trình vi phân với hai biến u và v . Biến đầu tiên là biến nhanh được gọi là biến hoạt náo, nó đại diện cho điện áp của màng tế bào. Biến thứ hai là biến chậm, nó đại diện cho một số đại lượng vật lý phụ thuộc vào thời gian như là độ dẫn điện của dòng ion đi qua màng tế bào. Hệ phương trình Hindmarsh-Rose 2D (HR) được cho bởi hệ sau:

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = u_t = v - u^3 + au^2 + I, \\ \frac{dv}{dt} = v_t = 1 - bu^2 - v, \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $u = u(t)$ thể hiện điện áp màng tế bào; $v = v(t)$ thể hiện cho các dòng ion chuyển động xuyên qua màng tế bào; các tham số $a = 3$, $b = 5$ là các hằng số được xác định bằng kinh nghiệm thực tiễn; I là cường độ dòng điện kích hoạt từ bên ngoài; t là biến chỉ thời gian.

Hệ phương trình (1) được xem như là mô hình của một tế bào thần kinh, sau đó chúng tôi xây dựng mô hình một mạng lưới tế bào của hai tế bào thần kinh liên kết tuyến tính hai chiều và một chiều. Lưu ý rằng, một mạng lưới tế bào thần kinh mô tả một quần thể của tế bào thần kinh được liên kết với nhau về mặt sinh lý học. Sự liên hệ giữa các tế bào chủ yếu dựa vào quá trình điện hóa. Bài báo này chỉ xét sự liên kết theo kiểu điện học, nghĩa là hàm liên kết sẽ được biểu diễn bởi một hàm số tuyến tính. Cụ thể, một mạng lưới gồm hai tế bào HR liên kết tuyến tính hai chiều được biểu diễn như sau (Corson, 2009; Ambrosio & Aziz-Alaoui, 2012; Ambrosio & Aziz-Alaoui, 2013):

$$\begin{cases} u_{1t} = v_1 - u_1^3 + au_1^2 + I - g_{syn}(u_1 - u_2), \\ v_{1t} = 1 - bu_1^2 - v_1, \\ u_{2t} = v_2 - u_2^3 + au_2^2 + I - g_{syn}(u_2 - u_1), \\ v_{2t} = 1 - bu_2^2 - v_2, \end{cases} \quad (2)$$

trong đó g_{syn} là một hằng số dương, được gọi là độ mạnh liên kết. Mạng lưới này được gọi là hai chiều vì nó có sự trao đổi thông tin qua lại giữa hai tế bào trong mạng lưới. Nói một cách khác, tế bào thứ nhất truyền thông tin đến tế bào thứ hai và tế bào thứ hai cũng truyền thông tin ngược lại cho tế bào thứ nhất.

Một cách tương tự, mạng lưới của hai tế bào thần kinh liên kết tuyến tính một chiều được cho bởi hệ phương trình sau (Corson, 2009):

$$\begin{cases} u_{1t} = v_1 - u_1^3 + au_1^2 + I, \\ v_{1t} = 1 - bu_1^2 - v_1, \\ u_{2t} = v_2 - u_2^3 + au_2^2 + I - g_{syn}(u_2 - u_1), \\ v_{2t} = 1 - bu_2^2 - v_2, \end{cases} \quad (3)$$

trong đó g_{syn} là một hằng số dương, được gọi là độ mạnh liên kết. Mạng lưới này được gọi là một chiều vì nó chỉ có sự trao đổi thông tin một chiều giữa hai tế bào trong mạng lưới. Nói một cách khác, tế bào thứ nhất truyền thông tin đến tế bào thứ hai và không nhận lại bất kì thông tin nào từ tế bào thứ hai.

Từ hai hệ phương trình (2) và (3), chúng tôi sẽ tìm điều kiện đủ cho sự đồng bộ hóa của hai mạng lưới này cũng như quan sát tốc độ cộng hưởng giữa chúng. Ngoài ra, chúng tôi còn đưa ra kết quả bằng phương pháp số được thực hiện trên R, để kiểm tra lại sự nhận định của kết quả lý thuyết.

2. Điều kiện đủ cho sự cộng hưởng của mạng lưới gồm hai tế bào thần kinh HR với liên kết tuyến tính

Trong phần này, chúng tôi nghiên cứu đưa ra điều kiện đủ cho sự cộng hưởng của hai mạng lưới (2) và (3). Từ đó, quan sát tốc độ cộng hưởng của hai mạng lưới này, cũng như trình bày kết quả bằng phương pháp số để kiểm tra lại kết quả lý thuyết tìm được.

