

HÌNH HỌC FRACTAL, ỨNG DỤNG VÀ MỘT SỐ VẤN ĐỀ CÒN TỒN TẠI

Phạm Anh Phương⁽¹⁾

*(1) Trường Đại học Sư phạm – Đại học Đà Nẵng
Ngày nhận bài 9/4/2025; Chấp nhận đăng 16/5/2025
Liên hệ email: paphuong@ued.udn.vn*

Tóm tắt

Hình học Fractal là một môn hình học mới nhưng đã có được những ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khác nhau. Tuy nhiên, hiện nay cơ sở lý thuyết của môn hình học này vẫn chưa hoàn thiện vì vẫn chưa có được một định nghĩa chính xác và đầy đủ về Fractal, vấn đề này đang là thách thức lớn đối với các nhà nghiên cứu toán học.

Từ khóa: định nghĩa, hình học Fractal, thách thức

Abstract

FRACTAL GEOMETRY, APPLICATIONS, AND SOME REMAINING PROBLEMS

Fractal geometry is a new geometry but has been widely applied to many different fields. However, the current theoretical basis of this geometry is not perfect because there has not been a precise definition and full of Fractal, the problem is a major challenge for the study of mathematics.

1. Giới thiệu

Sự phát triển của hình học qua các thời đại đã đóng góp những thành tựu quan trọng trong lịch sử văn minh nhân loại. Ở các nền văn hóa cổ của Babilon và Ai cập, con người đã biết cách tính diện tích các hình đơn giản như tam giác, hình thang, hình tròn và cũng biết cách tính thể tích một số vật thể đơn giản như hình hộp chữ nhật, hình chóp đáy vuông...

Từ thế kỷ thứ VII đến thế kỷ thứ III trước công nguyên, các nhà hình học Hy Lạp đã có những đóng góp quan trọng trong việc phát triển môn hình học. Họ đã cố gắng tập hợp và sắp xếp các hiểu biết về hình học theo một kết cấu logic nhất định. Trong số đó, người có công lớn nhất, đặt nền móng cho cơ sở hình học chính là Euclide (330-275 TCN) với tác phẩm “Nguyên lý”. Trong tác phẩm của mình, Euclid đã trình bày đầy đủ và có hệ thống, tìm ra cách chứng minh nhiều định lý và sắp xếp chúng theo một trình tự logic. Ngày nay, các nhà toán học đương đại cũng khẳng định rằng tác phẩm “Nguyên lý” của Euclide đã có những đóng góp to lớn trong việc cố gắng xây dựng hình học theo một hệ thống logic chặt chẽ. Tuy nhiên, đứng trên quan điểm của toán học hiện đại thì tác phẩm “Nguyên lý” của Euclide vẫn còn nhiều thiếu sót về phương diện đặt cơ sở logic cho việc xây dựng hình học (Trương Đức Hình, Đào Tam, 2009).

Cuối thế kỷ XIX, nhà toán học người Đức David Hilbert (1862-1943) mới khắc phục được những thiếu sót của Euclide với tác phẩm “Cơ sở hình học” năm 1899. Trong tác phẩm của mình, Hilbert đã đưa ra một hệ tiên đề đầy đủ của hình học Euclide, từ đó suy diễn để thu được tất cả các nội dung của hình học Euclide.

Trong quá trình cố gắng thử chứng minh định đề V của Euclide (Nguyễn Xuân Liêm, 1994) đã dẫn đến sự ra đời của một môn hình học mới khác với hình học Euclide. Cuối những năm ba mươi của thế kỷ XIX, nhà toán học người Nga Lôbasepxki (Nikolai Ivanovitch Lobatchevski, 1792-1856), giáo sư trường Đại học Tổng hợp Kadan (Nga) đã đưa ra lời giải đáp về vấn đề định đề V của Euclide. Ông đã khẳng định: định đề V không thể suy ra từ các tiên đề và định đề còn lại của Euclide. Lôbasepxki đã phát triển hình học của mình không thua kém hình học Euclide, người ta gọi nó là hình học phi Euclide hay hình học Lôbasepxki.



