CHUYỂN ĐỘNG XUYÊN TÂM CỦA HẠT VÀO LỖ ĐEN – TRẮNG TRONG MÔ HÌNH HẤP DẪN VÉCTƠ

Võ Văn Ớn(1), **Phạm Lan Anh**(2)

(1) Trường Đại học Thủ Dầu Một; (2) Trường Đại học Khoa học Tự nhiên – Đại học Quốc gia TP. Hồ Chí Minh

TÓM TẮT

Lỗ đen – trắng là một đối tượng vật lí vĩ mô mới được Mô hình hấp dẫn véctơ tiên đoán tồn tại trong vũ trụ. Trong bài báo này, chúng tôi khảo sát chuyển động xuyên tâm của một hạt thử khi nó đi vào trong lỗ đen – trắng. Kết quả cho thấy khi hạt tiệm cận đến lỗ đen từ ngoài ta thu được các kết quả gần giống như khi hạt tiệm cận lỗ đen Schwarzschild trong thuyết Einstein, nhưng khi vật thể co lại và thành lỗ trắng, sự tiệm cận của hạt có nhiều điểm khác biệt lí thú.

Từ khoá: *lỗ đen – trắng, chuyển động xuyên tâm, mô hình hấp dẫn véctơ*

*

1. Mở đầu

Lỗ đen là một vật thể vĩ mô kỳ lạ được Lí thuyết tương đối rộng của Einstein tiên đoán tồn tại và đã được các quan sát thiên văn xác nhận. Phương trình Einstein cho mối liên hệ giữa không – thời gian và vật chất trong trong Thuyết tương đối rộng là:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = -\frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (1)$$

Ở đây $R_{\mu\nu}$ *là tenxơ độ cong Riemann,*

R *là độ cong vô hướng,*

$g_{\mu\nu}$ *là tenxơ mêtric của không - thời gian,*

$T_{\mu\nu}$ *là tenxơ năng – xung lượng của vật chất.*

Một nghiệm của (1) cho vùng không gian bên ngoài một vật thể đối xứng cầu , không quay, không tích điện là mêtric Schwarzschild :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_S}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (2)$$

Với $r_S = \dfrac{2GM}{c^2}$ được gọi là bán kính Schwar-zschild.

Từ biểu thức của mêtric (2) ta thấy rằng, khi vật thể co dần lại dưới tác dụng của lực hấp dẫn đến bán kính $r = r_S$ thì xảy ra sự kỳ dị trong mêtric này. Từ lúc này trở đi mọi thông tin hay tín hiệu từ vật thể không thể ra với thế giới bên ngoài, vật thể trở thành một lỗ đen. Lỗ đen là đối tượng tương đối quen thuộc trong Thuyết tương đối rộng và chuyển động của hạt vào lỗ đen cũng đã được nhiều tác giả nghiên cứu [1, 2, 3, 4, 5].

Mô hình hấp dẫn vectơ [6], tiên đoán tồn tại một vật thể vĩ mô rất đặc biệt là lỗ đen – trắng, theo đó khi một vật thể co lại dưới tác dụng của lực hấp dẫn đến bán kính $r_2 \cong 0,985 r_S$ nó trở thành một lỗ đen, nhưng khi co tiếp đến một bán kính rất nhỏ $r_1 \cong 0,153 r_S$, bức xạ từ nó đột nhiên lại thoát ra được bên ngoài, vật trở nên thấy được và được gọi là lỗ trắng. Trong bài báo này chúng tôi khảo sát chuyển động xuyên tâm của một hạt vào lỗ đen – trắng như thế. Bài báo được cấu trúc gồm: 1. Mở đầu; 2. Giới thiệu sơ lược về lỗ đen – trắng trong mô hình hấp dẫn vectơ; 3. Khảo sát chuyển động xuyên tâm của một hạt thử vào trong lỗ đen – trắng; 4. Kết luận.

