

PHÂN TÍCH MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA HÀM SỐ MŨ TRONG CÁC BÀI TOÁN OLYMPIC SINH VIÊN

Lê Cẩm Tú⁽¹⁾, Nguyễn Thành Sang^(2, *)

(1) Khoa Sư Phạm, Trường Đại học Thủ Dầu Một,

Email: 2424601010010@student.tdmu.edu.vn

(2) Khoa Sư phạm, Trường Đại học Thủ Dầu Một,

Email: 2424601010007@student.tdmu.edu.vn

(*) Tác giả liên hệ

Ngày nhận bài: 13/3/2026; Chấp nhận đăng: 15/4/2026

Tóm tắt

Hàm mũ đóng vai trò rất quan trọng trong toán học nhờ những tính chất đặc biệt liên quan đến đạo hàm và nguyên hàm của nó. Việc khai thác các tính chất của hàm mũ đã được thực hiện trong nhiều lĩnh vực khác nhau, chẳng hạn như giải toán hay tìm nghiệm của phương trình vi phân. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một số ứng dụng của hàm mũ trong việc giải các dạng toán thường xuất hiện trong các kỳ thi Olympic toán sinh viên. Cụ thể, chúng tôi phân tích một số cơ sở hoặc dấu hiệu cho thấy hàm mũ có thể được sử dụng để xử lý các bài toán như vậy. Những phân tích này có thể hữu ích cho sinh viên quan tâm đến việc tìm hiểu và rèn luyện các dạng toán Olympic sinh viên.

Từ khóa: đạo hàm, hàm mũ, Olympic toán sinh viên, ứng dụng của hàm mũ.

Abstract

ANALYSIS OF SOME APPLICATIONS OF THE EXPONENTIAL FUNCTION IN OLYMPIAD-TYPE PROBLEMS FOR UNIVERSITY STUDENTS

The exponential function plays a very important role in mathematics due to its special properties related to its derivative and antiderivative. The exploitation of the properties of the exponential function has been carried out in many different areas, such as problem solving and finding solutions of differential equations. In this paper, we study several applications of the exponential function in solving types of problems that often appear in Mathematical Olympiad examinations for university students. In particular, we analyze several bases or indications showing that the exponential function can be used to handle such problems. These analyses may be useful for students who are interested in studying and practicing Olympiad-type problems for university students.

1. Giới thiệu

Hàm mũ $\exp(\cdot)$ có vai trò đặc biệt quan trọng trong giải tích hiện đại và nhiều lĩnh vực khác của toán học. Từ thế kỷ XVII, John Napier thiết lập bảng logarit giúp đơn giản các phép toán phức tạp. Sau đó Isaac Newton và Gottfried Wilhelm Leibniz đã đặt nền tảng lý thuyết cho việc nghiên cứu các hàm siêu việt, trong đó có hàm mũ.

Ký hiệu e là cơ số logarit tự nhiên được đề xuất bởi Leonhard Euler khi ông sử dụng để chứng minh nhiều tính chất cơ bản của hàm $\exp(x)$. Hơn nữa, ông đã thiết lập mối liên hệ quan trọng giữa hàm mũ, logarit và các hàm lượng giác thông qua công thức nổi tiếng mang tên ông: $\exp(ix) = \cos x + i \sin x$ (Apostol, 1967).

Một tính chất đặc biệt của hàm $\exp(x)$ là đạo hàm của nó bằng chính nó, tính chất này khiến hàm mũ trở thành một công cụ quan trọng trong việc mô tả các quá trình biến thiên liên tục và đóng vai trò nền tảng trong lý thuyết phương trình vi phân. Chính xác hơn, nghiệm của các phương trình hoặc hệ phương trình vi phân tuyến tính có thể biểu diễn thông qua hàm mũ hoặc các biểu thức liên quan đến hàm mũ (Walter, 1998).

