XÂY DỰNG CÔNG THỨC NGHIỆM CHO PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN VOLTERRA BẰNG PHƯƠNG PHÁP THẾ LẶP

Nguyễn Phương Đại (1)

(1) Khoa Sư Phạm, Trường Đại học Thủ Dầu Một

Email tác giả: 2424601010020@student.tdmu.edu.vn

Ngày nhận bài: 16/3/2026; Chấp nhận đăng: 17/4/2026

Tóm tắt

Phương trình tích phân có nhiều ứng dụng trong khoa học và kỹ thuật, mô tả các hiện tượng có tính nhớ hoặc các tương tác mang tính toàn cục. Có nhiều phương pháp khác nhau để giải phương trình tích phân, chẳng hạn như phương pháp thế lặp, phương pháp chuỗi, phương pháp định lý điểm bất động, phương pháp biến đổi tích phân và các phương pháp số. Trong bài báo này, chúng tôi xét một số phương trình tích phân Volterra, thường xuất hiện khi nghiên cứu các phương trình vi phân với đạo hàm cấp không nguyên. Bằng cách áp dụng phương pháp thế lặp, chúng tôi xây dựng các công thức nghiệm chính xác cho những phương trình tích phân này. Phương pháp đề xuất có thể được mở rộng cho nhiều lớp phương trình tích phân khác, đồng thời các công thức nghiệm thu được là cơ sở để nghiên cứu các tính chất của nghiệm đối với phương trình vi tích phân có đạo hàm cấp không nguyên phi tuyến.

Từ khóa: *phương trình tích phân, phương trình Volterra, phương pháp lặp.*

Abstract

CONSTRUCTION OF EXPLICIT SOLUTION FORMULAS FOR VOLTERRA INTEGRAL EQUATIONS VIA THE METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS

Integral equations have numerous applications in science and engineering, as they model phenomena with memory effects or global interactions. Various methods have been developed for solving integral equations, including the method of successive approximations, series methods, fixed point theorems, integral transform techniques, and numerical approaches. In this paper, we investigate several classes of integral equations that commonly arise in the study of differential equations involving derivatives of non-integer order. By applying the method of successive approximations, we construct explicit solution formulas for these integral equations. The proposed method can be extended to other classes of integral equations. Moreover, the obtained solutions provide a basis for studying qualitative properties of solutions to nonlinear fractional integro-differential equations.

1. Giới thiệu

Phương trình tích phân thường mô tả các trạng thái có sự tích lũy trong một khoảng thời gian hoặc không gian. Tính chất này làm cho phương trình tích phân trở thành công cụ quan trọng trong việc mô tả các hệ thống có tính nhớ hoặc những hiện tượng tự nhiên phức tạp.

Năm 1823, Abel đã nghiên cứu bài toán đường đẳng thời và diễn đạt nó dưới dạng một phương trình tích phân (Abel, 1823). Volterra (1913) đã nghiên cứu về các hệ thống có nhớ, đặt nền móng cho các phương trình có cận thay đổi, mô tả chính xác hơn các quá trình tiến hóa trong cơ học và sinh học. Fredholm (1903) đã nghiên cứu lý thuyết phổ, từ đó cho thấy được sự tương đồng giữa phương trình tích phân về hệ phương trình tuyến tính. Đây là đóng góp quan trọng, không chỉ đơn giản hóa việc tìm lời giải mà còn cung cấp một khung tư duy mới để hiểu về tính tồn tại và duy nhất của nghiệm. Lý thuyết phương trình vi phân được Hilbert nâng tầm bằng cách nghiên cứu chúng trong không gian Hilbert, tạo gắn kết giữa giải tích và hình học không gian vô hạn chiều (Courant và Hilbert, 1953).

Phương trình tích phân có lợi thế hơn so với phương trình vi phân do chúng thường tích hợp các điều kiện biên hoặc điều kiện đầu vào cấu trúc hạt nhân. Điều này mang lại giá trị đặc biệt trong vật lý toán, nơi các phương trình như Lippmann-Schwinger cho phép mô tả các trạng thái tán xạ của hạt mà không cần định nghĩa lại toàn bộ không gian bao quanh (Hochstadt, 1973). Ngày nay, phương trình tích phân đã mang lại nhiều ứng dụng trong các lĩnh vực khác nhau, chẳng hạn như bài toán ngược hay công nghệ chẩn đoán hình ảnh y tế hoặc thăm dò địa vật lý, nơi cấu trúc bên trong của một vật thể được tái tạo lại từ các dữ liệu tích phân thu thập được từ bề mặt (Kress, 1999).