2. Lỗ đen – trắng trong mô hình hấp dẫn véctơ

Trong Mô hình hấp dẫn véctơ, mối liên hệ giữa không – thời gian, vật chất và trường hấp dẫn được thể hiện qua phương trình Einstein cải tiến như sau:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - g_{\mu\nu}\Lambda = -\frac{8\pi G}{c^4}(T_{Mg.\mu\nu} + \omega' T_{g.\mu\nu}) \quad (3)$$

Ở đây $R_{\mu\nu}$ *là tenxơ độ cong của không - thời gian,*

R *là độ cong vô hướng;* Λ *là hằng số vũ trụ;*

$g_{\mu\nu}$ *là tenxơ mêtric của không – thời gian;*

$T_{Mg,\mu\nu}$ *là tenxơ năng- xung lượng của vật chất;*

$T_{g,\mu\nu}$ *là tenxơ năng – xung lượng của trường hấp dẫn;*

G là hằng số hấp dẫn Newton;

$\omega' \cong -0.06$ *là một hằng số mới trong mô hình này.*

Từ phương trình Einstein cải tiến (3), chúng tôi tìm được mêtric của không – thời gian bên ngoài một vật đối xứng cầu không quay, không tích điện, khối lượng hấp dẫn M_g là [7, 8]:

$$ds^2 = c^2\left(1 - 2\frac{GM_g}{c^2 r} - \omega'\frac{G^2 M_g^2}{c^4 r^2}\right)dt^2 - \left(1 - 2\frac{GM_g}{c^2 r} - \omega'\frac{G^2 M_g^2}{c^4 r^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (4)$$

Ta xét số hạng: $e^{\nu} = 1 - 2\frac{GM_g}{c^2 r} - \omega'\frac{G^2 M_g^2}{c^4 r^2}$,

nó bằng không khi: $1 - 2\frac{GM_g}{c^2 r} - \omega'\frac{G^2 M_g^2}{c^4 r^2} = 0$

hay: $$c^4 r^2 - 2GM_g c^2 r - \omega' G^2 M_g^2 = 0 \quad (5)$$

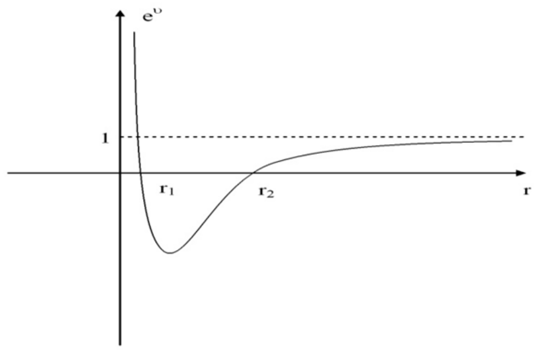
Phương trình (5) có 2 nghiệm dương là:

$$r_1 = \frac{GM_g}{c^2}(1 - \sqrt{1+\omega'}) \approx -\omega'\frac{GM_g}{2c^2}$$
$$r_2 = \frac{GM_g}{c^2}(1 + \sqrt{1+\omega'}) \approx \frac{2GM_g}{c^2} + \omega'\frac{GM_g}{2c^2} \quad (6)$$

Các bán kính r_1, r_2 cho một thiên thể có khối lượng cỡ Mặt trời và một thiên thể có khối lượng cỡ Thiên hà của chúng ta với $\omega' \approx -0.06$ như sau:

- Với $M_g = 2\times10^{30}kg$: $r_1 \approx 0,045km$; $r_2 \approx 2,955km$
- Với $M_g \approx 10^{11}\times2\times10^{30}kg$: $r_1 \approx 0,045\times10^{11}km$; $r_2 \approx 2,955\times10^{11}km$

Đồ thị của e^{ν} sẽ có dạng như hình 1:



Hình 1: *Đồ thị của hàm e^{ν} theo khoảng cách r từ tâm vật thể. Tại khoảng cách $r_2 \cong 0,985r_S$ vật thể trở thành lỗ đen, nhưng khi khoảng cách nhỏ hơn $r_1 \cong 0,153r_S$ vật thể lại trở nên thấy được, nó trở thành lỗ trắng*

Như vậy, Mô hình hấp dẫn véctơ tiên đoán tồn tại một đối tượng vĩ mô cũng rất kỳ lạ trong vũ trụ đó là lỗ đen – trắng. Trong phần 3, chúng tôi sẽ khảo sát chuyển động xuyên tâm của một hạt thử vào trong lỗ đen – trắng.