Để tiện cho việc nghiên cứu, ở đây chúng tôi giới thiệu định nghĩa sự cộng hưởng đồng nhất giữa hai hệ phương trình vi phân được liên kết với nhau thành một mạng lưới.

Định nghĩa 1 (Ambrosio & Aziz-Alaoui, 2012). Đặt $S_i = (u_i, v_i)$, $i = 1, 2$, và $S = (S_1, S_2)$ là một mạng lưới. Chúng ta nói rằng S đồng bộ hóa đồng nhất nếu

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| = 0.$$

Dưới đây là Định lý về điều kiện đủ cho sự cộng hưởng trong mạng lưới gồm hai tế bào HR với liên kết tuyến tính 2 chiều.

Định lý 1. Nếu độ mạnh liên kết g_{syn} thỏa mãn điều kiện $g_{syn} \geq \max \left\{ \frac{a^2}{6}, \frac{1}{8\gamma} + \frac{(b-2a)^2}{8(3-\gamma b^2)} \right\}$, với $\gamma < \frac{3}{b^2}$ thì với mọi điều kiện ban đầu $u_i(0), v_i(0), i = 1, 2$, hệ phương trình (2) sẽ đồng bộ hóa theo Định nghĩa 1.

Chứng minh. Đặt $X = u_2 - u_1, Y = v_2 - v_1$ và $U = u_2 + u_1$. Khi đó, hệ phương trình (2) đối với các biến X, Y được cho bởi:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y - \frac{1}{4}X^3 + X(aU - \frac{3}{4}U^2 - 2g_{syn}), \\ \frac{dY}{dt} = -bXU - Y, \end{cases} \quad (4)$$

Chú ý rằng $(0,0)$ là điểm kì dị của hệ phương trình (3). Chọn hàm số Lyapunov như sau:

$$E(X,Y) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{\gamma}{2}Y^2,$$

trong đó, γ là hằng số dương. Lấy đạo hàm theo t của hàm số Lyapunov trên, ta được:

$$\frac{dE(X,Y)}{dt} = -\frac{X^4}{4} - (AX^2 + BXY + \gamma Y^2),$$

trong đó, $A = \frac{3}{4}U^2 - aU + 2g_{syn}$, $B = \gamma bU - 1$.

Có thể thấy rằng $AX^2 + BXY + \gamma Y^2 > 0$ nếu thỏa hai điều kiện sau đây:

(i) Vì $A = \frac{3}{4}U^2 - aU + 2g_{syn}$ nên nghiệm của phương trình $A=0$ là

$$U_{1,2} = \frac{2(a \pm \sqrt{a^2 - 6g_{syn}})}{3} \text{ nếu } g_{syn} \leq \frac{a^2}{6}. \text{ Do đó, } A > 0 \text{ nếu } g_{syn} > \frac{a^2}{6};$$

(ii) $\gamma A - \frac{B^2}{4} > 0 \Leftrightarrow (3 - \gamma b^2)U^2 - 2(a - 2b)U + 8g_{syn} - \frac{1}{\gamma} > 0$. Điều kiện này

$$\text{được thỏa nếu } g_{syn} > \frac{1}{8\gamma} + \frac{(b-2a)^2}{8(3-\gamma b^2)} \text{ và } \gamma < \frac{3}{b^2}.$$

Khi đó, nếu chọn $g_{syn} \geq \max\left\{\frac{a^2}{6}, \frac{1}{8\gamma} + \frac{(b-2a)^2}{8(3-\gamma b^2)}\right\}$ với $\gamma < \frac{3}{b^2}$ thì

$AX^2 + BXY + \gamma Y^2 > 0$. Điều đó dẫn đến $\frac{dE(X,Y)}{dt} < 0$, với mọi X, Y . Do đó, $(0,0)$ là nghiệm duy nhất của (4). Sử dụng lý thuyết ổn định Lyapunov và nguyên lý bất biến LaSalle (Aeyels, 1995), ta có $(0,0)$ là điểm ổn định tiệm cận toàn cục. Nghĩa là,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| = 0.$$

Định lí đã được chứng minh.

Tiếp theo là Định lí về điều kiện đủ cho sự cộng hưởng trong mạng lưới gồm 2 tế bào HR với liên kết tuyến tính một chiều.