Chân dung Euclide David Hilbert

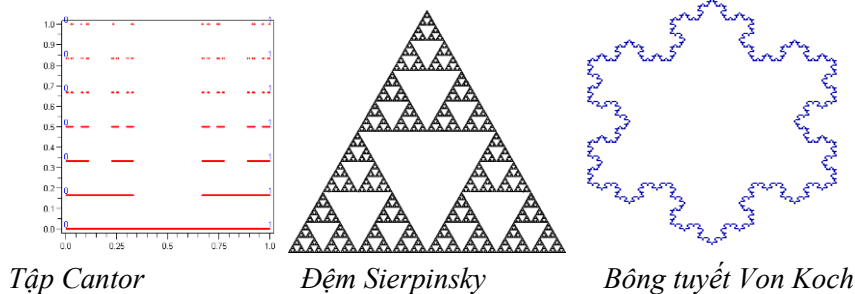
Hình 1. Chân dung của nhà toán học Euclide và Hilbert

Giữa thế kỷ XX, khi công nghệ điện toán phát triển, một môn hình học mới đã ra đời để đáp ứng nhu cầu mô tả các đối tượng của thế giới thực trên máy tính, đó là hình học Fractal. Hình học Fractal chính thức được biết đến thông qua bài báo nổi tiếng của Benoit Mandelbrot vào năm 1975. Bằng công cụ máy tính, ông đã khám phá ra một lĩnh vực hình học mới phản ánh thế giới một cách tự nhiên mà hình học Euclide khó có thể đáp ứng được. Vì vậy, hình học Fractal đã thu hút sự chú ý của nhiều nhà nghiên cứu và nó đã trở thành một chủ đề nóng trong giới toán học (Akhlaj Husain và cs., 2022).

2. Sự ra đời của hình học fractal

Cuối thế kỷ XIX đến những năm đầu của thế kỷ XX, trong nghiên cứu toán học đã xuất hiện một số tập hợp “lạ” với một số tính chất bất thường hoặc có những hình thù kỳ lạ, ngộ nghĩnh (Ajay Singh Rathore, 2019), chẳng hạn như:

- Tập Cantor: là tập con của đoạn $[0,1]$, không chứa bất kỳ một đoạn thẳng nào nhưng vẫn có lực lượng continuum.
- Đệm Sierpinsky: tuy không có điểm trong nhưng cũng có thể ánh xạ liên tục lên toàn bộ hình vuông.
- Hình bông tuyết Von Koch: tuy chỉ chiếm một diện tích nhỏ nhưng có chu vi dài vô hạn.



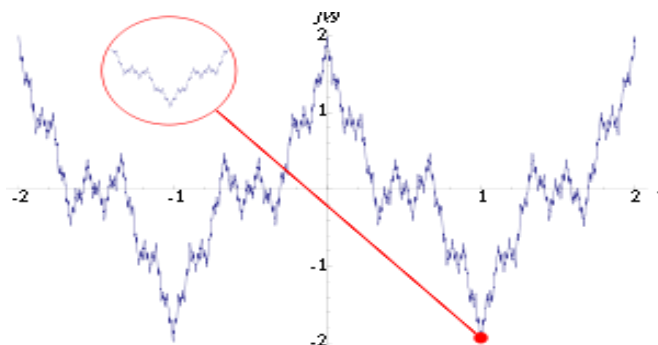
Tập Cantor

Đệm Sierpinsky

Bông tuyết Von Koch

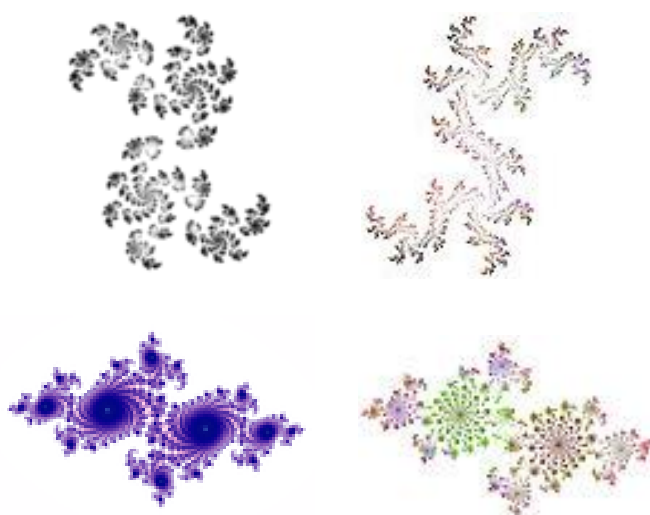
Hình 2. Một số tập hợp “lạ”