3 . Chuyển động xuyên tâm của một hạt thử vào trong lỗ đen – trắng

3.1. Thời gian để hạt chuyển động xuyên tâm vào lỗ đen – trắng

Xét một hạt rơi theo phương xuyên tâm vào tâm lỗ đen – trắng, véctơ vận tốc của hạt là:

$$v^1 = \frac{dr}{ds}$$ (do hạt rơi xuyên tâm nên có thể lấy $v^2 = v^3 = 0$)

Chuyển động xuyên tâm của hạt được mô tả bởi phương trình trắc địa:

$$\frac{dv^{\mu}}{ds} + \Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}v^{\nu}v^{\sigma} = 0 \tag{7}$$

Trong trường hợp ta xét, phương trình rút gọn thành:

$$\frac{dv^0}{ds} = -\Gamma^0_{\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} = -g^{00}\Gamma_{0,\mu\nu}v^{\mu}v^{\nu} = -2g^{00}\Gamma_{0,10}v^0v^1 \tag{8}$$

Từ $\Gamma_{\mu,\nu\sigma} = \frac{1}{2}\left(g_{\mu\nu,\sigma} + g_{\mu\sigma,\nu} - g_{\nu\sigma,\mu}\right)$

ta có $\Gamma_{0,10} = \frac{1}{2}g_{00,1} = \frac{1}{2}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^1}$ (9)

Thay (9) vào (8) ta có :

$$\frac{dv^0}{ds} = -g^{00}\partial g_{00,1}v^0\frac{dx^1}{ds} = -g^{00}\frac{dg_{00}}{ds}v^0 \tag{10}$$

Cuối cùng ta được:

$$g_{00}\frac{dv^0}{ds} + \frac{dg_{00}}{ds}v^0 = \frac{d}{ds}\left(g_{00}v^0\right) = 0 \tag{11}$$

Tích phân (11) cho: $g_{00}v^0 = k$ (12)

Với k là hằng số tích phân, nó là giá trị của g_{00} tại vị trí hạt bắt đầu rơi.

Mặt khác, từ định nghĩa mêtric: $ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ (13)

Chia hai vế cho ds^2, (13) thành :

$$1 = g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu = g_{00}\left(v^0\right)^2 + g_{11}\left(v^1\right)^2 \tag{14}$$

Nhân cả hai vế (14) với g_{00} ta có:

$$g_{00} = \left(g_{00}\right)^2\left(v^0\right)^2 + g_{00}g_{11}\left(v^1\right)^2 \tag{15}$$

Từ mêtric (4) : $g_{00}g_{11} = -1$ (16)

Thay (12) và (16) vào (15), ta được:

$$k^2 - \left(v^1\right)^2 = g_{00} = 1 - r_s/r + 0{,}015\left(r_s\right)^2/r^2 \tag{17}$$

Vậy : $\left(v^1\right)^2 = k^2 - 1 + r_s/r - 0{,}015\left(r_s\right)^2/r^2$ (18)

Do hạt rơi vào lỗ đen nên ta chọn $v^1 < 0$, do vậy:

$$v^1 = -\sqrt{k^2 - 1 + r_s/r - 0{,}015\left(r_s\right)^2/r^2} \tag{19}$$

Bây giờ xét dt/dr, ta có :

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dx^0/ds}{dx^1/ds} = \frac{v^0}{v^1} \tag{20}$$

Từ (12) ta có:

$$v^0 = k/g_{00} = k/\left[1 - r_S/r + 0{,}015\left(r_S\right)^2/r^2\right] \tag{21}$$

Do đó:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{v^0}{v^1} = -k\left(1 - \frac{r_S}{r} + 0{,}015\left(r_S\right)^2/r^2\right)^{-1}.\left(k^2 - 1 + r_S/r - 0{,}015\left(r_S\right)^2/r^2\right)^{-1/2} \tag{22}$$

Khi hạt tiệm cận rất gần r_2, ta có thể đặt: $r = r_2 + \varepsilon$ (23)

với ε nhỏ.