Định lí 2. Nếu độ mạnh liên kết g_{syn} thỏa mãn điều kiện

$$g_{syn} \geq \max\left\{\frac{a^2}{3}, \frac{1}{4\gamma} + \frac{(b-2a)^2}{4(3-\gamma b^2)}\right\}, \text{ với } \gamma < \frac{3}{b^2} \text{ thì với mọi điều kiện ban đầu}$$

$u_i(0), v_i(0), i = 1, 2$, hệ phương trình (3) sẽ đồng bộ hóa theo Định nghĩa 1.

Chứng minh. Đặt $X = u_2 - u_1, Y = v_2 - v_1$ và $U = u_2 + u_1$. Khi đó, hệ phương trình (3) đổi với các biến X, Y được cho bởi:

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = Y - \frac{1}{4}X^3 + X(aU - \frac{3}{4}U^2 - g_{syn}), \\ \frac{dY}{dt} = -bXU - Y, \end{cases} \quad (5)$$

Chú ý rằng $(0,0)$ là điểm kì dị của hệ phương trình (3). Chọn hàm số Lyapunov như sau:

$$E(X, Y) = \frac{1}{2}X^2 + \frac{\gamma}{2}Y^2,$$

trong đó, γ là hằng số dương. Lấy đạo hàm theo t của hàm số Lyapunov trên, ta được:

$$\frac{dE(X, Y)}{dt} = -\frac{X^4}{4} - (AX^2 + BXY + \gamma Y^2),$$

trong đó, $A = \frac{3}{4}U^2 - aU + g_{syn}, B = \gamma bU - 1$.

Có thể thấy rằng $AX^2 + BXY + \gamma Y^2 > 0$ nếu thỏa hai điều kiện sau đây:

(iii) Vì $A = \frac{3}{4}U^2 - aU + g_{syn}$ nên nghiệm của phương trình $A = 0$ là

$$U_{1,2} = \frac{2(a \pm \sqrt{a^2 - 3g_{syn}})}{3} \text{ nếu } g_{syn} \leq \frac{a^2}{3}. \text{ Do đó, } A > 0 \text{ nếu } g_{syn} > \frac{a^2}{3};$$

(iv) $\gamma A - \frac{B^2}{4} > 0 \Leftrightarrow (3 - \gamma b^2)U^2 - 2(a - 2b)U + 4g_{syn} - \frac{1}{\gamma} > 0$. Điều kiện này

$$\text{được thỏa nếu } g_{syn} > \frac{1}{4\gamma} + \frac{(b - 2a)^2}{4(3 - \gamma b^2)} \text{ và } \gamma < \frac{3}{b^2}.$$

Khi đó, nếu chọn $g_{syn} \geq \max\left\{\frac{a^2}{3}, \frac{1}{4\gamma} + \frac{(b - 2a)^2}{4(3 - \gamma b^2)}\right\}$ với $\gamma < \frac{3}{b^2}$ thì

$AX^2 + BXY + \gamma Y^2 > 0$. Điều đó dẫn đến $\frac{dE(X, Y)}{dt} < 0$, với mọi X, Y . Do đó, $(0,0)$ là nghiệm duy nhất của (5). Sử dụng lý thuyết ổn định Lyapunov và nguyên lý bất biến LaSalle (Aeyels, 1995), ta có $(0,0)$ là điểm ổn định tiệm cận toàn cục. Nghĩa là,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1| = 0.$$

Định lí đã được chứng minh.

