

PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC GIẢI QUYẾT VẤN ĐỀ TOÁN HỌC CHO HỌC SINH LỚP 12 THÔNG QUA DẠY HỌC GIẢI BÀI TẬP CHỦ ĐỀ “DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG”

Huỳnh Ngọc Diễm⁽¹⁾

(1) Trường Đại học Thủ Dầu Một

Ngày nhận bài 6/5/2025; Chấp nhận đăng 20/5/2025

Liên hệ email: diemhn@tdmu.edu.vn

Tóm tắt

Năng lực giải quyết vấn đề toán học là một trong năm năng lực quan trọng mà học sinh các cấp cần phải đạt được theo Chương trình Giáo dục phổ thông môn toán của Bộ Giáo dục và Đào tạo được ban hành năm 2018. Có rất nhiều phương pháp được đề xuất nhằm phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh trong dạy học môn toán trong nhiều nghiên cứu. Bài viết đề cập đến các biểu hiện, quy trình và phương pháp dạy học theo hướng phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh lớp 12 thông qua dạy học giải bài tập chủ đề "Diện tích hình phẳng".

Từ khóa: giải quyết vấn đề toán học, năng lực toán học, ứng dụng hình học của tích phân

Abstract

**DEVELOPING MATHEMATICAL PROBLEM SOLVING CAPACITY FOR
GRADE 12 STUDENTS THROUGH TEACHING SOLVING EXERCISES
TOPIC "AREA OF PLANE FIGURES"**

Mathematical problem solving capacity is one of the five important capacities that students at all levels need to achieve according to the General Education Mathematics Program of the Ministry of Education and Training issued in 2018. There are many methods proposed to develop mathematical problem solving capacity for students in teaching mathematics in many studies. This article discusses the manifestation, processes and teaching methods towards developing mathematical problem solving capacity for 12th grade students through teaching and solving exercises on the topic "Area of plane figures".

1. Giới thiệu

Trong Chương trình Giáo dục phổ thông năm 2018 của Bộ Giáo dục và đào tạo đã nêu rõ mục tiêu của môn toán cấp trung học phổ thông như sau: "Góp phần hình thành và phát triển năng lực toán học với yêu cầu cần đạt: nêu và trả lời được câu hỏi khi lập luận, giải quyết vấn đề; sử dụng được các phương pháp lập luận, quy nạp và suy diễn để hiểu được những cách thức khác nhau trong việc giải quyết vấn đề; thiết lập được mô hình hóa để mô tả tình huống, từ đó đưa ra cách giải quyết vấn đề toán học đặt ra trong mô hình được thiết lập; thực hiện và trình bày được giải pháp giải quyết vấn đề và đánh giá được giải pháp đã thực hiện, phản ánh được giá trị của giải pháp, khái quát hóa được cho vấn đề tương tự; sử dụng được công cụ, phương tiện toán trong học tập, khám phá và giải quyết vấn đề toán học".

Môn toán là một trong những thành tố quan trọng, góp phần hình thành và phát triển cho học sinh năng lực toán học gồm năm thành phần cốt lõi sau: năng lực tư duy và lập luận toán học; năng lực mô hình hóa toán học; năng lực giải quyết vấn đề toán học; năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán. Chúng ta thấy rằng năng lực giải quyết vấn đề toán học là một trong những năng lực toán học nòng cốt mà học sinh cần đạt được khi học toán. Phan Anh Tài (2014) cho rằng năng lực hiểu, phát hiện và đưa ra được biện pháp giải quyết được vấn đề là các yếu tố quan trọng hình thành nên năng lực giải quyết vấn đề toán học của học sinh. Năng lực giải quyết vấn đề toán học được học sinh thể hiện ở chỗ: Nhận biết, phát hiện, xác định được vấn đề cần giải quyết bằng toán học; từ các dữ kiện đề bài cho, học sinh có thể lựa chọn và đề xuất được hướng giải quyết bằng cách sử dụng linh hoạt, kết hợp các kiến thức, kỹ năng toán học tương thích để giải quyết vấn đề đặt ra. Thông qua đó, học sinh có thể trình bày hoặc đánh giá được giải pháp đề ra, khái quát hóa được cho vấn đề tương tự và các bài toán có yếu tố thực tiễn.

