ỨNG DỤNG ĐỊNH THỨC CỦA MA TRẬN GRAM ĐỂ TÍNH KHOẢNG CÁCH TRONG HÌNH HỌC

Trần Thanh Phong[1], Huỳnh Ngọc Diễm[1]

(1) Trường Đại học Thủ Dầu Một
Ngày nhận bài: 30/9/2025; Chấp nhận đăng: 30/12/2025
Email tác giả liên hệ: diemhn@tdmu.edu.vn

Tóm tắt

Khoảng cách trong hình học Euclide n-chiều chủ yếu là khoảng cách từ một điểm đến một cái phẳng và khoảng cách giữa hai cái phẳng chéo nhau. Khoảng cách trong hình học không gian lớp 11 chủ yếu là khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng, khoảng cách từ một điểm đến mặt phẳng và khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau. Trong hình học Euclide, ứng dụng định thức của ma trận Gram sẽ tính được khoảng cách của hai cái phẳng bất kỳ. Bằng cách sử dụng công thức này cho một số bài toán hình học không gian lớp 11, người ta có thêm công cụ tính toán và có thể tìm nhanh đáp số. Bài viết trình bày các công thức tính khoảng cách trong hình học Euclide kèm theo các ví dụ minh họa. Từ đó, vận dụng công thức trên để giải một số bài toán trong hình học không gian lớp 11.

Từ khóa: *Hình học không gian, Hình học Euclide, khoảng cách, ma trận Gram.*

Abstract

APPLICATION OF DETERMINANT OF GRAM MATRIX TO CALCULATE DISTANCE IN GEOMETRY

Distances in n-dimensional Euclidean geometry are mainly the distance from a point to a hyperplane and the distance between two skew hyperplanes. Distances in grade 11th spatial geometry are mainly the distance from a point to a line, the distance from a point to a plane and the distance between two skew lines. In Euclidean geometry, the application of the determinant of the Gram matrix will calculate the distance between any two hyperplanes. By using this formula for some 11th grade spatial geometry problems, we have more calculation tools and can quickly find the answer. The article presents distance formulas in Euclidean geometry with illustrative examples. From there, applying the above formulas to solve some problems in 11th grade spatial geometry.

1. Đặt vấn đề

Để khái quát các khái niệm quen thuộc sang trường hợp có số chiều lớn hơn 3 (và hữu hạn), dựa trên cơ sở của Đại số tuyến tính, người ta xây dựng khái niệm không gian affine và không gian Euclide. Ký hiệu K là trường số thực $\mathbb{R}$ hay trường số phức C. Giả sử V là một không gian vectơ trên K, A là tập hợp khác rỗng mà các phần tử của nó gọi là điểm. Giả sử đã cho ánh xạ:

$$f : \mathrm{A} \times \mathrm{A} \to \mathrm{V}$$
$$(M, N) \mapsto f(M, N) = \overrightarrow{MN}.$$

Bộ ba $(\mathrm{A}, f, \mathrm{V})$ được gọi là không gian affine liên kết với không gian vectơ V bởi ánh xạ f nếu hai tiên đề sau được thỏa mãn:

(i) Với mỗi điểm $M \in \mathrm{A}$ và mỗi $\vec{u} \in \mathrm{V}$, tồn tại duy nhất điểm $N \in \mathrm{A}$ sao cho $\overrightarrow{MN} = \vec{u}$.

(ii) Với mọi ba điểm $M, N, P \in \mathrm{A}$ ta luôn có $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MP}$.

Trong không gian affine A^n cho cái phẳng A^p có phương là V^p và phẳng A^q có phương là V^q. Không mất tính tổng quát ta giả sử $p \le q$. Dựa vào phương chung $\mathrm{V}^p \cap \mathrm{V}^q$ và điểm chung $\mathrm{A}^p \cap \mathrm{A}^q$ ta có vị trí tương đối của hai cái phẳng đó như sau:

Phương / Phẳng	$\mathbb{V}^p \cap \mathbb{V}^q = \mathbb{V}^r, r > 0$ (r – chiều)	$\mathbb{V}^p \cap \mathbb{V}^q = \{\vec{0}\}$
$\mathbb{A}^p \cap \mathbb{A}^q \ne \varnothing$	• $r < p \le q : \mathbb{A}^p \cap \mathbb{A}^q$ là cái phẳng có phương $\mathbb{V}^r$. • $r = p \le q$: $\mathbb{A}^p \subset \mathbb{A}^q$.	$\mathbb{A}^p \cap \mathbb{A}^q = 1$ điểm.
$\mathbb{A}^p \cap \mathbb{A}^q = \varnothing$	• $r = p < q$: $\mathbb{A}^p$ *song song với* $\mathbb{A}^q$. • $r = p = q$: $\mathbb{A}^p, \mathbb{A}^q$ *song song với nhau.* • $r < p \le q$: $\mathbb{A}^p, \mathbb{A}^q$ chéo nhau không hoàn toàn.	$\mathbb{A}^p$, $\mathbb{A}^q$ chéo nhau hoàn toàn.