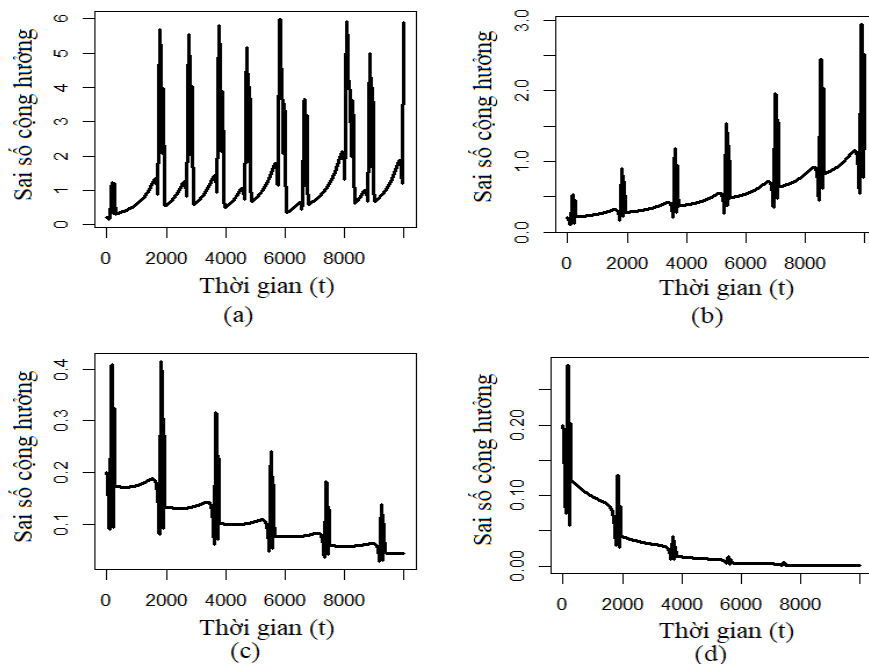
Nhận xét 1. Theo kết quả ở Định lí 1 và Định lí 2 ở trên, chúng ta có thể thấy rằng để có được sự cộng hưởng đồng nhất của mạng lưới hai tế bào thần kinh với liên kết tuyến tính hai chiều sẽ dễ dàng hơn sự cộng hưởng đồng nhất của mạng lưới hai tế bào thần kinh với liên kết tuyến tính một chiều. Bởi vì độ mạnh liên kết cần thiết để đồng bộ hóa hệ phương trình (2) là nhỏ hơn độ mạnh liên kết cần thiết để đồng bộ hóa hệ phương trình (3).

3. Kết quả bằng phương pháp số

Trong phần này, chúng tôi trình bày kết quả so sánh tốc độ cộng hưởng của hai mạng lưới (2) và (3) bằng phương pháp số để kiểm tra lại kết quả lý thuyết ở trên. Kết quả mô phỏng được thực hiện trên hai hệ phương trình (2) và (3), với các giá trị tham số như sau:

$$a = 3, b = 5, I = 0.$$

Chúng tôi mong muốn tìm được giá trị của độ mạnh liên kết đủ nhỏ cần thiết để cho sự đồng bộ hóa xảy ra trong hai mạng lưới (2) và (3) bằng phương pháp số. Từ đó, chúng tôi có thể quan sát xem sự cộng hưởng ở mạng lưới nào là dễ dàng hơn. Kết quả mô phỏng trong phần này được thực hiện trên R.



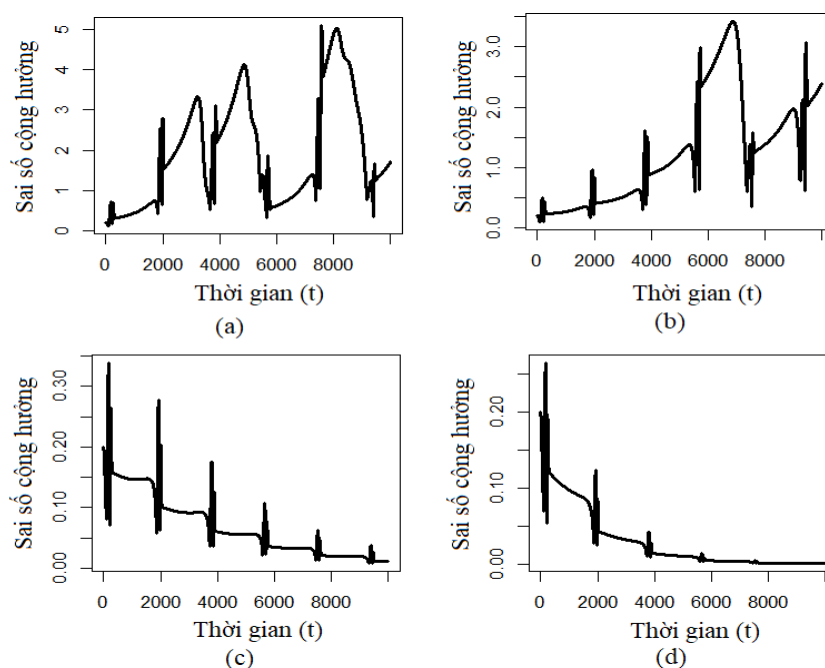
Hình 1. Sai số cộng hưởng giữa hai tế bào trong mạng lưới (2) theo thời gian tương ứng với các giá trị khác nhau của độ mạnh liên kết.