• Hàm Weierstrass: hàm số liên tục mà không có đạo hàm tại bất cứ điểm nào. Đồ thị của nó là một đường cong liên tục nhưng không có đạo hàm ở bất kỳ điểm nào.



Hình 3. Hàm Weierstrass

• Tập Julia: gồm những bộ phận là bản sao thu nhỏ của chính nó.

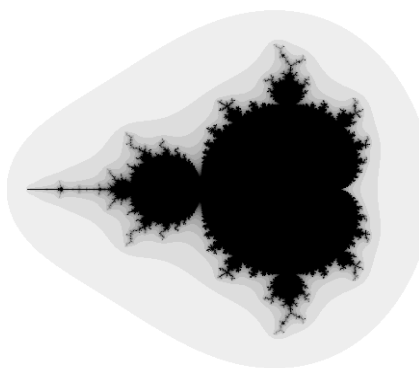


Hình 4. Tập Julia được tạo sinh bởi các giá trị khởi tạo khác nhau

Các tập hợp “lạ” đã gây ra không ít xôn xao trong giới nghiên cứu toán học và rồi chúng cũng được chấp nhận như những trường hợp ngoại lệ của toán học.

Một số nhà vật lý như Boltzmann, Perrin sớm dự đoán được khả năng ứng dụng của các tập khác thường trong thực tế. Tuy nhiên họ cũng không làm được gì hơn là tuyên bố chính những đường cong bất thường, gai góc như đường cong Weierstrass mới thường hay gặp, còn các đường trơn tru đều đặn như đường tròn chỉ là ngoại lệ. Một số công trình đặc sắc của Hausdorff và Besicovitch với những tập có thứ nguyên (số chiều) phân số cũng không có được tiếng vang lớn trong giới toán học (Nurujjaman và cs., 2017).

Năm 1975, nhà toán học người Pháp gốc Ba Lan Benoit Mandelbrot làm việc tại trung tâm nghiên cứu Thomas B. Waston của công ty IBM đã công bố công trình của mình thông qua bài báo nổi tiếng “*Lý thuyết về các tập Fractal*” (A Theory of Fractal Sets), sau đó là cuốn chuyên khảo “*Hình học Fractal của tự nhiên*” (The Fractal Geometry of Nature). Bài báo đã gây được tiếng vang lớn và được các nhà khoa học đương thời quan tâm nghiên cứu, phát triển, cuốn sách của Mandelbrot sau này đã trở thành một công trình kinh điển của hình học Fractal trong đó có một tập hợp nổi tiếng mang tên ông - *tập Mandelbrot*.



Hình 5. Tập Mandelbrot

Từ đó những tập khác thường mới nhận được sự quan tâm của giới khoa học, không những trong ngành toán học mà trong hầu hết các ngành, cả tự nhiên lẫn xã hội, cả khoa học và công nghệ. Mandelbrot đặt tên cho các đối tượng khác thường này là Fractal, mượn chữ La tinh “fractus” có nghĩa là “gãy, vỡ”. Từ đây, một hướng toán học mới ra đời mang tên **hình học Fractal**. Môn hình học này xây dựng một khung toán học tổng quát để nghiên cứu các tập khác thường. Chỉ trong vòng vài thập kỷ, hình học Fractal đã trở thành một trong những chủ đề thời sự nóng của toán học hiện đại.

Mandelbrot và các nhà toán học khác như Douady, Hubbard đã đặt nền móng và phát triển cho lý thuyết hình học Fractal. Các kết quả đạt được chủ yếu tập trung ở các tính chất của các cấu trúc Fractal cơ sở như tập Mandelbrot và tập Julia (Ajay Singh Rathore, 2019).