Không gian Euclide là một không gian affine đặc biệt với nền là không gian vectơ Euclide hữu hạn chiều. Do đó, trong không gian Euclide có khái niệm, tính chất,… của không gian affine (không liên quan đến tích vô hướng) và những khái niệm, tính chất,… liên quan đến tích vô hướng gọi là khái niệm, tính chất "lượng" như: góc, khoảng cách, độ dài,… Không gian Euclide được gọi là *n* chiều, ký hiệu là E^n, nếu không gian vectơ Euclide liên kết với nó có số chiều bằng *n*.

Trong không gian Euclide E^n, cho phẳng α có phương $\vec{\alpha}$ và phẳng β có phương $\vec{\beta}$ ta có thêm vị trí tương đối của hai cái phẳng đó như sau:

Không gian phương	Vị trí tương đối của hai cái phẳng
Hai không gian vectơ $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$ trực giao với nhau.	Hai phẳng α và β gọi là vuông góc với nhau, kí hiệu $\alpha \perp \beta$.
Hai không gian vectơ $\vec{\alpha}$ và $\vec{\beta}$ bù trực giao với nhau.	Hai phẳng α và β gọi là bù vuông góc với nhau, kí hiệu $\alpha \perp \beta$.
Tồn tại cái phẳng $\gamma \subset \beta$ và $\dim \gamma = \dim \beta - 1$ sao cho $\alpha \perp \gamma$.	Phẳng α được gọi là bán vuông góc với β

Khoảng cách giữa hai cái phẳng α và β trong không gian Euclide E^n, ký hiệu

$d(\alpha,\beta)$, là số $\inf d(M,N)$ với $M\in\alpha$ và $N\in\beta$. Đường thẳng Δ gọi là đường vuông góc chung của hai cái phẳng α và β nếu Δ vuông góc với cả α và β, đồng thời cắt cả α và β. Khi đó, việc tính số $\inf d(M,N)$ với $M\in\alpha$ và $N\in\beta$ hay độ dài đường vuông góc chung sẽ gặp khó khăn trong một số bài toán.

Đặc biệt:

1) Cho hai điểm M,N thuộc không gian Euclide E^n, khoảng cách giữa hai điểm đó, ký hiệu là $d(M,N)$, được định nghĩa là số:

$$d(M,N)=\left|\overrightarrow{MN}\right|=\sqrt{\overrightarrow{MN}^2}\ .$$

Ta cũng bảo đó là độ dài của đoạn thẳng MN.

2) Trong không gian Euclide E^n với mục tiêu trực chuẩn cho trước, cho $I=\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)$ và siêu phẳng α có phương trình tổng quát là

$$a_1x_1+a_2x_2+...+a_nx_n+a_0=0.$$

Khoảng cách từ điểm I đến siêu phẳng α, ký hiệu là $d(I,\alpha)$, được tính như sau:

$$d(I,\alpha)=\frac{\left|a_1x_1^0+a_2x_2^0+...+a_nx_n^0+a_0\right|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}\ .$$

3) Khoảng cách giữa hai cái phẳng song song là khoảng cách từ một điểm bất kì trên cái phẳng này đến cái phẳng kia.

Từ đó cho thấy rằng, bài toán khoảng cách giữa hai cái phẳng chủ yếu là hai bài toán: khoảng cách từ một điểm đến cái phẳng và khoảng cách giữa hai cái phẳng chéo nhau.

Tiếp theo, không gian Hình học lớp 11 là không gian Euclide 3 –chiều. Tuy nhiên, không gian hình học chưa trang bị hệ trục tọa độ nên tính khoảng cách bằng phương pháp suy luận tổng hợp. Ngoài ra, khái niệm vuông góc của hai mặt phẳng là khái niệm bán vuông góc trong Hình học cao cấp. Bằng cách chọn hệ trục tọa độ trực chuẩn phù hợp, ta có thể sử dụng công thức tính được khoảng cách trong hình học không gian lớp 11. Với mong muốn cung cấp cho học sinh công thức tính khoảng cách tổng quát, qua đó tạo điều kiện để học sinh khá, giỏi mở rộng và nâng cao kiến thức, chúng tôi đề xuất việc vận dụng công thức tính khoảng cách trong hình học cao cấp để giải quyết một số bài toán tính khoảng cách trong hình học không gian lớp 11.