Ngoài ra, hàm mũ cũng đóng vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực khác nhau như vật lý, thống kê, kinh tế, y sinh học. Chẳng hạn, hàm mũ được sử dụng trong các mô hình tăng trưởng, quá trình phân rã nguyên tử hay các mô hình lan truyền dịch bệnh (Boylestad, 2010). Hơn nữa, do các tính chất đặc biệt của hàm mũ, chúng thường xuyên được khai thác trong nhiều dạng toán Olympic sinh viên.

2. Tổng quan tình hình nghiên cứu

Hàm mũ từ lâu đã được sử dụng để giải nhiều dạng bài toán khác nhau (Demidovich và Yankovsky, 1989; Larson, 1983). Ngay từ những kỳ thi Olympic Toán học sinh viên toàn quốc đầu tiên, hàm mũ cũng thường xuyên xuất hiện trong lời giải của các bài toán trong kỳ thi này, chẳng hạn như Câu 2 của đề thi Olympic Toán học sinh viên toàn quốc các năm 2000, 2002, 2004, 2005 và Câu 4 của đề thi năm 2004. Các bài toán này đều có thể giải được bằng cách sử dụng hàm mũ. Lời giải đầy đủ theo hướng tiếp cận này được trình bày trong (Nguyễn Văn Mậu et al., 2006).

Có thể thấy rằng các bài toán có sử dụng hàm mũ trong quá trình giải vẫn tiếp tục xuất hiện xuyên suốt trong các bài toán liên quan đến kỳ thi này cho tới nay. Năm 2022, nhiều bài toán có sử dụng hàm mũ được đề xuất cho kỳ thi Olympic Toán học toàn quốc (Ngô Quốc Anh et al., 2022). Bài 1 trong đề thi chính thức (của cả Bảng A và Bảng B) kỳ thi Olympic Toán học sinh viên – học sinh năm 2023 cũng là một dạng toán có thể sử dụng hàm mũ để giải quyết bài toán; đồng thời, nhiều bài toán được đề xuất cho kỳ thi này cũng sử dụng hàm mũ trong lời giải (Ngô Quốc Anh et al., 2023). Năm 2024, Bài 4 trong đề thi chính thức của kỳ thi Olympic Toán học sinh viên – học sinh toàn quốc (Bảng B) tiếp tục là một bài toán liên quan đến việc sử dụng hàm mũ trong giải toán, đồng thời một số bài toán đề xuất khác cũng có những ý tưởng tương tự (Ngô Quốc Anh et al., 2024). Đề thi chính thức của kỳ thi này năm 2025 không có bài toán ứng dụng hàm mũ trong quá trình giải quyết bài toán; tuy nhiên, các đề toán được đề xuất vẫn xuất hiện các dạng toán này (Ngô Quốc Anh et al., 2025).

Những ví dụ trên cho thấy việc sử dụng hàm mũ như một công cụ trong giải toán không chỉ xuất hiện ở một số năm riêng lẻ mà còn trở thành một kỹ thuật quen thuộc, được sử dụng xuyên suốt trong nhiều kỳ thi Olympic Toán học sinh viên.

Các bài toán được đưa ra trong các tài liệu hoặc các kỳ thi trên đều có những hướng dẫn hoặc lời giải khá chi tiết. Tuy nhiên, trong các hướng hoặc lời giải được giới thiệu hầu như chưa có những phân tích về việc các ý tưởng của lời giải được hình thành như thế nào, cũng như lý do vì sao hàm mũ lại được lựa chọn trong quá trình giải bài toán. Việc chỉ đưa ra hướng dẫn hoặc lời giải thuần túy có thể gây ra nhiều khó khăn cho độc

giả, đặc biệt là những người muốn tìm hiểu rõ quá trình hình thành ý tưởng của lời giải; đồng thời, cách làm này cũng khó tạo ra sự thay đổi mạnh mẽ trong tư duy của người học.

Chính vì vậy, việc phân tích một cách hệ thống cơ chế hình thành lời giải, đặc biệt là vai trò của hàm mũ trong quá trình xây dựng ý tưởng, là cần thiết. Xuất phát từ nhận định này, bài báo tập trung làm sáng tỏ bản chất của phương pháp sử dụng hàm mũ thông qua việc phân tích cấu trúc của lời giải, đồng thời chỉ ra tính hợp lý của việc lựa chọn hàm mũ trong quá trình giải bài toán.