Dựa trên những công trình của Mandelbrot (1976, 1979, 1982) và Hutchinson (1981), vào các năm 1986, 1988 Micheal Barnsley và Begger đã phát triển lý thuyết hệ hàm lặp IFS (Iterated Function System) được ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác nhau (Akhlq Husain và cs., 2022).

Ngoài các công trình mang tính lý thuyết, hình học Fractal còn được bổ sung bởi những nghiên cứu ứng dụng vào trong khoa học máy tính và các ngành khoa học khác. Dựa trên lý thuyết IFS, Barnsley, Jacquin và một số nhà nghiên cứu khác đã phát triển phép biến đổi phân hình áp dụng cho công nghệ nén ảnh (Arshay Nimish Sheth, 2017; Phạm Anh Phương và cs., 2002).

Hiện nay, lý thuyết phân hình đang được phát triển và nghiên cứu. Một trong những vấn đề lớn đang được quan tâm là bài toán với các độ đo phân hình (multifractal measurement) có liên quan đến sự mở rộng của khái niệm số chiều Fractal và các đối tượng Fractal trong tự nhiên, đồng thời cũng liên quan đến việc áp dụng các độ đo Fractal trong các ngành khoa học tự nhiên.

3. Cơ sở toán của hình học fractal

Hình học Fractal được xây dựng trên cơ sở lý thuyết giải tích hàm (Hoàng Tuy, 2000), sử dụng các kiến thức về không gian Metric, không gian Hausdorff (còn được gọi là không gian Fractal) (Ajay Singh Rathore, 2019).

Mandelbrot đã từng định nghĩa: “Fractal là một tập hợp có số chiều Hausdorff lớn hơn số chiều tôpô của nó”. Định nghĩa này tuy đã thu tóm được hầu hết các tính chất của đa số các Fractal nhưng chính Mandelbrot cũng thừa nhận nó vẫn chưa thoả đáng vì đã

loại trừ một số đối tượng cũng cần được coi là Fractal. Theo Kenneth Falconer (Arshay Nimish Sheth, 2017) thì Một tập F được gọi là Fractal nếu nó có những tính chất sau đây:

(i) F có chi tiết tại mọi tỉ lệ.

(ii) F tự tương tự.

(iii) F có số chiều Fractal lớn hơn số chiều tôpô của nó và số chiều Fractal của F là một số không nguyên.

(iv) F thường được tạo sinh bằng một thủ tục đệ qui đơn giản.

Tuy nhiên định nghĩa này vẫn chưa đầy đủ và cho đến nay chưa ai có thể đưa ra được một định nghĩa chính xác và đầy đủ về Fractal.

Những nhà khoa học xuất sắc khác đã có nhiều đóng góp cho sự phát triển của hình học Fractal phải kể đến như Robert May làm việc tại viện nghiên cứu Princeton, Mitchell Feigenbaum làm việc tại phòng thí nghiệm Quốc gia Los Amos, Edward Lorenz làm việc tại trường Đại học Công nghệ Massachusetts và một số nhà khoa học trước đó như George Cantor, Giuseppe Peano, David Hilbert, Helge Von Koch, Gaston Julia, Pierre Fatou, Vaclaw Sierpinski...

4. Các ứng dụng của hình học fractal

4.1. Ứng dụng trong y học và sinh học

Các nhà khoa học đã tìm ra các mối quan hệ giữa Fractal với hình thù của tế bào, quá trình trao đổi chất của cơ thể người, ADN, nhịp tim,... Trước đây, các nhà sinh học quan niệm lượng chất trao đổi phụ thuộc vào khối lượng cơ thể người, nghĩa là nó tỉ lệ bậc 3 khi xem xét con người là một đối tượng 3 chiều. Nhưng với góc nhìn từ hình học Fractal, người ta cho rằng sẽ chính xác hơn nếu xem con người là một mặt Fractal với số chiều xấp xỉ 2.5, như vậy tỉ lệ đó không nguyên nữa mà là một số hữu tỷ.

Việc chuẩn đoán bệnh áp dụng hình học Fractal đã có những tiên bộ rõ rệt. Bằng cách quan sát hình dạng của các tế bào theo quan điểm Fractal, người ta đã tìm ra các bệnh lý của con người, tuy nhiên những lĩnh vực này vẫn còn mới mẻ, cần phải được tiếp tục nghiên cứu.