2. Tổng quan tình hình nghiên cứu

Các phương pháp giải phương trình tích phân là một chủ đề được quan tâm rộng rãi trong toán học ứng dụng. Không chỉ dừng lại ở việc tìm nghiệm số hoặc nghiên cứu tính giải được, nhiều công trình còn hướng đến việc xây dựng nghiệm chính xác cho các lớp phương trình khác nhau.

Trong công trình của Rahman (2007), tác giả đã trình bày nhiều phương pháp khác nhau để tìm nghiệm của phương trình Volterra; tuy nhiên, phần lớn các phương trình được xét là phương trình Volterra cổ điển với nhân liên tục, chưa chứa nhân kỳ dị. Brunner (2017) đã nghiên cứu sự tồn tại, tính duy nhất nghiệm và các phương pháp giải cho phương trình tích phân với các nhân kỳ dị yếu điển hình như $K(t,x)=(x-t)^{\alpha-1}$ hoặc $K(t,x)=\log(x-t)$. Dù vậy, các phương trình với nhân kỳ dị tổng quát hơn vẫn chưa được xem xét một cách đầy đủ. Nguyễn Minh Điện (2021) đã đưa phương trình vi phân cấp phân số về dạng phương trình tích phân tương đương, từ đó áp dụng phương pháp thế lặp để tìm nghiệm cho bài toán nghiên cứu. Cùng hướng tiếp cận này, Abbas và Faris (2019) đã áp dụng phương pháp thế lặp nhằm nghiên cứu sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm của phương trình vi phân chứa số hạng tích phân. Gần đây, Thenge (2026) đã sử dụng phương pháp thế lặp cho một số phương trình tích phân có tính kỳ dị; tuy nhiên, các kết quả thu được còn tương đối đơn lẻ và chưa có tính khái quát cao.

Từ các công trình nêu trên, có thể thấy rằng việc áp dụng các phương pháp khác nhau để tìm nghiệm của phương trình tích phân luôn là vấn đề thời sự. Tuy nhiên, cho đến nay vẫn chưa có công trình nào nghiên cứu một cách đầy đủ việc áp dụng phương pháp thế lặp nhằm xây dựng nghiệm chính xác cho các phương trình tích phân Volterra với nhân kỳ dị gắn với một lớp hàm thích hợp.

3. Phương pháp nghiên cứu

Xét phương trình tích phân Volterra không thuần nhất dạng:

$$u(t) = f(t) + \int_a^t F(t,s,u(s))ds \tag{1}$$

Đây là một trong những phương trình có nhiều ứng dụng trong khoa học kỹ thuật. Nếu F là hàm Lipschitz theo biến u, nghĩa là tồn tại $k(t,s)$ sao cho:

$$|F(t,s,u) - F(t,s,v)| \le k(t,s)|u-v| \tag{2}$$

với mọi $u,v \in \mathbb{R}$, trong đó $k(s,t)$ là hàm khả tích theo s trên $[a;t]$, khi đó phương trình (1) có nghiệm duy nhất (Hermann Brunner, 2017). Trong phần kết quả chính, chúng tôi chỉ xét trường hợp $F(t,s,u) = k(t,s)u$, trong đó $k(t;s)$ là hàm khả tích trên $[a;t]$, do đó các điều kiện (1) và (2) đều được thỏa mãn, nghĩa là phương trình Volterra có nghiệm duy nhất. Các phương pháp giải phương trình (1) có thể kể đến như phương pháp thế lặp, phương pháp điểm bất động, phương pháp biến đổi tích phân, phương pháp chuỗi.

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu áp dụng phương pháp thế lặp cho phương trình tích phân Volterra không thuần nhất. Chúng tôi mô tả phương pháp thế lặp cho phương trình (1) như sau:

* **Bước 1:** Chọn $u_0(x) = g(x)$ với g là hàm thực bất kỳ là giá trị xấp xỉ ban đầu.