3. Phương pháp và công cụ nghiên cứu

Ý tưởng chính trong nghiên cứu này là sử dụng hàm mũ kết hợp với quy tắc đạo hàm của tích và một số quy tắc cơ bản khác để giải quyết các bài toán đặt ra.

3.1. Đạo hàm cấp cao của hàm mũ

Cho λ là số thực bất kỳ. Khi đó, với mọi $n \in \mathbb{N}$, ta có:

$$(e^{\lambda x})^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}.$$

3.2. Công thức Leibniz

Giả sử f, g là các hàm có đạo hàm cấp n . Khi đó, ta có công thức Leibniz sau:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x),$$

trong đó

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3.3. Phương pháp chuẩn hóa

Trong quá trình giải toán, khi xuất hiện biểu thức có dạng

$$\sum_{i=0}^n p_i(x) f^{(i)}(x),$$

trong đó $p_n(x) \neq 0$, ta thường sử dụng phương pháp *chuẩn hóa* bằng cách chia toàn bộ biểu thức cho $p_n(x)$. Khi đó hệ số của đạo hàm bậc cao nhất được đưa về 1, và biểu thức được viết lại dưới dạng

$$\sum_{i=0}^n \frac{p_i(x)}{p_n(x)} f^{(i)}(x).$$

Dạng chuẩn này thường thuận lợi hơn cho việc phân tích và áp dụng các phương pháp quen thuộc trong giải tích.

Ngoài ra, một dạng thường gặp trong nghiên cứu này là: với r là hàm khả tích trên $[a, b]$ và nếu h khả vi trên (a, b) sao cho

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = r(x)$$

hay dạng chuẩn hóa tương đương

$$h'(x) = r(x)h(x).$$

Khi đó, ta có

$$h(x) = C \exp\left(\int_a^x r(s)ds\right),$$

với C là một hằng số tùy ý. Trong nhiều trường hợp khi áp dụng vào các bài toán cụ thể, ta thường chọn $C = 1$. Khi đó

$$h(x) = \exp\left(\int_a^x r(s)ds\right). \tag{1}$$

Đặc biệt, nếu $\int_a^x r(s)ds = R(x) - R(a)$ thì nhân tử liên quan đến hàm mũ có dạng

$$e^{\int_a^x r(s)ds} = e^{R(x)-R(a)} = e^{-R(a)} e^{R(x)}.$$

Do đó, thay vì xét nhân tử $e^{R(x)-R(a)}$, ta chỉ cần xét nhân tử $e^{R(x)}$, vì hai biểu thức này chỉ sai khác nhau bởi một hằng số dương.

3.4. Một số định lý cơ bản

Ngoài các phương pháp và công cụ đã trình bày ở trên, chúng tôi cũng sử dụng định lý Rolle và quy tắc L'Hospital (Trần Đức Long et al., 2001).

Định lý 3.1 (Định lý Rolle). *Nếu f là hàm liên tục trên $[a, b]$, khả vi trong (a, b) và $f(a) = f(b)$ thì tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.*

Định lý 3.2 (Quy tắc L'Hospital). *Nếu $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$ và $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tồn tại thì*

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Nhận xét 3.3.

(1). Quy tắc L'Hospital vẫn đúng khi $c = \pm\infty$.

(2). Thông thường quy tắc L'Hospital trong các tài liệu, chẳng hạn như Trần Đức Long et al. (2001) yêu cầu $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$ và $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$ nhưng trên thực tế, ta chỉ cần điều kiện $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = \infty$. Trong tài liệu này đã trình bày chứng minh chi tiết cho quy tắc L'Hospital, trong đó không cần điều kiện $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$.