Trong chương trình toán lớp 12, chuyên đề Ứng dụng hình học của tích phân trong đó chủ đề "Diện tích hình phẳng" là một vấn đề thú vị đối với học sinh. Các em học sinh sẽ tiếp cận với nhiều dạng bài tập khác nhau liên quan đến chủ đề này. Để giải thành thạo các dạng bài tập trong chủ đề, học sinh cần nắm thật vững kiến thức, đồng thời phải biết cách vận dụng linh hoạt vào từng tình huống toán học cụ thể của từng dạng bài tập để giải quyết được vấn đề đặt ra. Với mong muốn giúp cho năng lực giải quyết vấn đề toán học của học sinh được phát triển khi học chủ đề này, bài viết đề cập đến các biểu hiện và quy trình dạy học, đồng thời, đề xuất hai phương thức dạy học giải bài tập chủ đề " Diện tích hình phẳng" theo hướng phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh lớp 12.

2. Tổng quan các nghiên cứu trước

Việc phát triển năng lực giải quyết vấn đề cho học sinh trong dạy học môn toán đặc biệt là học sinh cấp trung học phổ thông được nhiều nhà nghiên cứu, nhà giáo dục quan tâm. Các biểu hiện và cấu trúc của năng lực giải quyết vấn đề đã được nhóm tác giả Đỗ Thị Hồng Minh và Bùi Minh Đức (2019) tìm hiểu, nghiên cứu. Đặc biệt, nhóm tác giả quan tâm việc phát triển năng lực thông qua các câu hỏi định hướng, song song đó nhóm tác giả phân biệt câu hỏi truyền thống và câu hỏi định hướng để từ đó thiết kế một số dạng bài tập nhằm đánh giá năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh khi dạy học chủ đề liên quan đến “hàm số”. Nguyễn Ngọc Hà và Nguyễn Văn Thái Bình (2020) cho rằng đôi khi việc giải một số phương trình bằng phương pháp cơ bản thông thường sẽ đưa phương trình trở nên phức tạp hơn, học sinh sẽ gặp khó khăn trong quá trình giải, tuy nhiên nếu đưa về phương pháp vectơ thì việc giải bài toán trở nên đơn giản hơn rất nhiều. Bên cạnh đó, nhóm tác giả đã đưa ra một số ví dụ minh họa cùng những phân tích rất chi tiết, cụ thể nhằm giúp học sinh phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học khi áp dụng phương pháp vectơ vào giải một số phương trình. Võ Xuân Mai và Tô Quốc Lộc (2023) đã trình bày bốn biện pháp nhằm giúp học sinh phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học thông qua dạy học giải bài tập nội dung phương trình quy về phương trình bậc hai trong chương trình lớp 10. Các biện pháp được xây dựng nhằm giúp học sinh nắm vững và vận dụng được các kiến thức đã học vào giải bài tập, đồng thời giúp học sinh thực hiện thành thạo quy trình giải bài tập theo hướng phát triển năng lực, học sinh có thể nhìn vấn đề theo nhiều góc độ khác nhau để từ đó có thể đưa ra nhiều lời giải khác nhau cho cùng một bài toán, hơn nữa học sinh có thể áp dụng phương trình giải các bài toán có yếu tố

thực tiễn để thấy được tính ứng dụng của kiến thức đã học vào cuộc sống hàng ngày. Nguyễn Hữu Hậu và nnk. (2023) đã đề xuất các phương pháp khi dạy học chủ đề các hệ thức lượng trong tam giác nhằm phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh, các phương pháp tập trung việc thiết kế, xây dựng các hình ảnh, mô hình trực quan; tạo các tình huống có yếu tố thực tế nhằm tạo động lực cho học sinh vận dụng kiến thức đã học vào giải quyết các vấn đề thực tiễn.

Mặc dù có nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu đến việc đề xuất các phương pháp dạy học nhằm phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh với nhiều chủ đề khác nhau trong chương trình toán trung học phổ thông. Tuy nhiên, chúng tôi vẫn chưa tìm thấy nghiên cứu đề cập đến việc phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh khi học chủ đề “Diện tích hình phẳng” trong chương trình toán lớp 12, do đó bài viết tiếp tục tiếp cận hướng nghiên cứu này và đề xuất các phương thức dạy học nhằm phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh lớp 12 thông qua chủ đề “Diện tích hình phẳng”.