2. Tài liệu và phương pháp

Tài liệu (Nguyễn Mộng Hy, 2000) gồm có 3 chương. Chương 1 trình bày không gian affine và hình học affine; tiếp theo chương 2 xây dựng không gian Euclide và hình học Euclide; cuối cùng là chương 3 nói về không gian xạ ảnh và hình học xạ ảnh. Trong chương 2, chúng ta có thể nhìn thấy hình học trong chương trình phổ thông như là hình học Euclide 2 chiều, 3 chiều. Hình học affine nghiên cứu các tính chất định tính như 3 đường thẳng đồng quy, 3 điểm thẳng hàng, tính chất song song,… Trong khi đó, Hình học Euclide tập trung nghiên cứu các tính chất định lượng như góc, khoảng cách, thể tích,… Trong tài liệu này, tính khoảng cách giữa hai cái phẳng được tác giả quan tâm bằng cách tính độ dài đoạn vuông góc chung. Hai công thức tính khoảng cách từ điểm đến cái phẳng và khoảng cách giữa hai cái phẳng được trình bày như bài tập. Tiếp theo, tài liệu (Nguyễn Mộng Hy, 2001) là tài liệu giải bài tập, vì vậy, các nội dung lý thuyết được tóm tắt để dành phần lớn nội dung cho các bài tập có hướng dẫn giải. Tuy nhiên, phần chứng minh cho 2 công thức trên được trình bày ngắn gọn. Và hai công thức này vẫn chưa được vận dụng để tính khoảng cách trong hình học.

Đến năm 2005, tài liệu (Phạm Khắc Ban; Phạm Bình Đô, 2005) được xuất bản. Đây cũng là tài liệu liên quan đến Hình học affine và Euclide tập trung theo hướng minh họa bằng các ví dụ và bài tập. Từ đó, công thức tính khoảng cách giữa hai cái phẳng được trình bày là các tính chất.

Bài viết của chúng tôi sẽ trình bày ma trận Gram và tính chất của nó. Từ đó, chúng tôi trình bày hai công thức tính khoảng cách và chứng minh hai công thức đó nhằm làm rõ hơn về ứng dụng định thức của ma trận Gram để tính khoảng cách trong hình học. Tiếp theo, một số bài toán hình học cao cấp được giải quyết bằng cách sử dụng hai công thức vừa nêu.

Sách giáo khoa Toán 11, tập 2 (Trần Nam Dũng và nnk, 2023) là quyển sách thuộc một trong 3 bộ sách được biên soạn theo chương trình giáo dục phổ thông 2018 môn Toán. Trong đó, nội dung tính khoảng cách được trình bày bằng cách tính độ dài đoạn vuông góc chung. Thông qua các bài toán trong sách giáo khoa, chúng tôi sử dụng hai công thức tính khoảng cách trong hình học cao cấp để giải các bài toán trong sách giáo khoa Hình học không gian lớp 11. Đây là cách làm toán mà chúng tôi chưa tìm thấy trong bất kì tài liệu nào.

3. Nội dung và kết quả nghiên cứu

3.1. Ma trận Gram

Định nghĩa. Trong không gian vectơ Euclide V_E^n cho hệ vectơ $\left\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}\right\}$, ma trận Gram có dạng như sau:

$$Gr\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}\right)=\begin{bmatrix}\overrightarrow{a_1}^2 & \overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_2} & ... & \overrightarrow{a_1}.\overrightarrow{a_n}\\ \overrightarrow{a_2}.\overrightarrow{a_1} & \overrightarrow{a_2}^2 & ... & \overrightarrow{a_2}.\overrightarrow{a_n}\\ ... & ... & ... & ...\\ \overrightarrow{a_n}.\overrightarrow{a_1} & \overrightarrow{a_n}.\overrightarrow{a_2} & ... & \overrightarrow{a_n}^2\end{bmatrix}.$$

Tính chất. Hệ vectơ $\left\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}\right\}$ độc lập tuyến tính khi và chỉ khi $\left|Gr\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}\right)\right|>0$. Hệ vectơ $\left\{\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}\right\}$ phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi $\left|Gr\left(\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}\right)\right|=0.$

3.2. Hai bài toán tính khoảng cách

3.2.1. Khoảng cách từ một điểm đến cái phẳng

Trong không gian Euclide E^n cho một điểm *I* và $m-$phẳng α không chứa *I* với $m<n$ đi qua điểm *S* có phương $\vec{\alpha}$ nhận *m* vectơ $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m\}$ làm cơ sở. Gọi *J* là hình chiếu vuông góc của *I* xuống α. Khi đó:

$$d^2(I,\alpha)=\overrightarrow{JI}^2=\frac{\left|Gr(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},...,\overrightarrow{u_m},\overrightarrow{SI})\right|}{\left|Gr(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},...,\overrightarrow{u_m})\right|}. \quad (1)$$

Chứng minh

Như đã biết, *m* – phẳng α có không gian phương $\vec{\alpha}$ nhận *m* vectơ $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m\}$ làm cơ sở và *J* là hình chiếu vuông góc của *I* lên α.