4. Kết quả và thảo luận

Trong phần này, chúng tôi giới thiệu một số bài toán dạng thi Olympic sinh viên, trong đó hàm mũ được sử dụng như một công cụ quan trọng trong việc giải quyết bài toán. Đối với mỗi bài toán, chúng tôi phân tích ý tưởng và trình bày cách tiếp cận thích hợp, qua đó làm rõ quá trình hình thành lời giải cũng như vai trò của hàm mũ trong việc xử lý các bài toán này.

Bài toán 1. Cho a, b là hai số thực với $a < b$ và $\lambda \in \mathbb{R}$. Giả sử f là hàm khả vi liên tục tới cấp n trên $[a, b]$ và có ít nhất $n+1$ giá trị $a \leq x_1 < x_2 < \dots < x_{n+1} \leq b$ sao cho

$$f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{n+1}) = 0.$$

Chứng minh rằng, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\sum_{k=0}^n \binom{k}{n} \lambda^{n-k} f^{(k)}(c) = 0,$$

trong đó $\binom{k}{n} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Phân tích ý tưởng và khai thác giả thiết. Khi giải toán, trước hết ta cần quan sát và phân tích các giả thiết của bài toán. Một vấn đề tự nhiên đặt ra là làm thế nào để xuất hiện các biểu thức trong đề bài, hoặc có thể biến đổi chúng về một dạng thuận lợi hơn để xử lý. Đồng thời, cần xem xét các đại lượng đã cho có mối liên hệ với nhau như thế nào. Trong bài toán này, khi quan sát biểu thức cần chứng minh, ta nhận thấy sự xuất hiện của các đạo hàm $f^{(k)}$ cùng với các hệ số $\binom{n}{k}$, điều này gợi ý đến việc sử dụng công thức Leibniz cho đạo hàm bậc n của một tích:

$$(fg)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x).$$

Vấn đề đặt ra là cần chọn hàm g như thế nào để làm xuất hiện các hạng tử dạng $\lambda^{n-k} f^{(k)}$ ở vế trái của biểu thức cần chứng minh? So sánh với công thức Leibniz trên, ta sẽ tìm hàm g thỏa mãn

$$g^{(m)}(x) = \lambda^m g(x).$$

Từ tính chất đạo hàm cấp cao của hàm mũ, ta thấy có thể chọn được hàm g dạng:

$$g(x) = e^{\lambda x}.$$

Khi đó, xét hàm

$$G(x) = e^{\lambda x} f(x).$$

Áp dụng công thức Leibniz và lưu ý rằng $(e^{\lambda x})^{(m)} = \lambda^m e^{\lambda x}$, ta được

$$G^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{\lambda x})^{(n-k)} f^{(k)}(x) \\ = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{n-k} f^{(k)}(x).$$

Do đó, việc chứng minh tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{n-k} f^{(k)}(c) = 0$$

tương đương với việc chứng minh tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$G^{(n)}(c) = 0.$$

Để làm điều này, ta tiếp tục khai thác các giả thiết của bài toán. Vì $f(x_k) = 0$ nên

$$G(x_k) = e^{\lambda x_k} f(x_k) = 0$$

với mọi $k = 1, 2, \dots, n+1$. Do đó G có ít nhất $n+1$ nghiệm phân biệt.

Theo Định lý Rolle, giữa hai nghiệm liên tiếp của G tồn tại ít nhất một nghiệm của G' . Suy ra G' có ít nhất n nghiệm. Lặp lại lập luận này cho các đạo hàm bậc cao hơn, ta suy ra $G^{(n)}$ có ít nhất một nghiệm trên (a, b) . Điều này hoàn tất chứng minh. Dựa trên các ý tưởng và phân tích đã nêu, ta có lời giải chi tiết Bài toán 1 như sau.