3. Nội dung và kết quả nghiên cứu

3.1. Năng lực giải quyết vấn đề toán học

Có nhiều quan niệm khác nhau về năng lực giải quyết vấn đề toán học, nhưng có thể hiểu một cách chung nhất là năng lực giải quyết vấn đề toán học của học sinh được hợp thành từ các yếu tố, bao gồm: năng lực đọc, hiểu vấn đề; năng lực tìm tòi để đề xuất biện pháp giải quyết cho vấn đề đặt ra từ các kiến thức, kỹ năng, kinh nghiệm trong quá trình học toán; song song đó có thể phát hiện nhiều giải pháp khác nhau có thể cùng giải quyết cho một vấn đề từ đó học sinh biết cân nhắc, lựa chọn biện pháp phù hợp cũng như biết vận dụng để giải quyết vấn đề có yếu tố tương tự và có yếu tố thực tế.

Giải quyết vấn đề toán học là năng lực đòi hỏi học sinh phải biết kết hợp một cách linh hoạt, hài hòa, đồng bộ giữa các yếu tố như: phát hiện, nhận biết, xác định được các vấn đề toán học được nêu ra, từ đó học sinh vận dụng các kiến thức toán học kết hợp kỹ năng xử lý tình huống toán học để đề ra phương án tối ưu nhất để giải quyết vấn đề được đặt ra.

Việc phát triển các năng lực toán học đặc thù nói chung, năng lực giải quyết vấn đề toán học nói riêng là vấn đề rất cần thiết và cần phải thực hiện trong quá trình dạy học đặc biệt là dạy học giải bài tập. Thông qua việc giải bài tập học sinh có thể khám phá, phát hiện ra nhiều hướng để giải một bài toán không có sẵn thuật toán cũng như quy trình cụ thể.

Bảng sau trình bày lại các thành phần của năng lực giải quyết vấn đề toán học và yêu cầu cần đạt của học sinh cấp trung học phổ thông theo Bộ giáo dục và đào tạo (2018):

Năng lực giải quyết vấn đề toán học	
Thành phần năng lực	Yêu cầu cần đạt
- Nhận biết, phát hiện được vấn đề cần giải quyết bằng toán học.	- Xác định được tình huống có vấn đề; thu thập, sắp xếp, giải thích và đánh giá được độ tin cậy của thông tin; chia sẻ sự am hiểu vấn đề với người khác.
- Lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề.	- Lựa chọn và thiết lập được cách thức, quy trình giải quyết vấn đề.
- Sử dụng được các kiến thức, kỹ năng toán học tương thích (bao gồm các công cụ và thuật toán) để giải quyết vấn đề.	- Thực hiện và trình bày được giải pháp giải quyết vấn đề.
- Đánh giá được giải pháp đề ra và khái quát hóa được cho vấn đề tương tự.	- Đánh giá được giải pháp đã thực hiện; phản ánh được giá trị của giải pháp; khái quát hóa được cho vấn đề tương tự.

Từ những yêu cầu trên, chúng tôi đề xuất quy trình dạy học giải bài tập nhằm giúp cho học sinh cấp trung học phổ thông nói chung và học sinh lớp 12 nói riêng phát triển được năng lực giải quyết vấn đề toán học, cụ thể như sau:

Bước 1: Nhận biết, phát hiện được vấn đề cần giải quyết bằng toán học: Ở bước này, học sinh cần đọc kỹ đề bài để xác định giả thiết - kết luận của bài toán, từ đó rút ra được vấn đề cần giải quyết thông qua việc thu thập các dữ kiện của đề bài.

Bước 2: Lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề: Ở bước này, học sinh tìm cách giải bài toán bằng cách tổng hợp các giả thiết, các dữ kiện của bài toán, lựa chọn phương pháp phù hợp với các điều kiện của đề bài để từ đó đưa ra cách giải tối ưu cho bài toán.

Bước 3: Sử dụng được các kiến thức, kỹ năng toán học tương thích (bao gồm các công cụ và thuật toán) để giải quyết vấn đề: Ở bước này, từ giải pháp tìm được ở trên, học sinh sẽ trình bày bài giải một cách chi tiết và đầy đủ bằng cách kết hợp giữa ngôn ngữ và ký hiệu toán học.

Bước 4: Đánh giá được giải pháp đề ra và khái quát hóa được cho vấn đề tương tự: Ở bước này, học sinh đánh giá được bài giải đã thực hiện, biết cách vận dụng vào các dạng toán tương tự và dạng toán nâng cao hoặc những bài toán có yếu tố thực tế.

3.2. Các phương thức dạy học giải bài tập chủ đề "Diện tích hình phẳng" giúp học sinh lớp 12 phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học

3.2.1. Phương thức 1: Vận dụng công thức để giải quyết các bài tập về tính diện tích hình phẳng

Để làm được dạng bài tập liên quan chủ đề "Diện tích hình phẳng", học sinh cần nắm vững và vận dụng thành thạo các công thức tính diện tích hình phẳng trong các trường hợp khác nhau. Bên cạnh đó, học sinh cần đọc kỹ đề bài để xác định đúng trường hợp và áp dụng đúng công thức để giải bài toán.