* **Bước 2:** Tính $u_1(x)$ bằng sự thay thế:

$$u_1(x) = h(x) + \lambda \int_a^x f(t,x,u_0(t))dt.$$

$$\dots$$

* **Bước n:** Ta tính $u_n(x)$ từ $u_{n-1}(x)$:

$$u_n(x) = h(x) + \lambda \int_a^x f(t,x,u_{n-1}(t))dt.$$

Với điều kiện Lipschitz (2), ta có:

$$u_n(x) \to u(x), \quad (n \to \infty).$$

Nhận xét 3.1. Hàm $u_0(x) = g(x)$ có thể chọn tùy ý và nghiệm u không phụ thuộc cách chọn hàm g, tuy nhiên ta có thể chọn g một cách phù hợp để dễ dàng tính toán cho các bước sau. Trong nhiều trường hợp, ta có thể chọn $g(x) = h(x)$.

4. Kết quả

Kết quả chính của bài báo này hướng đến việc xây dựng công thức nghiệm chính xác cho một số phương trình tích phân Volterra với nhân kỳ dị, liên kết với một hàm thích hợp.

Để chuẩn bị cho việc phát biểu và chứng minh các kết quả chính, chúng tôi giới thiệu một số ký hiệu và một vài tính chất cơ bản của hàm Beta, Gamma và Mittag-Leffler. Chi tiết định nghĩa và tính chất cơ bản của các hàm này có thể được tìm thấy trong (Long et al., 2001; Gorenflo et al., 2020).

Hàm Beta và Gamma được ký hiệu tương ứng là $B(\cdot,\cdot)$ và $\Gamma(\cdot)$, được xác định theo công thức:

$$B(a,b)=\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx,\quad \Gamma(a)=\int_0^{+\infty} x^{a-1}e^{-x}dx$$

trong đó a,b là các số thực dương. Một vài tính chất và mối liên hệ quan trọng của hàm Gamma và Beta cho bởi các công thức sau:

$$B(a,b)=B(b,a),\quad \Gamma(a+1)=a\Gamma(a),\quad B(a,b)=\frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \text{ trong đó } a,b>0.$$

Hàm Mittag-Leffler một tham số được định nghĩa bởi:

$$E_\alpha(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+1)},\quad \alpha>0.$$

Với $\alpha,\beta>0$, hàm Mittag-Leffler hai tham số được định nghĩa bằng chuỗi:

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}.$$

Ta có $E_{\alpha,1}(z)=E_\alpha(z)$.

Để đơn giản, trong mục này, chúng ta luôn giả định rằng $\psi\in C^1[a,b]$ với $\psi'(t)>0$ với mọi $t\in[a,b]$. Với hàm ψ thỏa mãn điều kiện này, ta có kết quả sau:

Bổ đề 1. Cho $\alpha,\beta>0$, khi đó ta có:

$$\begin{aligned}I_{\alpha,\beta}(t,s)&=\int_s^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}(\psi(t)-\psi(s))^{\beta-1}dt\\&=B(\alpha,\beta)(\psi(x)-\psi(s))^{\alpha+\beta-1}.\end{aligned}$$

Chứng minh. Sử dụng đổi biến dạng:

$$u=\frac{\psi(t)-\psi(s)}{\psi(x)-\psi(s)},$$

suy ra $\psi(t)=\psi(s)+(\psi(x)-\psi(s))u$ và $d\psi(t)=(\psi(x)-\psi(s))du$. Đồng thời chú ý rằng khi $\psi(t)=\psi(s)$ thì $u=0$ và khi $\psi(t)=\psi(x)$ thì $u=1$. Do đó, ta có:

$$\begin{aligned}I_{\alpha,\beta}(t,s)&=(\psi(x)-\psi(s))^{\alpha+\beta-1}\int_0^1(1-u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}du\\&=B(\alpha,\beta)(\psi(x)-\psi(s))^{\alpha+\beta-1}.\end{aligned}$$

Bổ đề được chứng minh xong.

Sử dụng các quy ước, ký hiệu và bổ đề trên, chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh kết quả chính của bài báo này. Ngoài ra, để thuận tiện cho việc phát biểu các kết quả chính, trong các định lý dưới đây, chúng tôi luôn giả thiết rằng $\alpha > 0.$ Giả thiết này đảm bảo các nhân của phương trình tích phân luôn là hàm khả tích.