Chứng minh. Xét hàm số

$$G(x) = e^{\lambda x} f(x).$$

Áp dụng công thức Leibniz, ta có

$$G^{(n)}(x) = e^{\lambda x} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{n-k} f^{(k)}(x). \tag{2}$$

Vì $f(x_k) = 0$ nên

$$G(x_k) = e^{\lambda x_k} f(x_k) = 0$$

với mọi $k = 1, 2, \dots, n+1$. Theo định lý Rolle, tồn tại $c_{1,k} \in (x_k, x_{k+1})$ sao cho

$$G'(c_{1,k}) = 0.$$

Các điểm này đôi một khác nhau và thỏa mãn

$$c_{1,1} < x_2 < c_{1,2} < x_3 < \dots < c_{1,n} < x_{n+1}.$$

Tiếp tục áp dụng định lý Rolle, tồn tại $c_{2,k} \in (c_{1,k}, c_{1,k+1})$ sao cho

$$G''(c_{2,k}) = 0$$

với mỗi $k = 1, 2, \dots, n-1$. Lặp lại lập luận này, sau n bước ta thu được $c = c_{n,1} \in (c_{n-1,1}, c_{n-1,2})$ sao cho

$$G^{(n)}(c) = 0.$$

Kết hợp với (2), ta được

$$e^{\lambda c} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{n-k} f^{(k)}(c) = 0.$$

Vì $e^{\lambda x} \neq 0$, suy ra

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \lambda^{n-k} f^{(k)}(c) = 0.$$

Bài toán được chứng minh.

Ω

Nhận xét 1.1. Đối với Bài toán 1, quan trọng nhất là làm xuất hiện phần tử λ^{n-k} trong các số hạng dạng $\lambda^{n-k} f^{(k)}(\cdot)$. Việc này rất khó và nút thắt chỉ được tháo gỡ thông qua việc sử dụng hàm mũ $e^{\lambda x}$. Điều này cho thấy tầm quan trọng và sức mạnh đặc biệt của hàm mũ trong giải toán.

Bài toán 2. Giả sử f khả vi trên $(a, +\infty)$ thỏa mãn điều kiện

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + \theta(x)f'(x)) = A,$$

trong đó $\theta(x) > 0$ là hàm khả tích trên $[a, +\infty)$ và $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\theta(x)} = +\infty$. Chứng minh rằng

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A.$$

Phân tích ý tưởng và khai thác giả thiết. Ý tưởng đầu tiên xuất phát từ cấu trúc của biểu thức trong giả thiết. Biểu thức $f(x) + \theta(x)f'(x)$ thuộc dạng cần chuẩn hóa. Bằng cách chia tất cả các hạng tử cho $\theta(x)$, ta thu được biểu thức

$$f'(x) + \frac{1}{\theta(x)} f(x).$$

Biểu thức này gợi ý đến công thức đạo hàm của một tích, vì nó chứa tổ hợp giữa f và đạo hàm của f . Do đó, để tạo ra biểu thức trên, ta xét đạo hàm của tích $h(x)f(x)$:

$$(h(x)f(x))' = h'(x)f(x) + h(x)f'(x) = h(x) \left(\frac{h'(x)}{h(x)} f(x) + f'(x) \right).$$

Vì vậy, để xuất hiện biểu thức đã chuẩn hóa, ta chọn hàm h sao cho

$$\frac{h'(x)}{h(x)} = \frac{1}{\theta(x)}.$$

Theo (1), ta có thể chọn

$$h(x) = e^{\int_a^x \frac{ds}{\theta(s)}}.$$

Hơn nữa, từ giả thiết

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{\theta(x)} = \infty.$$

suy ra

$$h(x) = e^{\int_a^x \frac{ds}{\theta(s)}} \rightarrow \infty \text{ khi } x \rightarrow +\infty.$$

Mặt khác, từ biểu thức cần chứng minh, ta có thể viết

$$f(x) = \frac{h(x)f(x)}{h(x)}.$$

Do $h(x) \rightarrow \infty$ khi $x \rightarrow +\infty$, áp dụng quy tắc L'Hospital cho

$$\frac{h(x)f(x)}{h(x)}$$

sẽ xuất hiện biểu thức có mối liên hệ với yêu cầu của đề bài. Từ đó ta thu được điều cần chứng minh. Sau đây là chứng minh chi tiết của bài toán.