Ma trận Gram được lập từ hệ vectơ: $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m,\overrightarrow{SI}\}$.

Do $\overrightarrow{SI}=\overrightarrow{SJ}+\overrightarrow{JI}$ và $\overrightarrow{SJ}$ là một tổ hợp tuyến tính của các vectơ $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m\}$ mà $\overrightarrow{SJ}\in\vec{\alpha}$ nên $\left|Gr(\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m,\overrightarrow{SJ})\right|=0$ (vì hệ vectơ $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m,\overrightarrow{SJ}\}$ phụ thuộc tuyến tính).

Từ đẳng thức:

$$\left|Gr(\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m,\overrightarrow{SI})\right|=\left|Gr(\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m,\overrightarrow{SJ}+\overrightarrow{JI})\right|$$

và do $\overrightarrow{JI}\perp\vec{u}_i$ với $i=1,2,...,m$ ta suy ra

$$\begin{aligned}\left|Gr(\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m,\overrightarrow{SI})\right|&=0+\left|Gr(\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m,\overrightarrow{JI})\right|\\&=\overrightarrow{JI}^2\left|Gr(\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m)\right|.\end{aligned}$$

Do đó ta có công thức sau:

$$d^2(I,\alpha)=\overrightarrow{JI}^2=\frac{\left|Gr(\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m,\overrightarrow{SI})\right|}{\left|Gr(\vec{u}_1,\vec{u}_2,...,\vec{u}_m)\right|}.$$

3.2.2. Khoảng cách giữa hai cái phẳng chéo nhau

Trong không gian Euclide E^n $(n>1)$ cho hai cái phẳng α và β chéo nhau ($\alpha\cap\beta=\phi$ và $\vec{\alpha}\cap\vec{\beta}=\vec{0}$). Gọi $\{\vec{e}_1,\vec{e}_2,...,\vec{e}_m\}$ là cơ sở của không gian vectơ $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ và lấy điểm $A\in\alpha, B\in\beta$. Khi đó:

$$d^2(\alpha,\beta)=\frac{\left|Gr(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_m}\right|}{\left|Gr(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},...,\overrightarrow{e_m})\right|}. \quad (2)$$

Chứng minh

Vì α và β là hai cái phẳng chéo nhau trong E^n nên ta có MN là đường vuông góc chung với $M \in \alpha$ và $N \in \beta$. Khi đó

$$d(M,N) = d(\alpha,\beta).$$

Do $\overrightarrow{MN}.\vec{e}_i = 0$ với $i = 1, 2, ..., m$ nên ta có

$$\left|Gr(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_m}\right| = d^2(M,N)\left|Gr(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_m})\right|$$

Mặt khác ta có $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NB}$ trong đó $\overrightarrow{AM} \in \vec{\alpha}, \overrightarrow{NB} \in \vec{\beta}$

Do đó

$$d^2(\alpha,\beta) = d^2(M,N) = \frac{\left|Gr(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_m}\right|}{\left|Gr(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, ..., \overrightarrow{e_m})\right|}.$$

3.3. Một số ví dụ tính khoảng cách trong Hình học Euclide

Các bài toán sau đây là các bài toán trong Hình học Euclide được giải bằng cách sử dụng hai công thức tính khoảng cách nêu trên. Cách làm này giúp cho giáo viên trung học phổ thông nâng cao kiến thức và thúc đẩy niềm say mê học Toán của các em học sinh vì các em thấy được rằng ngoài hình học 2, 3 chiều còn có hình học nhiều chiều hơn.

Ví dụ 1. Trong không gian Euclide E^3 với mục tiêu trực chuẩn đã chọn, tính khoảng cách từ điểm $I = (4,1,2)$ đến mặt phẳng α có phương trình $x_1 - 3x_2 - x_3 + 2 = 0.$

Giải

Sử dụng công thức tính khoảng cách từ một điểm đến siêu phẳng ta được:

$$d(I,\alpha) = \frac{|1.4 - 3.1 - 1.2 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{11}}{11} \text{ (đvđd).}$$

Ví dụ 2. Trong không gian Euclide E^3 với mục tiêu trực chuẩn đã chọn, tính khoảng cách từ điểm $I = (1,3,5)$ đến đường thẳng a có phương trình $\begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = -3 - t \\ x_3 = -t \end{cases}$ với t làm tham số thực □ .