Định lý 1. Cho $g \in C[a,b]$, xét phương trình tích phân:

$$u(x) = g(x) - \lambda \int_a^x K_{\alpha,\psi}(t)u(t)dt, \tag{3}$$

trong đó $K_{\alpha,\psi}(t) = \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}$. Khi đó, nghiệm của phương trình (3) cho bởi:

$$u(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)} \int_a^x K_{n\alpha,\psi}(t)g(t)dt.$$

Đặc biệt, với $g(x) = u_a$ là hằng số, ta có:

$$u(x) = u_a E_\alpha\left(-\lambda\Gamma(\alpha)(\psi(x) - \psi(a))^\alpha\right).$$

Chứng minh. Đặt $u_0(x) = g(x)$, bằng phương pháp thế lặp, ta thu được:

$$u_1(x) = g(x) - \lambda \int_a^x K_{\alpha,\psi}(t)g(t)dt,$$

trong đó $K_{\alpha,\psi}(t) = \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}$. Thực hiện thế lặp tiếp theo, ta được $u_2(x)$ cho bởi:

$$u_2(x) = g(x) - \lambda \int_a^x K_{\alpha,\psi}(t)u_1(t)dt = g(x) - \lambda \int_a^x K_{\alpha,\psi}(t)g(t)dt + \lambda^2 I, \tag{4}$$ với:

$$I = \int_a^x K_{\alpha,\psi}(t)\left[\int_a^t K_{\alpha,\psi}(s)g(s)ds\right]dt.$$

Đổi thứ tự lấy tích phân ta được:

$$I = \int_a^x \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}\left[\int_a^t \psi'(s)(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}g(s)ds\right]dt$$

$$= \int_a^x g(s)\psi'(s)\left[\int_s^x \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}(\psi(t) - \psi(s))^{\alpha-1}dt\right]ds.$$

Sử dụng Bổ đề 1 với $\beta = \alpha$, ta thu được:

$$I = \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \int_a^x \psi'(s)(\psi(x) - \psi(s))^{2\alpha-1}g(s)ds = \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \int_a^x K_{2\alpha,\psi}(s)g(s)ds.$$

Thay kết quả vừa nhận được vào (4), ta có:

$$u_2(x) = g(x) - \lambda \int_a^x K_{\alpha,\psi}(s)g(s)dt + \lambda^2 \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \int_a^x K_{2\alpha,\psi}(s)g(s)ds$$

$$= g(x) + \sum_{k=1}^{2} (-\lambda)^k \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_a^x K_{k\alpha,\psi}(s)g(s)ds.$$

Giả sử:

$$u_n(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} (-\lambda)^k \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_a^x K_{k\alpha,\psi}(s)g(s)ds, \text{ ta sẽ chứng minh:}$$

$$u_{n+1}(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n+1} (-\lambda)^k \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_a^x K_{k\alpha,\psi}(s)g(s)ds.$$

Thật vậy, ta có:

$$u_{n+1}(x) = g(x) - \lambda \int_a^x K_{\alpha,\psi}(t)u_n(t)dt$$

$$= g(x) - \lambda \sum_{k=1}^{n} \int_a^x K_{\alpha,\psi}(t) \left[(-\lambda)^k \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_a^t K_{k\alpha,\psi}(s)g(s)ds \right] dt.$$

Áp dụng Bổ đề 1 và biến đổi tương tự ở bước trước đó, ta có:

$$\int_a^x K_{\alpha,\psi}(t) \left[\int_a^t K_{k\alpha,\psi}(s)g(s)ds \right] dt$$

$$= \int_a^x g(s)\psi'(s) \left[\int_s^x \psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}(\psi(t)-\psi(s))^{k\alpha-1} dt \right] ds$$

$$= B(\alpha, k\alpha) \int_a^x K_{(k+1)\alpha,\psi}(s)g(s)ds.$$

Kết hợp các đẳng thức vừa thu được và sử dụng đẳng thức liên hệ giữa hàm Gamma và Beta, ta nhận được:

$$u_{n+1}(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n+1} (-\lambda)^k \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_a^x K_{k\alpha,\psi}(s)g(s)ds.$$