Chứng minh. Vì

$$\int_a^{+\infty} \frac{ds}{\theta(s)} = \infty,$$

nên

$$e^{\int_a^x \frac{ds}{\theta(s)}} \rightarrow \infty \text{ khi } x \rightarrow +\infty.$$

Áp dụng quy tắc L'Hospital và sử dụng tính chất

$$\left(\int_a^x \frac{ds}{\theta(s)} \right)' = \frac{1}{\theta(x)},$$

ta thu được

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\int_a^x \theta(s) ds} f(x)}{e^{\int_a^x \theta(s) ds}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\int_a^x \theta(s) ds} \left(f'(x) + \frac{1}{\theta(x)} f(x) \right)}{\frac{1}{\theta(x)} e^{\int_a^x \theta(s) ds}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \theta(x) f'(x) \right) = A. \end{aligned}$$

Bài toán được chứng minh. Ω

Nhận xét 2.1. Điểm mấu chốt trong việc giải Bài toán 2 là làm sao để liên kết biểu thức chứa đạo hàm và hàm số thành một khối duy nhất nhằm “mở đường” áp dụng quy tắc L'Hospital. Việc nhân thêm hàm mũ để làm “nhân tử tích phân” đóng vai trò quyết định trong việc “gom” chúng thành một hạng tử duy nhất. Bài toán này cho thấy thêm một hướng ứng dụng của hàm mũ trong việc tạo khối liên kết và cũng cho thấy thêm vai trò đặc biệt của hàm mũ trong giải toán.

Bài toán 3. Cho f là hàm liên tục trên $[a, b]$ với $0 < a < b$ và $\int_a^b f(x) dx = 0$. Chứng minh rằng với mọi $\alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1$, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$\int_a^c f(x) dx + c^{-\alpha} f(c) = 0.$$

Phân tích ý tưởng và khai thác giả thiết. Đặt

$$H(t) = \int_a^t f(x) dx.$$

Khi đó bài toán tương đương với việc chứng minh rằng tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho

$$H(c) + c^{-\alpha} H'(c) = 0.$$

Một cách tự nhiên, thay c bởi biến t và xét phương trình

$$H(t) + t^{-\alpha} H'(t) = 0.$$

Nhân hai vế với t^α để chuẩn hóa biểu thức, ta thu được phương trình tương đương

$$t^\alpha H(t) + H'(t) = 0.$$

Nhằm tạo ra biểu thức này, ta xét đạo hàm của tích

$$\left(r(t)H(t) \right)' = r'(t)H(t) + r(t)H'(t) = r(t) \left(\frac{r'(t)}{r(t)} H(t) + H'(t) \right).$$

Vì vậy ta chọn $r(t)$ sao cho

$$\frac{r'(t)}{r(t)} = t^\alpha.$$

Do $\int_a^t s^\alpha ds = \frac{1}{\alpha+1}(t^{\alpha+1} - a^{\alpha+1})$, dựa theo (1), có thể chọn

$$r(t) = e^{\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}}.$$

Xét hàm

$$G(t) = r(t)H(t) = e^{\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}} \int_a^t f(x)dx.$$

Khi đó

$$G'(t) = e^{\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}} (t^\alpha H(t) + H'(t)).$$

Mặt khác, từ giả thiết $\int_a^b f(x)dx = 0$ suy ra $H(a) = H(b) = 0$, nên $G(a) = G(b) = 0$.

Áp dụng định lý Rolle, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $G'(c) = 0$, từ đó suy ra điều cần chứng minh. Từ phân tích trên, ta sẽ đưa ra lời giải chi tiết cho bài toán.