Giải

Đường thẳng a đi qua điểm $S = (2,-3,0)$ và có không gian phương là $\vec{a} = \langle \vec{u} = (1,-1,-1) \rangle$. Khi đó ta tính được $\overrightarrow{SI} = (-1,6,5)$. Do đó:

$$\left|Gr(\vec{u}, \overrightarrow{SI})\right| = \begin{vmatrix} 3 & -12 \\ -12 & 62 \end{vmatrix} = 42 \text{ và } \left|Gr(\vec{u})\right| = |3| = 3.$$

Sử dụng công thức (1) ta thu được:

$$d^2(I,a) = \frac{\left|Gr(\vec{u}, \overrightarrow{SI})\right|}{\left|Gr(\vec{u})\right|} = 14 .$$

Vậy

$$d(I,a) = \sqrt{14} \text{ (đvđd).}$$

Ví dụ 3. Trong không gian Euclide E^3 với mục tiêu trực chuẩn đã chọn, cho đường thẳng d_1 có phương trình là $\begin{cases} x_1 = 1+t \\ x_2 = 2+2t \\ x_3 = 3-t \end{cases}$ với t là tham số thực $\mathbb{R}$ và đường thẳng d_2 có phương trình là $\begin{cases} x_1 = 2+3s \\ x_2 = 3s \\ x_3 = -s \end{cases}$ với s là tham số thực $\mathbb{R}$.

a) Chứng minh hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng d_1 và d_2 .

Giải

a) Đường thẳng d_1 đi qua điểm $A = (1, 2, 3)$ và có không gian phương là $\vec{d}_1 = \langle \vec{u}_1 = (1, 2, -1) \rangle$; Đường thẳng d_2 đi qua điểm $B = (2, 0, 0)$ và có không gian phương là $\vec{d}_2 = \langle \vec{u}_2 = (3, 3, -1) \rangle$.

Dễ dàng kiểm tra được $d_1 \cap d_2 = \varnothing$ và $\vec{d}_1 \cap \vec{d}_2 = \vec{0}$. Vậy hai đường thẳng d_1 và d_2 chéo nhau.

b) Khi đó ta tính được $\overrightarrow{AB} = (1, -2, -3)$. Do đó:

$$\left|Gr(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)\right| = \begin{vmatrix} 14 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 10 \\ 0 & 10 & 19 \end{vmatrix} = 196 \text{ và } \left|Gr(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\right| = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 19 \end{vmatrix} = 14.$$

Sử dụng công thức (2) ta thu được:

$$d^2(d_1, d_2) = \frac{\left|Gr(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \vec{u}_2)\right|}{\left|Gr(\vec{u}_1, \vec{u}_2)\right|} = 14$$

Vậy

$$d(I,a) = \sqrt{14} \text{ (đvđd).}$$

Ví dụ 4. Trong không gian Euclide E^4 với mục tiêu trực chuẩn đã chọn, cho mặt phẳng α có phương trình $\begin{cases} x_1 = 1 + t_1 + t_2 \\ x_2 = 1 - t_1 - t_2 \\ x_3 = 1 - t_1 \\ x_4 = 1 + t_1 \end{cases}$ với t_1, t_2 là tham số thực □ và đường thẳng m có phương trình $\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 1 + s \\ x_3 = 2 - s \\ x_4 = 1 \end{cases}$ với s là tham số thực □ .

a) Chứng minh hai cái phẳng α và m chéo nhau.

b) Tính khoảng cách giữa hai cái phẳng α và m.

Giải

a) Mặt phẳng α đi qua điểm $A = (1, 1, 1, 1)$ và có không gian phương là $\vec{\alpha} = \langle \vec{u}_1 = (1, -1, -1, 1), \vec{u}_2 = (1, -1, 0, 0) \rangle$; Đường thẳng m đi qua điểm $B = (1, 1, 2, 1)$ và có không gian phương là $\vec{m} = \langle \vec{u}_3 = (0, 1, -1, 0) \rangle$.

Dễ dàng kiểm tra được $\alpha \cap m = \varnothing$ và $\vec{\alpha} \cap \vec{m} = \vec{0}$. Vậy hai cái phẳng α và m chéo nhau.

b) Khi đó ta tính được $\overrightarrow{AB} = (0, 0, 1, 0)$. Do đó:

$$\left| Gr(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \right| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \text{ và } \left| Gr(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \right| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

Sử dụng công thức (2) ta thu được:

$$d^2(\alpha, m) = \frac{\left| Gr(\overrightarrow{AB}, \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \right|}{\left| Gr(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) \right|} = \frac{1}{4}.$$

Vậy

$$d(\alpha, m) = \frac{1}{2} \text{ (đvđd).}$$

3.4. Một số bài toán tính khoảng cách trong Hình học không gian lớp 11

Các bài toán sau đây được chọn lọc trong sách giáo khoa Toán 11, tập 2. Chúng tôi sẽ trình bày lời giải bằng cách đưa vào hệ tọa độ trực chuẩn, tìm tọa độ của các điểm có liên quan và vận dụng công thức tính khoảng cách như đã nêu trên.