Cách thức tổ chức:

Giáo viên yêu cầu học sinh trình bày lại các dạng bài tập về tính diện tích hình phẳng.

Giáo viên yêu cầu học sinh trình bày chi tiết cách giải của từng dạng bài tập đã nêu ở bước trên.

Qua các câu trả lời của học sinh, giáo viên tổng kết, hệ thống lại kiến thức, xây dựng các dạng bài tập cơ bản và phương pháp giải cụ thể của từng dạng về tính diện tích hình phẳng.

Giáo viên đưa ra một số bài tập để học sinh tự luyện tập. Ở bước này, cần có sự kết hợp hài hòa, linh hoạt giữa giáo viên và học sinh để tiến trình dạy học giải bài tập đạt hiệu quả cao, cụ thể như sau:

* Về phía giáo viên: Giáo viên cần lựa chọn bài tập/tình huống phù hợp với nội dung nhằm đạt được mục tiêu kiến thức đề ra. Song song đó, giáo viên cần dự kiến việc đặt các câu hỏi và câu trả lời mong đợi trong mỗi bước của quy trình. Cuối cùng, yêu cầu học sinh giải bài tập theo quy trình các bước đã đề ra.

* Về phía học sinh: Thực hiện giải bài tập hoặc giải quyết tình huống toán học theo quy trình, gồm: Xác định được vấn đề cần giải quyết; tìm tòi, định hướng, lựa chọn phương pháp giải; đưa ra lời giải chi tiết, phù hợp; rút ra được phương pháp giải cho các bài tập tương tự hoặc nâng cao đặc biệt là các bài toán có yếu tố thực tiễn.

Ví dụ. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số:
 $y = u(x) = x^3 + 3x^2 - 2$, $y = v(x) = x^2 + x$.

Để giải bài tập trên, học sinh sẽ thực hiện đầy đủ các bước sau:

Bước 1: Xác định được vấn đề cần giải quyết bằng toán học: Thông qua đề bài, học sinh tìm được yêu cầu cần thực hiện là gì? đề bài đã đầy đủ dữ kiện để tính diện tích hình phẳng chưa? giáo viên cần đặt câu hỏi để gợi ý cho học sinh giải quyết vấn đề: khi tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số, ta cần tìm dữ kiện nào? từ dữ kiện đề bài ta có thể dễ dàng tìm được những yếu tố cần có để tính diện tích hình phẳng không? nếu có, ta sẽ tìm như thế nào?

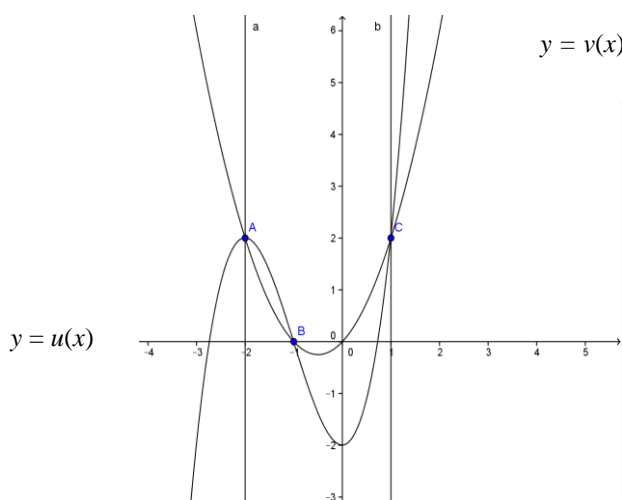
Bước 2: Lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề: Học sinh sẽ lựa chọn và đưa ra phương pháp giải cho bài tập thông qua một số câu hỏi gợi ý của giáo viên: Các trường hợp thường gặp khi tính diện tích hình phẳng là các trường hợp nào? việc vẽ đồ thị liệu có thể giúp chúng ta dễ dàng tính được diện tích hình phẳng theo yêu cầu không, vì sao?