Chứng minh. Xét hàm số

$$G(t) = e^{\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}} \int_a^t f(x)dx.$$

Ta có

$$G'(t) = e^{\frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1}} \left(t^\alpha \int_a^t f(x)dx + f(t) \right).$$

Vì $\int_a^b f(x)dx = 0$ nên $G(a) = G(b) = 0$. Áp dụng định lý Rolle, tồn tại $c \in (a, b)$ sao cho $G'(c) = 0$, tức là

$$e^{\frac{c^{\alpha+1}}{\alpha+1}} \left(c^\alpha \int_a^c f(x)dx + f(c) \right) = 0.$$

Do $e^{\frac{c^{\alpha+1}}{\alpha+1}} \neq 0$ nên

$$c^\alpha \int_a^c f(x)dx + f(c) = 0.$$

Suy ra

$$\int_a^c f(x)dx + c^{-\alpha} f(c) = 0.$$

Bài toán được chứng minh xong.

Ω

Nhận xét 3.1. Sự đan xen phức tạp giữa biến số, hàm số và biểu thức tích phân của nó là thách thức thực sự của bài toán này. Việc nhân thêm hàm mũ đóng vai trò quyết định trong việc “gom” toàn bộ sự phân tán này thành đạo hàm của một tích duy nhất. Bài toán này cho thấy ta có thể sử dụng hàm mũ trong việc xử lý các phương trình vi - tích phân hỗn hợp và cũng cho thấy thêm vai trò đặc biệt của hàm mũ trong giải toán.

Bài toán 4. Cho f là hàm khả vi trên $[a, b]$ và thỏa mãn điều kiện

$$f(a) = f(b) = 0, \quad f(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b).$$

Chứng minh rằng với mọi dãy số thực $\{a_n\}$, tồn tại dãy $\{x_n\} \subset (a, b)$ sao cho

$$\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} = a_n.$$

Phân tích ý tưởng và khai thác giả thiết. Bài toán tương đương với việc chứng minh rằng tồn tại dãy $\{x_n\} \subset (a, b)$ sao cho

$$f'(x_n) - a_n f(x_n) = 0.$$

Một cách tự nhiên, với mỗi n , ta xét hàm số

$$F_n(x) = f'(x) - a_n f(x).$$

Khi đó, bài toán trở thành chứng minh rằng F_n luôn có nghiệm $x_n \in (a, b)$ với mọi n . Bằng cách phân tích như các bài toán trước, ta xét hàm

$$H_n(x) = e^{-a_n x} f(x).$$

Dễ thấy

$$H_n'(x) = e^{-a_n x} (f'(x) - a_n f(x)).$$

Từ giả thiết $f(a) = f(b) = 0$, ta có

$$H_n(a) = H_n(b) = 0.$$

Theo định lý Rolle, và biến đổi ta được điều phải chứng minh. Dưới đây là chứng minh chi tiết cho bài toán trên.

Chứng minh. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta xét hàm

$$H_n(x) = e^{-a_n x} f(x).$$

Do $f(a) = f(b) = 0$ nên

$$H_n(a) = H_n(b) = 0.$$

Áp dụng định lý Rolle, tồn tại $x_n \in (a, b)$ sao cho

$$H_n'(x_n) = 0,$$

hay

$$f'(x_n) - a_n f(x_n) = 0.$$

Đẳng thức cuối cùng suy ra

$$\frac{f'(x_n)}{f(x_n)} = a_n.$$

Bài toán được chứng minh.

Nhận xét 4.1. Bài toán trên là một dạng tổng quát của Bài 3 trong Đề thi Olympic Toán sinh viên toàn quốc năm 2003 (Nguyễn Văn Mậu et al., 2006). Để thu được kết quả của bài toán đó, ta chỉ cần chọn $a_n = 2002(\sqrt[n]{e} - 1)$. Phương pháp giải chúng tôi đưa ra cho bài toán trên cũng trực diện hơn phương pháp được đưa ra trong tài liệu vừa đề cập.

Nhận xét 4.2. Khó khăn lớn nhất trong Bài toán 4 là sự xuất hiện của dãy tham số bất kỳ gắn với hàm số và đạo hàm của nó. Việc nhân thêm hàm mũ chứa tham số trong ứng đóng vai trò quyết định trong việc “hấp thụ” và “gom” chúng lại thành đạo hàm của một tích duy nhất. Bài toán này cho thấy ta có thể sử dụng hàm mũ trong việc triệt tiêu các tham số tự do và một lần nữa cho thấy thêm vai trò đặc biệt của hàm mũ trong giải toán.