Thay (23) vào (22), chỉ giữ lại gần đúng bậc nhất theo ε , ta có :

$$dt = -1,0467 r_2 \frac{dr}{r - r_2} \tag{24}$$

Tích phân (24) cho : $t = -1,0467 r_2 \ln\left(r - r_2\right) + C$ (25)

Từ (25), ta thấy khi $r \to r_2$ thì $t \longrightarrow \infty$. Như vậy, hạt cần một thời gian vô hạn để vượt qua mặt r_2 . Thời gian tính trong hệ qui chiếu gắn với người quan sát ở rất xa lỗ đen – trắng.

Khi vật thể đã co lại thành lỗ trắng, tính toán tương tự, ta có:

$$t = -0,0513 r_1 \ln(r_1 - r) \tag{26}$$

Từ (26), ta thấy khi vật thể đã thành lỗ trắng thì nó chỉ cần một thời gian hữu hạn:

$$t = -0,0513 r_1 \ln(r_1) \tag{27}$$

để rơi vào tới tâm lỗ trắng. Thời gian ở đây cũng gắn với quan sát viên ở rất xa lỗ đen – trắng.

3.2. Gia tốc rơi tự do của hạt ở bề mặt lỗ đen – trắng

Xét hạt rơi tự do trong trường hấp dẫn của lỗ đen – trắng.

Từ phương trình trắc địa, ta có biểu thức gia tốc 4 chiều:

$$a^{\mu} = v^{\sigma} \nabla_{\sigma} v^{\mu} \tag{28}$$

Một người quan sát đứng yên có vận tốc 4 chiều: $v_{\mu} = \dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial \tau}$

Gọi $V(x)$ là hệ số dịch chuyển đỏ, ta có:

$$K_{\mu} = V\left(x\right) v_{\mu} \tag{29}$$

với K_i là véctơ Killing.

Vận tốc 4 chiều được chuẩn hoá: $v_{\mu} v^{\mu} = -1$,

Do đó hàm V thoả mãn: $V = V\sqrt{-v_{\mu} v^{\mu}} = \sqrt{-K_{\mu} K^{\mu}}$ (30)

Ta có liên hệ giữa gia tốc và hệ số dịch chuyển đỏ như sau:

$$a_{\mu} = \nabla_{\mu} \ln V = \frac{1}{V} \nabla_{\mu} V \tag{31}$$

Từ mêtric (4) ta có vector Killing và vận tốc 4 chiều như sau:

$$K^{\mu} = \left(1, 0, 0, 0\right), \qquad v^{\mu} = \left[\frac{1}{c\sqrt{1 - \frac{2GM_g}{c^2 r} - \omega' \frac{G^2 M_g{}^2}{c^4 r^2}}}, 0, 0, 0 \right] \tag{32}$$

Vì $K^{\mu}K_{\mu} = g_{\mu\nu}$ nên

$$K_{\mu} = \left[-\left(1 - \frac{2GM_g}{c^2 r} - \omega' \frac{G^2 M_g{}^2}{c^4 r^2}\right), 0, 0, 0 \right] \tag{33}$$

Vậy ta có hệ số dịch chuyển đỏ:

$$V = \sqrt{-K_{\mu}K^{\mu}} = \sqrt{1 - \frac{2GM_g}{c^2 r} - \omega' \frac{G^2 M_g{}^2}{c^4 r^2}} \tag{34}$$