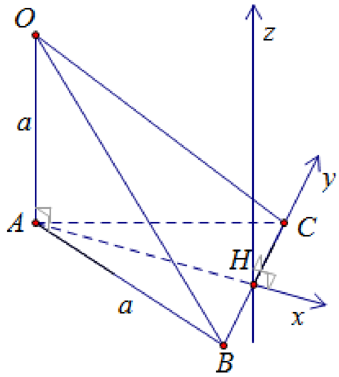
Ví dụ 5. (Trần Nam Dũng và nnk, 2023; trang 75) Cho hình chóp $O.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a và $OA \perp (ABC)$. Cho biết $OA = a$.

a) Tính khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC).

b) Tính khoảng cách từ điểm O đến đường thẳng BC.

Giải

Gọi H là trung điểm của cạnh BC và chọn hệ trục tọa độ trực chuẩn như hình 1.



Hình 1

Ta dễ dàng tìm được tọa độ của điểm: $H=(0,0,0)$, $A=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0\right)$, $B=\left(0,-\frac{a}{2},0\right)$, $C=\left(0,\frac{a}{2},0\right)$ và $O=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,a\right)$.

a) Mặt phẳng (ABC) đi qua điểm H có hệ vectơ chỉ phương $\left\{\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HC}\right\}$.

Dễ dàng tính được $\overrightarrow{HA}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0\right)$, $\overrightarrow{HC}=\left(0,\frac{a}{2},0\right)$, $\overrightarrow{HO}=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,a\right)$.

Do đó

$$\left|Gr\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HO}\right)\right|=\begin{vmatrix}\frac{3}{4}a^2 & 0 & \frac{3}{4}a^2\\ 0 & \frac{a^2}{4} & 0\\ \frac{3}{4}a^2 & 0 & \frac{7a^2}{4}\end{vmatrix}=\frac{3}{16}a^6 \text{ và}$$

$$\left|Gr\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HC}\right)\right|=\begin{vmatrix}\frac{3}{4}a^2 & 0\\ 0 & \frac{a^2}{4}\end{vmatrix}=\frac{3}{16}a^4.$$

Sử dụng công thức (1) ta thu được:

$$d^2\left(O,(ABC)\right)=\frac{\left|Gr\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HC},\overrightarrow{HO}\right)\right|}{\left|Gr\left(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{HC}\right)\right|}=a^2.$$

Vậy

$$d\left(O,(ABC)\right)=a \text{ (đvđd).}$$

b) Đường thẳng BC có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{HC}=\left(0,\frac{a}{2},0\right)$.

Ta có $\overrightarrow{OC}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},-a\right)$. Do đó:

$$\left|Gr\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{HC}\right)\right|=\begin{vmatrix}2a^2 & \frac{a^2}{4}\\ \frac{a^2}{4} & \frac{a^2}{4}\end{vmatrix}=\frac{7}{16}a^4 \text{ và } \left|Gr\left(\overrightarrow{HC}\right)\right|=\left|\frac{a^2}{4}\right|=\frac{a^2}{4}.$$

Sử dụng công thức (1) ta thu được:

$$d^2(O,BC)=\frac{\left|Gr\left(\overrightarrow{OC},\overrightarrow{HC}\right)\right|}{\left|Gr\left(\overrightarrow{HC}\right)\right|}=\frac{7}{4}a^2.$$

Vậy

$$d(O,BC)=\frac{\sqrt{7}}{2}a \text{ (đvđd).}$$

Ví dụ 6. (Trần Nam Dũng và nnk, 2023; trang 75, 77) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a. Cho biết $SA\perp(ABCD)$ và $SA=a$.

a) Tính khoảng cách từ điểm B đến mặt phẳng (SAD).