5. Kết luận

Trong nghiên cứu này, thông qua một số bài toán cụ thể, chúng tôi đã trình bày một số ứng dụng của hàm mũ trong việc giải các bài toán Olympic sinh viên. Bằng cách phân tích ý tưởng và các giả thiết của bài toán, chúng tôi đề xuất những lời giải phù hợp cho từng bài toán cụ thể. Cách tiếp cận này rất hữu ích đối với những độc giả quan tâm đến việc nghiên cứu và giải các bài toán Olympic sinh viên.

Trong các nghiên cứu tiếp theo, chúng tôi sẽ mở rộng việc khai thác hàm mũ để giải các dạng toán khác nhau. Bên cạnh đó, chúng tôi cũng hướng đến việc phân tích và khai thác những ứng dụng của một số định lý quan trọng trong giải tích cũng như các hàm cơ bản khác trong việc giải các bài toán Olympic sinh viên.

Lời cảm ơn

Bài báo này được hoàn thành dưới sự hướng dẫn của Thầy TS. Nguyễn Minh Điện, tôi xin chân thành cảm ơn Thầy đã hướng dẫn và hỗ trợ tôi hoàn thành nghiên cứu này. Nghiên cứu này được tài trợ bởi Trường Đại học Thủ Dầu Một trong đề tài mã số DTSV.25.2-007.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Ngô Quốc Anh, Vũ Tuấn Anh, Đoàn Trung Cường, Nguyễn Thiện Khải (2022). *Kỷ yếu: Kỳ thi Olympic toán học sinh viên – học sinh lần thứ 28*.
- [2] https://www.vms.org.vn/storage/attachments/2022_OSV_Ky_yeu_1663312871.pdf
- [3] Ngô Quốc Anh, Trần Thị Hoàng Anh, Đào Phương Bắc, Đoàn Trung Cường (2023). *Kỷ yếu: Kỳ thi Olympic toán học sinh viên – học sinh lần thứ 29*.
- [4] https://www.vms.org.vn/storage/attachments/Ky-yeu-OSV-2023_1707093392.pdf
- [5] Ngô Quốc Anh, Đào Phương Bắc, Đoàn Trung Cường, Nguyễn Thị Khuyên (2024). *Kỷ yếu: Kỳ thi Olympic toán học sinh viên – học sinh lần thứ 30*.
- [6] https://www.vms.org.vn/storage/attachments/OTSH2024_Ky_yeu_1741825181.pdf
- [7] Ngô Quốc Anh, Đào Phương Bắc, Đoàn Trung Cường, Nguyễn Thị Khuyên (2025). *Kỷ yếu: Kỳ thi Olympic toán học sinh viên – học sinh lần thứ 31*.
- [8] <https://www.vms.org.vn/post/ky-yeu-cua-ky-thi-olympic-toan-hoc-sinh-sinh-vien-2025>
- [9] Apostol, T. M. (1967). *Calculus, Vol. 1: One-variable calculus with an introduction to linear algebra*. Wiley.
- [10] Boylestad, R. (2010). *Introductory circuit analysis*. Pearson.
- [11] Demidovich, B., Yankovsky, G. (1989). *Problems in Mathematical Analysis*. Mir Publishers, Moscow.
- [12] Larson, L.C. (1983). *Problem Solving Through Problems*. Springer Verlag Berlin-Heidelberg-Tokyo.
- [13] Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang, Hoàng Quốc Toàn (2001). *Giáo trình Giải tích (tập 3)*. Nhà xuất bản Đại học Quốc gia Hà Nội.
- [14] Nguyễn Văn Mậu, Lê Ngọc Lăng, Phạm Thế Long, Nguyễn Minh Tuấn (2006). *Các đề thi Olympic toán sinh viên toàn quốc*. Nhà xuất bản giáo dục.
- [15] Walter, W. (1998). *Ordinary differential equations*. Springer.