Gia tốc rơi tự do của hạt :

$$a_{\mu} = \frac{1}{V} \ln V = \frac{-\frac{2GM_g}{c^2 r^2} + \omega' \frac{2G^2 M_g{}^2}{c^4 r^3}}{2(1 - \frac{2GM_g}{c^2 r} - \omega' \frac{G^2 M_g{}^2}{c^4 r^2})} \nabla_{\mu} r \tag{35}$$

$$a^{\mu} = \frac{-\frac{GM_g}{c^2 r^2} + \omega' \frac{G^2 M_g{}^2}{c^4 r^3}}{1 - \frac{2GM_g}{c^2 r} - \omega' \frac{G^2 M_g{}^2}{c^4 r^2}} \nabla^{\mu} r \tag{36}$$

Độ lớn gia tốc:

$$a = \sqrt{a_{\mu} a^{\mu}}$$

$$= \sqrt{\frac{-\frac{GM_g}{c^2 r^2} + \omega' \frac{G^2 M_g{}^2}{c^4 r^3}}{1 - \frac{2GM_g}{c^2 r} - \omega' \frac{G^2 M_g{}^2}{c^4 r^2}} \times \frac{-\frac{GM_g}{c^2 r^2} + \omega' \frac{G^2 M_g{}^2}{c^4 r^3}}{1 - \frac{2GM_g}{c^2 r} - \omega' \frac{G^2 M_g{}^2}{c^4 r^2}} \nabla_{\mu} r g^{\mu\nu} \nabla^{\nu} r}$$

$$= \frac{\frac{GM_g}{c^2 r^2} - \omega' \frac{G^2 M_g{}^2}{c^4 r^3}}{\sqrt{1 - \frac{2GM_g}{c^2 r} - \omega' \frac{G^2 M_g{}^2}{c^4 r^2}}} \tag{37}$$

do $\nabla_{\mu} r = \delta^{r}_{\mu}$.

4. Kết luận

Như vậy, chuyển động xuyên tâm của hạt thử vào trong lỗ đen – trắng khi vật thể là lỗ đen gần giống như kết quả tính trong Thuyết tương đối rộng của Einstein; nhưng khi vật thể đã thành lỗ trắng kết quả là khác biệt, gia tốc rơi tự do ở bề mặt vật thể cũng có những điểm khác biệt đáng kể. Các kết quả tính thời gian trong bài báo được gắn với quan sát viên ở rất xa vật, trong trường hợp hệ qui chiếu được gắn với hạt rơi sẽ được khảo sát trong một bài báo khác.

RADIAL MOTION OF A PARTICLE INTO A WHITE-BLACK HOLE IN THE VECTOR MODEL FOR GRAVITATIONAL FIELD

Vo Van On(1), Pham Lan Anh(2)

(1) University of Thu Dau Mot; (2) University of Natural Sciences – Vietnam National University - Ho Chi Minh City

ABSTRACT

The white - black hole is a new macro physical object that the Vector model for gravitational field predicts to exist in the universe. In this paper, we study the radial motion of a test particle into a white - black hole. The results show that when the particle approaches to the black hole from outside we obtain similar results with when the particle approaches to the Schwarzschild black hole in Einstein theory, but when the object shrinks and becomes a white hole, the results have interesting differences.

***Keywords**: white - black hole, radial motion, vector model for gravitational field*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Nikodem J. Poplawski , *Physics Letters B* . **687**, Nos.2-3, pp.110-113, 2010.

[2] Matthias Blau, http://www.blau.itp.unibe.ch/Lecturenotes.html, 2011.

[3] Lam Hui, *arXiv / Lecture Notes for Astrophysics,* 2011.

[4] Sanjeev S. Seahra, *arXiv / an introduction to black holes,* 2006.

[5] Mitchell A Berger, *arXiv / Lecture Notes C358/Cosmology,* 2006.

[6] Võ Văn Ớn, *Luận án tiến sĩ vật lí*, thư viện trường Đại Học Thủ Dầu Một, 2009.

[7] Vo Van On, *KMITL Science Journal (Thailand)*, **8** , No.1 , pp.1- 11,2008.

[8] Vo Van On, *Communications in Physics*, **18**, No. 3, pp. 175-184, 2008.