Học sinh đề xuất các phương pháp giải cho bài tập này: Cách 1: vẽ đồ thị của hai hàm số, dựa vào đồ thị các hàm số tìm phân tích diện tích, tìm cận của tích phân rồi áp dụng công thức tính diện tích. Cách 2: giải phương trình hoành độ giao điểm để tìm được cận của tích phân, từ đó áp dụng công thức để tính diện tích hình phẳng theo yêu cầu đề bài; nếu sử dụng phương pháp vẽ đồ thị thì đồ thị cần phải được vẽ thật chính xác để xác định đúng giao điểm của đồ thị, giáo viên cần yêu cầu học sinh nhắc lại việc vẽ đồ thị hàm số bậc ba và hàm số bậc hai đã được học; nếu sử dụng phương pháp giải phương trình hoành độ giao điểm, học sinh phải giải phương trình bậc ba và lưu ý việc chọn cận của tích phân từ nghiệm cho phù hợp.

Bước 3: Kết hợp các kiến thức, kỹ năng toán học để giải quyết vấn đề:

Lời giải mong đợi cho phương pháp vẽ đồ thị hai hàm số:

Trên cùng một hệ trục tọa độ, vẽ đồ thị các hàm số $y = u(x) = x^3 + 3x^2 - 2$, $y = v(x) = x^2 + x$ ta được:



Hình 1. Đồ thị hàm số $y = u(x)$ và $y = v(x)$

Thông qua đồ thị các hàm số, ta tính được diện tích hình phẳng được giới hạn bởi đồ thị các hàm số đã cho như sau:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^{-1} [u(x) - v(x)] dx + \int_{-1}^1 [v(x) - u(x)] dx \\
 &= \int_{-2}^{-1} (x^3 + 2x^2 - x - 2) dx + \int_{-1}^1 (-x^3 - 2x^2 + x + 2) dx \\
 &= \frac{5}{12} + \frac{8}{3} = \frac{37}{12} \text{ (đvdt)}.
 \end{aligned}$$

Lời giải mong đợi cho phương pháp giải phương trình hoành độ giao điểm:

Phương trình hoành độ giao điểm của $u(x)$ và $v(x)$ là:

$$\begin{aligned}
 u(x) = v(x) &\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 2 = x^2 + x, \\
 &\Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0, \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1. \\ x = 1 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_{-2}^1 |u(x) - v(x)| dx = \int_{-2}^1 |x^3 + 2x^2 - x - 2| dx$$

* Lập bảng xét dấu biểu thức $r(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$:

$$\text{Ta có: } r(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + 2x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -1. \\ x = 1 \end{cases}$$

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-2		-1		1		$+\infty$
$r(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$

Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $r(x) \geq 0$ khi $x \in [-2; -1]$ và $r(x) \leq 0$ khi $x \in [-1; 1]$.

Do đó trên đoạn $[-2; -1]$, ta có: $|x^3 + 2x^2 - x - 2| = x^3 + 2x^2 - x - 2$.

Và trên đoạn $[-1; 1]$, ta có: $|x^3 + 2x^2 - x - 2| = -(x^3 + 2x^2 - x - 2)$.

Vậy:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_{-2}^{-1} (x^3 + 2x^2 - x - 2) dx - \int_{-1}^1 (x^3 + 2x^2 - x - 2) dx \\
 &= \frac{5}{12} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \frac{37}{12} \text{ (đvdt)}.
 \end{aligned}$$

Bước 4: *Đánh giá được giải pháp đề ra và khái quát hóa được cho vấn đề tương tự*: Đối với phương pháp vẽ đồ thị hàm số, học sinh cần phải vẽ đúng để việc tìm giao điểm của các đồ thị được chính xác. Đối với phương pháp giải phương trình hoành độ giao điểm, học sinh sẽ chọn nghiệm bé nhất và nghiệm lớn nhất của phương trình để đưa vào cận của tích phân trong công thức và lưu ý cần xét dấu của biểu thức trong dấu giá trị tuyệt đối để tách cận tích phân cho phù hợp. Sau khi xem hai phương pháp giải cho bài tập, học sinh tự nhận định phương pháp nào giải bài toán nhanh hơn, phù hợp hơn trong trường hợp tổng quát đồng thời học sinh khái quát hóa vấn đề và nhắc lại:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = u(x)$, $y = v(x)$ được xác định

bởi công thức: $S = \int_{x_0}^{x_n} |u(x) - v(x)| dx$, trong đó x_0, x_n lần lượt là nghiệm nhỏ nhất, nghiệm

lớn nhất của phương trình $u(x) = v(x)$.