Từ nguyên lý quy nạp toán học, ta kết luận được:

$$u_n(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{n} (-\lambda)^k \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_a^x K_{k\alpha,\psi}(s)g(s)ds$$

với mọi $n \in \mathbb{N}^*$. Do g liên tục trên $[a;b]$ nên tồn tại $M_g = \max_{a\le t\le b} g(t)$. Sử dụng Bổ đề 1, ta có:

$$\begin{aligned}
&\left| g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)} \int_a^x K_{n\alpha,\psi}(s) g(s) ds \right| \\
&\le M_g + M_g \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^n \frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)} \int_a^x K_{n\alpha,\psi}(s) ds \\
&= M_g + M_g \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^n \frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)} \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(n\alpha+1)} (\psi(x)-\psi(a))^{n\alpha} \\
&= M_g \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[|\lambda|\Gamma(\alpha)(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}]^n}{\Gamma(n\alpha+1)} \\
&= M_g E_\alpha(|\lambda|\Gamma(\alpha)(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}).
\end{aligned}$$

Điều này có nghĩa là chuỗi $g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)} \int_a^x K_{n\alpha,\psi}(s) g(s) ds$ hội tụ đều trên $[a;b]$ Do đó $u_n(x) \to u(x)$ là hàm liên tục và ta thu được công thức nghiệm của phương trình tích phân (3) dưới dạng:

$$u(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)} \int_a^x K_{n\alpha,\psi}(s) g(s) ds$$

Tiếp theo ta xét trường hợp $g(x) \equiv u_a$ (hằng số). Từ công thức nghiệm thu được ở trên, trong trường hợp này, ta có:

$$u(x) = u_a + u_a \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)} \int_a^x \psi'(s)(\psi(x)-\psi(s))^{n\alpha-1} ds.$$

Áp dụng Bổ đề 1 với $\beta = 1$ và chú ý rằng $B(n\alpha,1) = \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(n\alpha+1)}$, ta được:

$$\begin{aligned}
u(x) &= u_a + u_a \sum_{n=1}^{\infty} (-\lambda)^n \frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)} \frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(n\alpha+1)} (\psi(x)-\psi(a))^{n\alpha} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left[-\lambda\Gamma(\alpha)(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}\right]^n}{\Gamma(n\alpha+1)} \\
&= u_a E_\alpha(-\lambda\Gamma(\alpha)(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha})
\end{aligned}$$

Định lý 1 được chứng minh.

Định lý 2. Với $g \in C[a,b]$ và $\psi(a) > 0$, $\psi(x) \ne 1$ với mọi $x \in [a,b]$, xét phương trình tích phân:

$$u(x) = g(x) + \lambda \int_a^x \left(\ln \frac{\psi(x)}{\psi(t)} \right)^{\alpha-1} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} u(t) dt. \tag{5}$$

Khi đó, ta có:

$$u(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{\psi(x)}{\psi(s)} \right)^{n\alpha-1} \frac{\psi'(s)}{\psi(s)} g(s)ds.$$

Đặc biệt, nếu $g(x) \equiv u_a$ (hằng số), ta có:

$$u(x) = u_a E_\alpha \left(\lambda \Gamma(\alpha) \left(\ln \frac{\psi(x)}{\psi(a)} \right)^\alpha \right).$$

Chứng minh. Sử dụng phương pháp thế lặp với $u_0(x) = g(x)$, ta có:

$$u_1(x) = g(x) + \lambda \int_a^x \left(\ln \frac{\psi(x)}{\psi(t)} \right)^{\alpha-1} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} g(t)dt$$

và

$$u_2(x) = g(x) + \lambda \int_a^x \left(\ln \frac{\psi(x)}{\psi(t)} \right)^{\alpha-1} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} u_1(t)dt$$

$$= g(x) + \lambda \int_a^x \left(\ln \frac{\psi(x)}{\psi(t)} \right)^{\alpha-1} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} g(t)dt + \lambda^2 J, \tag{6}$$

với:

$$J = \int_a^x \left(\ln \frac{\psi(x)}{\psi(t)} \right)^{\alpha-1} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} \left[\int_a^t \left(\ln \frac{\psi(t)}{\psi(s)} \right)^{\alpha-1} \frac{\psi'(s)}{\psi(s)} g(s)ds \right] dt.$$

Bằng phương pháp đổi thứ tự tích phân, ta được:

$$J = \int_a^x \frac{\psi'(s)}{\psi(s)} g(s) \left[\int_s^x \left(\ln \frac{\psi(x)}{\psi(t)} \right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{\psi(t)}{\psi(s)} \right)^{\alpha-1} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} dt \right] ds. \tag{7}$$