Hình 1(a), tương ứng với $g_{syn} = 0.2$, Hình 1(b) mô phỏng sai số cộng hưởng ứng với $g_{syn} = 0.5$; Hình 1(c) mô phỏng sai số cộng hưởng ứng với $g_{syn} = 0.6$. Ở các hình này, chúng ta cũng thấy hiện tượng đồng bộ hóa chưa xảy ra vì sai số cộng hưởng chưa tiến về 0. Hình 1(d), với $g_{syn} = 0.75$, chúng ta thấy sai số cộng hưởng tiến về 0. Nói một cách khác, sự cộng hưởng của mạng lưới (2) xảy ra.

Theo định nghĩa 1, ta gọi $|u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|$ là sai số cộng hưởng giữa hai tế bào trong các mạng lưới đang xét. Hình 1 minh họa cho sai số cộng hưởng giữa hai tế bào trong mạng lưới (2) theo thời gian. Các hình được sắp xếp theo thứ tự từ trái qua phải từ trên xuống dưới tương ứng với các giá trị tăng dần của độ mạnh liên kết, cũng như giúp chúng ta thấy được khi nào có sự đồng bộ hóa xảy ra. Nói một cách khác, hình 1(a), 1(b), 1(c), 1(d) mô phỏng cho sai số cộng hưởng theo thời gian giữa hai tế bào trong mạng lưới (2) với giá trị ban đầu $(-0.1, 0, 0, 0.1)$, và tương ứng với các giá trị khác nhau của độ mạnh liên kết. Có thể thấy rằng, ở hình 1(a), tương ứng với $g_{syn} = 0.2$, hiện tượng đồng bộ hóa chưa xảy ra vì sai số cộng hưởng chưa tiến về 0. Một cách tương tự, ở hình

1(b) mô phỏng sai số cộng hưởng ứng với $g_{syn} = 0.5$; hình 1(c) mô phỏng sai số cộng hưởng ứng với $g_{syn} = 0.6$. Ở các hình này, chúng ta cũng thấy hiện tượng đồng bộ hóa chưa xảy ra vì sai số cộng hưởng chưa tiến về 0. Tuy nhiên, ở hình 1(d), với $g_{syn} = 0.75$, chúng ta thấy sai số cộng hưởng tiến về 0. Nói một cách khác, sự cộng hưởng của mạng lưới (2) xảy ra khi $g_{syn} \geq 0.75$.

Hình 2 bên dưới minh họa cho sai số cộng hưởng giữa hai tế bào trong mạng lưới (3) theo thời gian. Các hình được sắp xếp theo thứ tự từ trái qua phải từ trên xuống dưới tương ứng với các giá trị tăng dần của độ mạnh liên kết, cũng như giúp chúng ta thấy được khi nào có sự đồng bộ hóa xảy ra. Nói một cách khác, hình 2(a), 2(b), 2(c), 2(d) mô phỏng cho sai số cộng hưởng theo thời gian giữa hai tế bào trong mạng lưới (3) với điều kiện ban đầu $(-0.1, 0, 0, 0.1)$, và tương ứng với các giá trị khác nhau của độ mạnh liên kết. Có thể thấy rằng, ở hình 2(a), tương ứng với $g_{syn} = 0.75$, hiện tượng đồng bộ hóa chưa xảy ra vì sai số cộng hưởng chưa tiến về 0. Một cách tương tự, ở hình 2(b) mô phỏng sai số cộng hưởng ứng với $g_{syn} = 1$; hình 2(c) mô phỏng sai số cộng hưởng ứng với $g_{syn} = 1.3$. Ở các hình này, chúng ta cũng thấy hiện tượng đồng bộ hóa chưa xảy ra vì sai số cộng hưởng chưa tiến về 0. Tuy nhiên, ở hình 2(d), với $g_{syn} = 1.5$, chúng ta thấy sai số cộng hưởng tiến về 0. Nói một cách khác, sự cộng hưởng của mạng lưới (3) xảy ra khi $g_{syn} \geq 1.5$.



Hình 2. Sai số cộng hưởng giữa hai tế bào trong mạng lưới (3) theo thời gian tương ứng với các giá trị khác nhau của độ mạnh liên kết.

Hình 2(a), tương ứng với $g_{syn} = 0.75$, Hình 2(b) mô phỏng sai số cộng hưởng ứng với $g_{syn} = 1$; Hình 2(c) mô phỏng sai số cộng hưởng ứng với $g_{syn} = 1.3$. Ở các hình này, chúng ta cũng thấy hiện tượng đồng bộ hóa chưa xảy ra vì sai số cộng hưởng chưa tiến về 0. Hình 2(d), với $g_{syn} = 1.5$, chúng ta thấy sai số cộng hưởng tiến về 0. Nói một cách khác, sự cộng hưởng của mạng lưới (3) xảy ra.