Nhận xét. Qua ví dụ này, năng lực giải quyết vấn đề toán học của học sinh sẽ được phát triển dựa vào những việc cụ thể sau: học sinh nhận dạng, biết vận dụng kiến thức, lựa chọn công thức để giải quyết vấn đề phù hợp với dữ kiện đề bài đặt ra. Từ đó học sinh có thể khái quát hóa vấn đề để thực hiện giải quyết các dạng bài tập tương tự.

3.2.2. *Phương thức 2: Tự tìm tòi, khám phá, kết nối, vận dụng nội dung bài toán với các kiến thức đã học để đưa về dạng cơ bản áp dụng công thức tính diện tích hình phẳng*

Có nhiều dạng bài tập đòi hỏi học sinh phải vận dụng, kết hợp nhiều kiến thức liên quan của những nội dung bài học trước thì mới giải quyết được vấn đề đặt ra. Các bài tập này rèn luyện cho học sinh năng lực tư duy và huy động các kiến thức vốn có để từ giả thiết bài toán lựa chọn được phương pháp tối ưu để giải quyết vấn đề trong bài toán.

* Cách thức tổ chức:

Giáo viên lựa chọn để đưa ra những bài toán cần những kiến thức của những bài học trước đó để giải quyết bài toán có liên quan diện tích hình phẳng.

Giáo viên cần xây dựng bộ câu hỏi liên quan các kiến thức đã được học nhằm giúp học sinh dễ dàng tìm được hướng giải quyết cho vấn đề được đặt ra.

Học sinh cần nắm vững các kiến thức liên quan để trả lời được các câu hỏi gợi mở của giáo viên, từ đó tìm được giải pháp để giải quyết vấn đề trong bài toán.

Ví dụ. Cho hàm số $y = p(x) = x^4 + mx^3 + nx^2 + ux + v$ (với m, n, u, v là các số thực) có ba điểm cực trị là 1; 2; 3. Gọi $y = q(x) = ax^2 + bx + c$ (với a, b, c là các số thực) là hàm số bậc hai có đồ thị đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = p(x)$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số $y = p(x)$ và $y = q(x)$.

Để giải bài tập trên, học sinh sẽ thực hiện đầy đủ các bước sau:

Bước 1: *Xác định được vấn đề cần giải quyết bằng toán học*: Học sinh đọc kỹ đề bài, tự đặt câu hỏi: Để tính diện tích hình phẳng theo yêu cầu cần xác định gì? Làm sao để tìm được các hàm số $y = p(x)$ và $y = q(x)$?

Giáo viên cần đặt câu hỏi để gợi ý cho học sinh tìm được hàm số $y = p(x)$ và $y = q(x)$, từ đó giúp học sinh giải quyết được vấn đề: Điều kiện liên quan hàm số đạt cực trị tại điểm x_0 là gì? đồ thị hai hàm số cắt nhau tại điểm x_0 giúp ta có được điều kiện

gì? đề bài cho hàm số $y = p(x)$ đạt cực trị tại ba điểm 1;2;3, tức là ta có được các điều kiện gì? dữ kiện hàm số $y = q(x)$ đi qua ba điểm cực trị của hàm số $y = p(x)$ giúp ta có thêm những điều kiện nào? từ các điều kiện này đủ giúp chúng ta tìm được hàm số $y = p(x)$ và $y = q(x)$ không, vì sao?

Bước 2: Lựa chọn, đề xuất được cách thức, giải pháp giải quyết vấn đề: Học sinh sẽ lựa chọn và đưa ra phương pháp giải cho bài tập thông qua một số câu hỏi gợi ý của giáo viên: để tìm hàm số $y = p(x)$, bước đầu tiên ta cần làm gì? từ dữ kiện đề bài làm cách nào để tìm được hàm số $y = p(x)$, vì sao? để tìm hàm số $y = q(x)$, ta cần thực hiện như thế nào?

Học sinh đề xuất phương pháp giải cho bài tập này: Đầu tiên, ta sẽ tính $p'(x)$, từ điều kiện hàm số đạt cực trị tại điểm ta có hệ phương trình gồm ba ẩn ba phương trình, giải hệ phương trình này ta tìm được hàm số $y = p(x)$. Tiếp theo dựa vào điều kiện tương giao của hai đồ thị hàm số, ta lại có hệ phương trình gồm ba ẩn ba phương trình, giải hệ phương trình này ta tìm được hàm số $y = q(x)$. Khi đã có hai hàm số $y = p(x)$ và $y = q(x)$, dễ dàng tính được diện tích hình phẳng theo yêu cầu đề bài.