Để đơn giản, ta đặt:

$$J_0 = \int_s^x \left(\ln \frac{\psi(x)}{\psi(t)} \right)^{\alpha-1} \left(\ln \frac{\psi(t)}{\psi(s)} \right)^{\alpha-1} \frac{\psi'(t)}{\psi(t)} dt.$$

Biến đổi trực tiếp và áp dụng Bổ đề 1, ta có:

$$J_0 = \int_a^x (\ln \psi(x) - \ln \psi(t))^{\alpha-1} (\ln \psi(t) - \ln \psi(s))^{\alpha-1} d(\ln \psi(t))$$

$$= \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} (\ln \psi(x) - \ln \psi(s))^{2\alpha-1} = \frac{(\Gamma(\alpha))^2}{\Gamma(2\alpha)} \left(\ln \frac{\psi(x)}{\psi(s)} \right)^{2\alpha-1}.$$

Thay kết quả vừa nhận được vào (7) kết hợp với (6), ta được:

$$u_2(x) = g(x) + \sum_{k=1}^{2} \lambda^k \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha)} \int_a^x \left(\ln \frac{\psi(x)}{\psi(s)} \right)^{k\alpha-1} \frac{\psi'(s)}{\psi(s)} g(s)ds.$$

Lặp lại phương pháp chứng minh Định lý 1, ta kết luận được nghiệm của bài toán (5) được cho dưới dạng chuỗi:

$$u(x)=g(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{\psi(x)}{\psi(s)}\right)^{n\alpha-1}\frac{\psi'(s)}{\psi(s)}g(s)ds.$$

Nếu $g(x)\equiv u_a$, khi đó, ta có:

$$\begin{aligned}
u(x)&=u_a+u_a\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)}\int_a^x\left(\ln\frac{\psi(x)}{\psi(s)}\right)^{n\alpha-1}\frac{\psi'(s)}{\psi(s)}ds\\
&=u_a+u_a\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)}\int_a^x\left(\ln\psi(x)-\ln\psi(s)\right)^{n\alpha-1}d(\ln\psi(s))\\
&=u_a+u_a\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)}\frac{1}{n\alpha}\left(\ln\frac{\psi(x)}{\psi(a)}\right)^{n\alpha}\\
&=u_a+u_a\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n\frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)}\frac{\Gamma(n\alpha)}{\Gamma(n\alpha+1)}\left(\ln\frac{\psi(x)}{\psi(a)}\right)^{n\alpha}\\
&=u_a\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\lambda\Gamma(\alpha)\left(\ln\frac{\psi(x)}{\psi(a)}\right)^{\alpha}\right)^n}{\Gamma(n\alpha+1)}\\
&=u_aE_\alpha\left(\lambda\Gamma(\alpha)\left(\ln\frac{\psi(x)}{\psi(a)}\right)^{\alpha}\right).
\end{aligned}$$

Định lý 2 được chứng minh.

Định lý 3. Xét phương trình tích phân Volterra:

$$u(x)=e^{-\lambda\psi(x)}g(x)+k\int_a^x\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}e^{-\lambda(\psi(x)-\psi(t))}u(t)dt, \qquad (8)$$

trong đó $\alpha>0$, $k,\lambda\in\mathbb{R}$, g là hàm liên tục trên $[a,\ b]$.

Khi đó nghiệm chính xác của phương trình (8) được cho bởi:

$$u(x)=e^{-\lambda\psi(x)}g(x)+e^{-\lambda\psi(x)}\sum_{n=1}^{\infty}k^n\frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)}\int_a^x K_{n\alpha,\psi}(t)g(t)dt,$$

trong đó $K_{\alpha,\psi}(t)=\psi'(t)(\psi(x)-\psi(t))^{\alpha-1}$.

Đặc biệt, khi $g(x)\equiv u_a$ (hằng số) thì:

$$u(x)=u_ae^{-\lambda\psi(x)}E_\alpha\left(k\Gamma(\alpha)(\psi(x)-\psi(a))^{\alpha}\right).$$

Chứng minh. Nhân cả 2 vế của (8) với $e^{\lambda\psi(x)}$, ta được phương trình tương đương:

$$e^{\lambda\psi(x)}u(x)=g(x)+k\int_a^x K_{\alpha,\psi}(t)e^{\lambda\psi(t)}u(t)dt.$$

Đặt:

$$v(x) = e^{\lambda\psi(x)}u(x),$$

ta được phương trình:

$$v(x) = g(x) + k\int_a^x K_{\alpha,\psi}(t)v(t)dt. \tag{9}$$

Phương trình vừa nhận được là phương trình đã xét trong Định lý 1. Áp dụng kết quả

của Định lý 1 cho phương trình (9), ta có:

$$v(x) = g(x) + \sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)} \int_a^x K_{n\alpha,\psi}(t)g(t)dt,$$

trong đó $K_{\alpha,\psi}(t) = \psi'(t)(\psi(x) - \psi(t))^{\alpha-1}$.