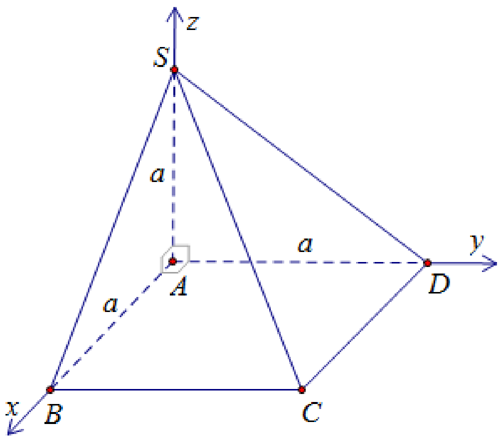
b) Tính khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng SC.

c) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SB và CD.

d) Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SC.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ trực chuẩn như hình 2.



Hình 2

Ta dễ dàng tìm được tọa độ của điểm: $A=(0,0,0)$, $B=(a,0,0)$, $D=(0,a,0)$, $S=(0,0,a)$ và $C=(a,a,0)$.

a) Mặt phẳng (SAD) đi qua A và có hệ vectơ chỉ phương $\left\{\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AD}\right\}$.

Dễ dàng tính được $\overrightarrow{AS}=(0,0,a)$, $\overrightarrow{AD}=(0,a,0)$, $\overrightarrow{AB}=(a,0,0)$.

Do đó

$$\left|Gr\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)\right|=\begin{vmatrix}a^2 & 0 & 0\\ 0 & a^2 & 0\\ 0 & 0 & a^2\end{vmatrix}=a^6 \text{ và } \left|Gr\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AD}\right)\right|=\begin{vmatrix}a^2 & 0\\ 0 & a^2\end{vmatrix}=a^4.$$

Sử dụng công thức (1) ta thu được:

$$d^2\left(B,(SAD)\right)=\frac{\left|Gr\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)\right|}{\left|Gr\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AD}\right)\right|}=a^2.$$

Vậy

$$d\left(B,(SAD)\right)=a \text{ (đvđd).}$$

b) Đường thẳng SC có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{SC}=(a,a,-a)$.

Ta tính được $\overrightarrow{SA}=(0,0,-a)$. Do đó:

$$\left|Gr\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SA}\right)\right|=\begin{vmatrix}3a^2 & a^2\\ a^2 & a^2\end{vmatrix}=2a^4 \text{ và } \left|Gr\left(\overrightarrow{SC}\right)\right|=\left|3a^2\right|=3a^2.$$

Sử dụng công thức (1) ta thu được:

$$d^2(A,SC)=\frac{\left|Gr\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SA}\right)\right|}{\left|Gr\left(\overrightarrow{SC}\right)\right|}=\frac{2}{3}a^2.$$

Vậy

$$d(A,SC)=\frac{\sqrt{6}}{3}a \text{ (đvđd).}$$

c) Đường thẳng SB có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{SB}=(a,0,-a)$ và đường thẳng CD có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{CD}=(-a,0,0)$.

Ta có $\overrightarrow{SC}=(a,a,-a)$. Do đó:

$$\left|Gr\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{CD}\right)\right|=\begin{vmatrix}3a^2 & 2a^2 & a^2\\ 2a^2 & 2a^2 & a^2\\ a^2 & a^2 & a^2\end{vmatrix}=a^6 \text{ và } \left|Gr\left(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{CD}\right)\right|=\begin{vmatrix}2a^2 & a^2\\ a^2 & a^2\end{vmatrix}=a^4.$$

Sử dụng công thức (2) ta thu được:

$$d^2(SB,CD)=\frac{\left|Gr\left(\overrightarrow{SC},\overrightarrow{SB},\overrightarrow{CD}\right)\right|}{\left|Gr\left(\overrightarrow{SB},\overrightarrow{CD}\right)\right|}=a^2.$$

Vậy

$$d(SB,CD)=a \text{ (đvđd).}$$

d) Đường thẳng AB có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB}=(a,0,0)$ và đường thẳng SC có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{SC}=(a,a,-a)$.

Ta có $\overrightarrow{AS}=(0,0,a)$. Do đó:

$$\left|Gr\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right)\right|=\begin{vmatrix}a^2 & 0 & -a^2\\ 0 & a^2 & a^2\\ -a^2 & a^2 & 3a^2\end{vmatrix}=a^6 \text{ và } \left|Gr\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right)\right|=\begin{vmatrix}a^2 & a^2\\ a^2 & 3a^2\end{vmatrix}=2a^4.$$

Sử dụng công thức (2) ta thu được:

$$d^2(AB,SC)=\frac{\left|Gr\left(\overrightarrow{AS},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right)\right|}{\left|Gr\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SC}\right)\right|}=\frac{a^2}{2}.$$