Bước 3: Kết hợp các kiến thức, kỹ năng toán học để giải quyết vấn đề:

Lời giải mong đợi:

* Ta có: $p'(x) = 4x^3 + 3mx^2 + 2nx + u$.

Vì hàm số $y = p(x)$ đạt cực trị tại ba điểm 1;2;3 nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} p'(1) = 0 \\ p'(2) = 0 \\ p'(3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 3m + 2n + u = 0 \\ 32 + 12m + 4n + u = 0 \\ 108 + 27m + 6n + u = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 2n + u = -4 \\ 12m + 4n + u = -32 \\ 27m + 6n + u = -108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -8 \\ n = 22 \\ u = -24 \end{cases}$$

Suy ra hàm số $y = p(x) = x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + v$.

* Theo giả thiết, đồ thị hàm số $y = q(x)$ đi qua ba điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = p(x)$ nên hai đồ thị này cắt nhau tại các điểm có hoành độ lần lượt là 1;2;3, tức là:

$$\begin{cases} q(1) = p(1) \\ q(2) = p(2) \\ q(3) = p(3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -9 + v \\ 4a + 2b + c = -8 + v \\ 9a + 3b + c = -9 + v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = -9 + v \\ 4a + 2b + c = -8 + v \\ 8a + 2b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -3a + c = -9 + v \\ -4a + c = -8 + v \\ b = -4a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \\ c = -12 + v \end{cases}$$

Suy ra hàm số $y = q(x) = -x^2 + 4x - 12 + v$.

* Phương trình hoành độ giao điểm của $y = p(x)$ và $y = q(x)$ là:

$$x^4 - 8x^3 + 22x^2 - 24x + v = -x^2 + 4x - 12 + v$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

* Diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S = \int_1^3 |p(x) - q(x)| dx = \int_1^3 |x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12| dx$$

Lập bảng xét dấu biểu thức $h(x) = x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12$:

Ta có: $h(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2 \\ x = 3 \end{cases}$ trong đó $x = 2$ là

nghiệm kép.

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$
$h(x)$	+	0	-	0	+

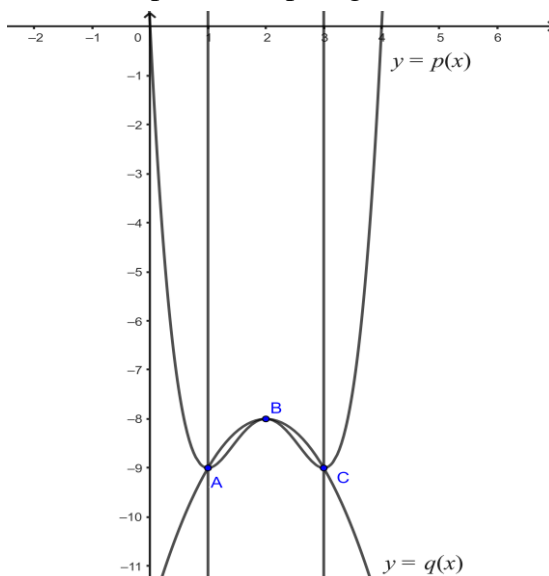
Dựa vào bảng xét dấu, ta thấy $h(x) \leq 0$ khi $x \in [1; 3]$. Do đó trên đoạn $[1; 3]$, ta có:

$$|x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12| = -(x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12)$$

Vậy:

$$S = -\int_1^3 (x^4 - 8x^3 + 23x^2 - 28x + 12) dx = \frac{4}{15} \text{ (đvdt).}$$

* Giáo viên vẽ đồ thị để minh họa phần hình phẳng cần tính diện tích:



Hình 2. Đồ thị hàm số $y = p(x)$ và $y = q(x)$

Dựa vào đồ thị ta thấy phần giao của đồ thị hàm số $y = p(x)$ và đồ thị hàm số $y = q(x)$ nằm phía dưới trục hoành, đây là phần hình phẳng cần tìm diện tích. Điều này giúp học sinh hiểu rõ hơn lý do vì sao có dấu “-” khi bỏ dấu giá trị tuyệt đối trong công thức tính diện tích.

Bước 4: Đánh giá được giải pháp đề ra và khái quát hóa được cho vấn đề tương tự: Học sinh đã huy động các kiến thức đã được học trước đó để giải quyết vấn đề đặt ra của bài tập này, cụ thể là: kiến thức liên quan cực trị, kiến thức liên quan sự tương giao của các đồ thị, kiến thức về hệ phương trình ba ẩn ba phương trình. Từ đó, học sinh thấy được tầm quan trọng của việc kết nối và vận dụng các kiến thức đã được học với các kiến thức trong bài học mới để giải quyết vấn đề liên quan.