Do $u(x) = e^{-\lambda\psi(x)}v(x)$, từ phương trình trên ta thu được:

$$u(x) = g(x)e^{-\lambda\psi(x)} + e^{-\lambda\psi(x)}\sum_{n=1}^{\infty} k^n \frac{\Gamma(\alpha)^n}{\Gamma(n\alpha)} \int_a^x K_{n\alpha,\psi}(t)g(t)dt.$$

Tương tự, khi $g(x) \equiv u_a$, ta có:

$$v(x) = u_a E_\alpha\left(k\Gamma(\alpha)(\psi(x) - \psi(a))^\alpha\right).$$

Từ đó, ta nhận được:

$$u(x) = u_a e^{-\lambda\psi(x)} E_\alpha\left(k\Gamma(\alpha)(\psi(x) - \psi(a))^\alpha\right).$$

Định lý 3 được chứng minh.

5. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã sử dụng phương pháp thế lặp để xây dựng công thức nghiệm chính xác cho ba dạng phương trình tích phân Volterra. Các công thức này có thể được sử dụng làm cơ sở ban đầu để nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của các phương trình vi phân cấp phân thứ.

Phương pháp được áp dụng trong bài báo có thể mở rộng cho nhiều lớp phương trình tích phân khác nhau. Do đó, trong các nghiên cứu tiếp theo, chúng tôi dự định mở rộng phương pháp này cho các lớp phương trình tích phân dạng Volterra tổng quát hơn.

Hơn nữa, dựa trên những kết quả đạt được trong bài báo, chúng tôi dự kiến áp dụng phương pháp này để nghiên cứu sự tồn tại và duy nhất nghiệm của các phương trình vi phân với đạo hàm cấp phân thứ.

Lời cảm ơn

Bài báo này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của Thầy TS. Nguyễn Minh Điện, tôi xin chân thành cảm ơn Thầy đã tận tình hướng dẫn và hỗ trợ tôi hoàn thành bài báo này. Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Thủ Dầu Một trong đề tài mã số DTSV.25.2-009.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Abbas, S.H., Faris, H.S. (2019). Successive Approximation Method of Integro-Differential Equation with Applications. Academic Journal of Nawroz University. 8(3), 96-101.

[2] Abel, N.H. (1823). *Resolution d'un probleme de mecanique*. Journal für die reine und angewandte Mathematik.

[3] Brunner, H. (2017). *Volterra Integral Equations: An Introduction to Theory and Applications.* Cambridge University Press.

[4] Courant, R., Hilbert, D. (1953). *Methods of Mathematical Physics*. Interscience Publishers.

[5] Dien, N.M. (2021). *Existence and continuity results for a nonlinear fractional Langevin equation with a weakly singular source.* J. Integral Equations Applications. 33(3), 349-369.

[6] Fredholm, I. (1903). *Sur une classe d'équations fonctionnelles.* Acta Mathematica.

[7] Gorenflo, R., Kilbas, A.A., Mainardi, F., Rogosin, S. (2020). *Mittag-Leffler Functions, Related Topics and Applications.* Springer Berlin, Heidelberg.

[8] Hochstadt, H. (1973). *Integral Equations.* Wiley-Interscience.

[9] Kress, R. (1999). *Linear Integral Equations*. Springer.

[10] Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang, Hoàng Quốc Toàn (2001). Giáo trình Giải tích (tập 3). Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.

[11] Rahman, M. (2007). *Integral Equations and their Applications*. WIT Press.

[12] Thenge, A.B., Mane, J.K., Raut, D.K. (2026). *Solutions of Integral Equations by using Successive Approximation Method*. Indian Journal of Science and Technology. 19(4), 192-202.

[13] Volterra, V. (1913). *Lecons sur les fonctions de lignes.* Gauthier-Villars.