4.2. Ứng dụng trong hoá học

Hình học Fractal được sử dụng trong việc khảo sát các hợp chất cao phân tử. Tính đa dạng về cấu trúc polyme thể hiện sự phong phú về các đặc tính của hợp chất cao phân tử chính là các Fractal. Hình dáng vô định hình, đường bề gãy, chuỗi, sự tiếp xúc của bề mặt polyme với không khí, sự chuyển tiếp của các sol-gel,... đều có liên quan đến các Fractal.

Sự chuyển động của các phân tử, nguyên tử trong hợp chất, dung dịch, các quá trình tương tác giữa các chất với nhau,... đều có thể xem như một hệ động lực hỗn độn (chaos).

4.3. Ứng dụng trong vật lý

Trong vật lý, khi nghiên cứu các hệ cơ học có năng lượng tiêu hao (chẳng hạn như có lực ma sát) người ta cũng nhận thấy trạng thái của các hệ đó khó xác định trước được và hình ảnh hình học của chúng là các đối tượng Fractal.

4.4. Dự báo thời tiết

Hệ thống dự báo thời tiết được coi là một hệ động lực hỗn độn (chaos). Nó không có ý nghĩa dự đoán trong một thời gian dài (một tháng, một năm) do đó quy luật biến đổi của nó tuân theo qui luật Fractal.

4.5. Thiên văn học

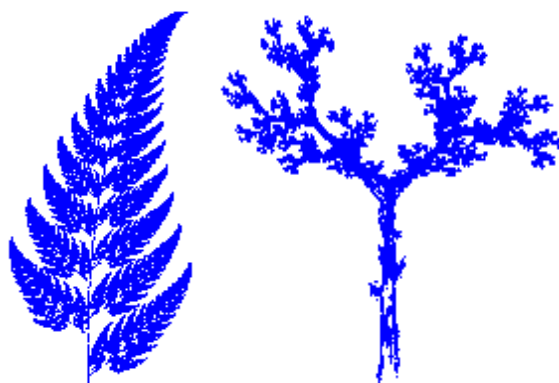
Các nhà khoa học đã tiến hành xem xét lại các quỹ đạo của các hành tinh trong hệ mặt trời cũng như trong các hệ thiên hà khác. Một số kết quả cho thấy không phải các hành tinh này quay theo một quỹ đạo Ellipse như trong hình học Eulide mà nó chuyển động theo các đường Fractal. Quỹ đạo của nó được mô phỏng bằng những quỹ đạo trong các tập hút “lạ”.

4.6. Kinh tế

Mô tả sự biến động của giá cả trên thị trường chứng khoán bằng các đồ hình Fractal sẽ cho phép chúng ta theo dõi sự biến động của giá cả. Trên cơ sở đó dự báo giá cả trên thị trường dựa theo các luật của hình học Fractal.

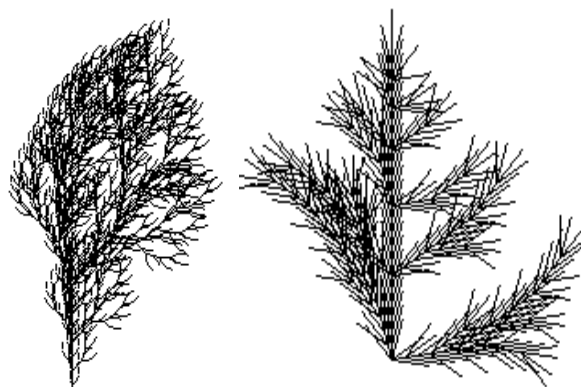
4.7. Ứng dụng trong khoa học máy tính

Hình học Fractal có thể giúp thiết kế các hình ảnh đẹp trên máy tính một cách đơn giản và trực quan. Đây là một trong những lĩnh vực được nhiều người quan tâm, nhất là đối với những người yêu mến nghệ thuật (Akhlaq Husain và cs., 2022; Trương Đức Hình và cs., 2009; Phạm Anh Phương và cs., 2002). Bằng chứng là triển lãm tranh mang tên “Frontiers of Chaos: Images of Complex Dynamical System” của các nhà toán học người Đức Jurgens, Peitgen, Prufer, Richter và Saupe đã thu hút hơn 140.000 lượt khách tới tham dự. Từ năm 1985 đến nay triển lãm tranh đã đi qua hơn 150 thành phố của hơn 30 nước trên thế giới.