Nhận xét 2. Theo kết quả của phương pháp số đã được trình bày trong hình 1 và hình 2, chúng ta cần $g_{syn} = 1.5$ để có được sự đồng bộ hóa trong mạng lưới của hai tế bào thần kinh HR với liên kết tuyến tính một chiều (3). Trong khi đó, với $g_{syn} = 0.75$, chúng ta có thể thấy đã xảy ra sự đồng bộ hóa trong mạng lưới của hai tế bào thần kinh HR với liên kết tuyến tính hai chiều (2), và với cùng giá trị này thì mạng lưới (3) vẫn chưa đạt được sự cộng hưởng. Có nghĩa là để đạt được sự đồng bộ hóa trong mạng lưới của hai tế bào thần kinh HR với liên kết tuyến tính hai chiều dễ hơn sự đồng bộ hóa trong mạng lưới của hai tế bào thần kinh HR với liên kết tuyến tính một chiều. Nói một cách khác, sự cộng hưởng mạng lưới (2) sẽ nhanh hơn sự cộng hưởng mạng lưới (3). Kết quả này hoàn toàn phù hợp với kết quả lý thuyết đạt được ở trên (xem nhận xét 1).

4. Kết luận

Bài báo đã chỉ ra rằng sự đồng bộ hóa trong mạng lưới của hai tế bào thần kinh HR với liên kết tuyến tính hai chiều nhanh hơn sự đồng bộ hóa trong mạng lưới của hai tế bào thần kinh HR với liên kết tuyến tính một chiều. Bởi vì độ mạnh liên kết cần thiết để đồng bộ hóa hệ phương trình (2) nhỏ hơn độ mạnh liên kết cần thiết để đồng bộ hóa hệ phương trình (3). Nghiên cứu cũng trình bày kết quả bằng phương pháp số trên R cho phép chúng ta thấy được có sự tương quan giữa kết quả lý thuyết và phương pháp số.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Aeyels D. (1995). Asymptotic Stability of Nonautonomous Systems by Lyapunov's Direct Method. *Systems and Control Letters*, 25, 273-280.
- [2] Ambrosio, B., & Aziz-Alaoui, M. A. (2012). Synchronization and control of coupled reaction-diffusion systems of the FitzHugh-Nagumo-type. *Computers and Mathematics with Applications* 64, 934-943.
- [3] Ambrosio, B., & Aziz-Alaoui, M. A. (March 2013). Synchronization and control of a network of coupled reaction-diffusion systems of generalized FitzHugh-Nagumo type. *ESAIM: Proceedings*, Vol. 39, pp. 15-24.
- [4] Aziz-Alaoui, M. A. (2006). Synchronization of Chaos. *Encyclopedia of Mathematical Physics, Elsevier*, Vol. 5, pp. 213-226.
- [5] Corson, N. (2009). *Dynamique d'un modèle neuronal, synchronisation et complexité* (Luận án Tiến sĩ). Trường Đại học Le Havre, Pháp.
- [6] Ermentrout, G. B., & Terman, D. H. (2009). *Mathematical Foundations of Neurosciences*. Springer.
- [7] Hodgkin, A. L., & Huxley, A. F. (1952). A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *J. Physiol*, 117, 500-544.
- [8] Izhikevich, E. M. (2007). *Dynamical Systems in Neuroscience*. The MIT Press.
- [9] Keener, J. P., & Sneyd, J. (2009). *Mathematical Physiology*, Springer.
- [10] Murray, J. D. (2010). *Mathematical Biology*, Springer.
- [11] Nagumo, J., Arimoto, S., & Yoshizawa, S. (1962). An active pulse transmission line simulating nerve axon. *Proc. IRE*, 50, 2061-2070.
- [12] Phan Van Long Em. (2022). Sufficient Condition for Synchronization in Complete Networks of Reaction-Diffusion Equations of Hindmarsh-Rose Type with Linear Coupling. *IAENG International Journal of Applied Mathematics*, 52(2), 315-319.
- [13] Phan Van Long Em (2023). Sufficient Condition for Synchronization in Complete Networks of n Reaction-Diffusion Systems of Hindmarsh-Rose Type with Nonlinear Coupling. *Engineering Letters*, 31(1), 413-418.