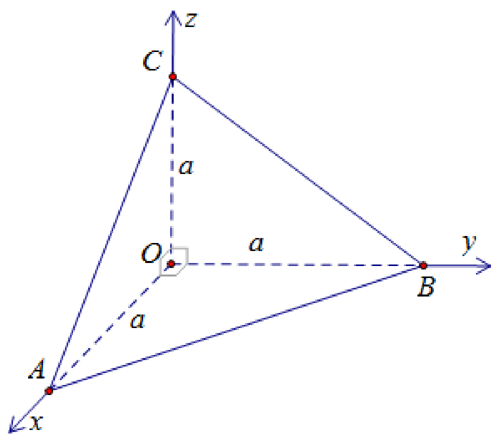
Vậy

$$d(AB,SC)=\frac{\sqrt{2}}{2}a \text{ (đvđd).}$$

Ví dụ 7. (Trần Nam Dũng và nnk, 2023; trang 78) Cho tứ diện $O.ABC$ có ba cạnh OA, OB, OC đều bằng a và vuông góc từng đôi một. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng OA và BC.

Giải

Chọn hệ trục tọa độ trực chuẩn như hình 3.



Hình 3

Ta dễ dàng tìm được tọa độ của điểm: $O=(0,0,0)$, $A=\left(a,0,0\right)$, $B=\left(0,a,0\right)$ và $C=\left(0,0,a\right)$.

Đường thẳng OA có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{OA}=\left(a,0,0\right)$ và đường thẳng BC có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{BC}=\left(0,-a,a\right)$.

Ta tính được $\overrightarrow{OB}=\left(0,a,0\right)$. Do đó:

$$\left|Gr\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\right)\right|=\begin{vmatrix} a^2 & 0 & -a^2 \\ 0 & a^2 & 0 \\ -a^2 & 0 & 2a^2 \end{vmatrix}=a^6 \text{ và } \left|Gr\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\right)\right|=\begin{vmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & 2a^2 \end{vmatrix}=2a^4.$$

Sử dụng công thức (2) ta thu được:

$$d^2(OA,SB)=\frac{\left|Gr\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\right)\right|}{\left|Gr\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{BC}\right)\right|}=\frac{a^6}{2a^4}=\frac{a^2}{2}.$$

Vậy

$$d(OA,SB)=\frac{\sqrt{2}}{2}a \text{ (đvđd)}.$$

4. Kết luận

Bài viết đã trình bày ma trận Gram và ứng dụng của nó để tính khoảng cách trong hình học. Vận dụng định thức của ma trận Gram tính được khoảng cách giữa hai cái phẳng bất kỳ trong hình học cao cấp và giải được một số bài toán khoảng cách trong hình học không gian của lớp 11. Khi tính khoảng cách trong hình học, chúng ta không có công cụ tính toán tốt nhất mà có công cụ tính toán phù hợp cho mỗi bài toán. Kết quả bài viết này nhằm mở rộng và phát triển kiến thức cho học sinh đặc biệt là học sinh khá, giỏi, có thể đem lại cho người làm toán thêm một công cụ tính toán đối với những bài toán tính khoảng cách hình học đòi hỏi phải dựng thêm nhiều đường phụ phức tạp.

Hướng nghiên cứu tiếp theo là ứng dụng định thức của ma trận Gram để tính thể tích trong hình học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông - Chương trình tổng thể*. Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26 tháng 12 năm 2018 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo.

[2] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán*. Ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TT-BGDĐT ngày 26 tháng 12 năm 2018 của Bộ trưởng Bộ Giáo dục và Đào tạo.

[3] Phạm Khắc Ban, Phạm Bình Đô (2005). *Hình học afin và hình học Ơclit trên những ví dụ và bài tập*. Nhà xuất bản Đại học Sư phạm.

[4] Lê Thị Hoài Châu (2004). *Phương pháp dạy – học hình học.* Nhà xuất bản Đại học Quốc gia TP Hồ Chí Minh.

[5] Văn Như Cương, Tạ Mân(1998), *Hình học afin và Hình học Ơclít*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[6] Trần Nam Dũng (Tổng chủ biên), Trần Đức Huyên, Nguyễn Thành Anh (đồng chủ biên), Nguyễn Cam, Ngô Hoàng Long, Phạm Hoàng Quân, Phạm Thị Thu Thủy (2023), *Sách giáo khoa Toán 11-Tập 2*, NXB Giáo dục.

[7] Trần Đức Huyên, Nguyễn Thành Anh (đồng chủ biên), Ngô Hoàng Long, Phạm Hoàng Quân, Phạm Thị Thu Thủy (2023), *Bài tập Toán 11-Tập 2.* Nhà xuất bản Giáo dục.

[8] Nguyễn Mộng Hy (2000), *Hình học cao cấp*. Nhà xuất bản Giáo dục.

[9] Nguyễn Mộng Hy (2001), *Bài tập Hình học cao cấp*. Nhà xuất bản Giáo dục.