Hình 6. Một số hình ảnh Fractal được tạo sinh bởi hệ hàm lặp IFS

Cơ sở hình học Fractal cũng đã được ứng dụng trong công nghệ nén ảnh một cách hiệu quả thông qua các hệ hàm lặp (IFS), đây là một trong những lĩnh vực được các chuyên gia về khoa học máy tính đặc biệt quan tâm (Arshay Nimish Sheth, 2017; Phạm Anh Phương và cs., 2002).



Hình 7. Một số hình ảnh Fractal được tạo sinh bởi L-System

4.8. Các lĩnh vực khác

Fractal được ứng dụng trong việc đo chiều dài đường bờ biển chính xác hơn so với hình học Eulide bởi vì đường bờ biển là một hình Fractal.

Fractal còn được sử dụng để mô tả các hình ảnh nhấp nhô của đồi núi, khảo sát các vết nứt chấn động địa chấn, các sự biến đổi trong lòng đất và dự báo sự biến động của địa chất.

Trong âm nhạc hình học Fractal cũng được đưa vào ứng dụng, các điểm hút, điểm đẩy là cơ sở cấu thành các nốt nhạc Fractal...

5. Kết luận

Tuy chỉ mới ra đời từ năm 1975 nhưng hình học Fractal đã được ứng dụng rộng rãi trong nhiều lĩnh vực khoa học, kinh tế, xã hội. Cho đến nay, vẫn chưa có một định nghĩa chính xác và đầy đủ về hình học Fractal, tình hình này cũng giống như khái niệm xác suất trước thời Kolmogorov hoặc chương trình Langlands trước thời Ngô Bảo Châu (Năm 1967 Langlands, nhà toán học người Mỹ gốc Canada đã đề xuất mối liên hệ mật thiết giữa đại số và giải tích, cụ thể hơn là sự tương ứng giữa biểu diễn Galois và hình thức tự cấu, đó là chương trình Langlands. Năm 2008 Ngô Bảo Châu đã chứng minh được trọn vẹn Bổ đề cơ bản của chương trình Langlands). Để có được một hệ tiên đề đầy đủ, chính xác cho hình học Fractal đang là thách thức lớn đối với các nhà nghiên cứu toán học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Akhlaq Husain, Manikyala Navaneeth Nanda, Movva Sitaram Chowdary and Mohammad Sajid (2022). Fractals: An Eclectic Survey. *MDPI journals*, 6(7).
- [2] Ajay Singh Rathore (2019). Fractal geometry: Theory and applications. *The Pharma Innovation Journal*, 8(2), 876-879.
- [3] Arshay Nimish Sheth (2017). *Fractal Geometry with Applications*. Department of Mathematics National University of Singapore.
- [4] Md. Nurujjaman¹, Ahammad Hossain¹, Dr. Payer Ahmed (2017). A Review of Fractals Properties: Mathematical Approach. *Science Journal of Applied Mathematics and Statistics*, 5(3), 98-105.
- [5] Hoàng Tuy (2000). *Hình học Fractal*. Bài giảng tại Viện Toán học, Hà nội.
- [6] Nguyễn Xuân Liêm (1994). *Giải tích hàm*. NXB Giáo dục.
- [7] Trương Đức Hình, Đào Tam (2009). *Giáo trình cơ sở hình học và hình học sơ cấp*. NXB Đại học Sư phạm Huế.
- [8] Phạm Anh Phương, Trần Thanh Lương (2002). Ứng dụng hình học Fractal trong việc nén ảnh. *Tạp chí khoa học Đại học Huế*, 10, 81-90.
- [9] Phạm Anh Phương, Trần Thanh Lương (2002). Một số phương pháp tạo ảnh Fractal. *Tạp chí khoa học Đại học Huế*, 12, 31-37.