Nhận xét. Qua ví dụ này, năng lực giải quyết vấn đề toán học của học sinh sẽ được phát triển dựa vào những việc cụ thể sau: học sinh nhận dạng, tìm tòi được vấn đề đặt ra; biết vận dụng, kết nối kiến thức đã học từ đó lựa chọn được giải pháp tối ưu để giải quyết vấn đề phù hợp với dữ kiện đề bài đặt ra. Đồng thời, học sinh thấy được sự liên kết của các kiến thức đã học với kiến thức mới giúp học sinh tổng quát hóa vấn đề để thực hiện giải quyết các dạng bài tập tương tự.

4. Kết luận

Bài viết đã trình bày các nội dung liên quan đến năng lực giải quyết vấn đề toán học của học sinh trung học phổ thông theo Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán năm 2018, từ đó đề xuất quy trình dạy học giải bài tập nhằm giúp cho năng lực giải quyết vấn đề toán học của học sinh được phát triển. Đồng thời, bài viết đề xuất hai phương thức dạy học giải bài tập về chủ đề “Diện tích hình phẳng” – đây là chủ đề chưa được đề cập trong các nghiên cứu trước đó, nhằm phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh lớp 12 khi học về chủ đề này. Ở mỗi phương thức, chúng tôi trình bày chi tiết ví dụ minh họa với mong muốn có thể giúp giáo viên có thêm cách tổ chức linh hoạt khi dạy học về ứng dụng hình học của tích phân nói chung và diện tích hình phẳng nói riêng để đạt được mục tiêu cuối cùng là phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh lớp 12.

Trong tương lai, chúng tôi tiếp tục nghiên cứu đến các năng lực toán học đặc thù khác mà học sinh trung học phổ thông cần đạt và đề xuất biện pháp dạy học nhằm giúp học sinh phát triển tốt các năng lực toán học đó.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể*. Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26 tháng 12 năm 2018 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo.
- [2] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*. Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26 tháng 12 năm 2018 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo.
- [3] Đỗ Thị Hồng Minh, Bùi Minh Đức (2019). Xây dựng câu hỏi, bài tập kiểm tra, đánh giá năng lực giải quyết vấn đề toán học của học sinh trung học phổ thông trong dạy học chủ đề hàm số. *Tap chí Giáo dục*, số đặc biệt kỳ 2, 226 - 234.

- [4] Nguyễn Hữu Hậu, Hoa Ánh Tường, Lê Huỳnh Vũ, Trịnh Thị Lê Mai (2023). Phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh lớp 10 khi dạy học chủ đề các hệ thức lượng trong tam giác. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Hồng Đức*, 63, 39-52.
- [5] Nguyễn Ngọc Hà, Nguyễn Văn Thái Bình (2020). Phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học trong dạy học giải phương trình bằng phương pháp vectơ ở trường trung học phổ thông. *Tạp chí Giáo dục*, số đặc biệt kỳ 1, 98-104.
- [6] Phan Anh Tài (2014). *Đánh giá năng lực giải quyết vấn đề của học sinh trong dạy học toán lớp 11 Trung học phổ thông* (Luận án tiến sĩ). Trường Đại học Vinh.
- [7] Trần Nam Dũng (Tổng chủ biên), Trần Đức Huyền, Nguyễn Thành Anh (đồng Chủ biên), Vũ Như Thư Hương, Ngô Hoàng Long, Phạm Hoàng Quân, Phạm Thị Thu Thủy (2024). *Sách giáo khoa Toán 12 - Tập 2 - Chân trời sáng tạo*. NXB Giáo dục.
- [8] Trần Văn Hạo (Tổng chủ biên), Vũ Tuấn (Chủ biên), Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Tiên Tài, Cấn Văn Quát (2008). *Sách giáo khoa Giải tích 12*. NXB Giáo dục.
- [9] Võ Xuân Mai, Tô Quốc Lộc (2023). Phát triển năng lực giải quyết vấn đề toán học cho học sinh lớp 10 qua dạy học giải bài tập phương trình quy về phương trình bậc hai. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp*, 12(6), 3-11.
- [10] Vũ Tuấn (Chủ biên), Lê Thị Thiên Hương, Nguyễn Thu Nga, Phạm Phú, Nguyễn Tiên Tài, Cấn Văn Quát (2008). *Sách bài tập Giải tích 12*. NXB Giáo dục.