http://doi.org/10.37550/tdmu.VJS/2023.01.385

VÀI ĐỊNH LÝ VỀ ĐIỂM YÊN NGỰA CHO ÁNH XẠ ĐA TRỊ VECTƠ

Võ Viết Trí[1]
[1] *Trường Đại học Thủ Dầu Một*
Ngày nhận bài 16/12/2022; Ngày gửi phản biện 10/01/2023; Chấp nhận đăng 5/02/2023
Liên hệ email: trivv@tdmu.edu.vn

https://doi.org/10.37550/tdmu.VJS/2023.01.385

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh sự tồn tại điểm yên ngựa cho ánh xạ đa trị nhận giá trị trong không gian vectơ tổng quát với điều kiện (v, C)-tựa đơn điệu xoay vòng theo hướng. Bài toán được thiết lập trên môi trường không có bất kỳ một cấu trúc tô pô nào và cũng không dùng các giả thiết về tính lồi của ánh xạ đa trị cũng như tính lồi của nón gây nên thứ tự trong không gian ảnh của ánh xạ đa trị.
Từ khóa: *điểm yên ngựa, đơn điệu xoay vòng, ánh xạ đa trị*
Abstract

SOME SADDLE-POINT THEOREMS FOR VECTOR-VALUED MULTIMAPPING

In this paper, we prove the existence of a saddle point for a multivalued mapping that takes values in a general vector space with the condition that (v, C)-cyclic quasi-monotonicity in the direction. The problem is setting in an environment that does not have any topological structure and use assumptions about the convexity of the multivalued mapping and the convexity of the cone that make the order in the range of objective mapping.

1. Giới thiệu

Cho E, F là các tập hợp khác rỗng và hàm $\phi : E \times F \to \mathbb{R}$. Xét bài toán toán tìm điểm $(a, b) \in E \times F$ thỏa

$$\phi(a, y) \leq \phi(a, b) \leq \phi(x, b) \text{ với mọi } (x, y) \in E \times F. \tag{1.1}$$

hay tương đương với

$$\max \phi(a, F) = \phi(a, b) = \min \phi(E, b). \tag{1.2}$$

Tiếp cận theo cách xem quan hệ thứ tự thông thường trong $\mathbb{R}$ là gây nên bởi nón $\mathbb{R}_+$ thì (1.1) tương đương với

$$\phi(a, y) - \phi(a, b) \notin \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \text{ và } \phi(a, b) - \phi(x, b) \notin \mathbb{R}_+ \backslash \{0\} \text{ với mọi } (x, y) \in E \times F. \tag{1.3}$$

Điểm (a, b) thỏa (1.1) gọi là điểm yên ngựa của hàm ϕ. Các bài toán liên quan đến điểm này gọi chung là bài toán điểm yên ngựa.

Bài toán này cùng với các bài toán điểm cân bằng, bài toán tối ưu, bài toán điều khiển,... nắm giữ vai trò quan trọng trong nhiều lĩnh vực của khoa học như là: thiết kế mạch điện, kinh tế, tài chính, lý thuyết trò chơi và đặc biệt là lý thuyết điều khiển, v.v, (chẳng hạn như, [1,3,10–14,16,17]).

Thêm nữa, trong lĩnh vực điều khiển tối ưu, lý thuyết trò chơi thì tập điều khiển thường chọn mang yếu tố rời rạc và nhiều giá trị. Vì thế, chúng ta cũng cần thay thế hàm đơn trị bởi hàm đa trị, một trong các dạng thường gặp của bài toán này là dạng hàm đa trị được phân tích thành tổng của một hàm đơn trị và một bộ phận đa trị.

Bài toán (1.1) đã có rất nhiều nghiên cứu có các kết quả phong phú, chúng đã được phát triển theo các hướng sau đây:

• Thay thế miền ảnh của ϕ từ tập hợp các vô hướng $\mathbb{R}$ với quan hệ thứ tự tuyến tính sang không gian vectơ hữu hạn chiều $\mathbb{R}^n$ với quan hệ thứ tự sinh bởi nón lồi $\mathbb{R}^n_+$. Theo hướng này đã có các công trình [4, 5, 9, 14],...

• Thay đổi các điều kiện đặt lên hàm ϕ như là tính liên tục, nửa liên tục, lồi,... gần đây trong công trình của [9, 13, 14] đã đưa vào điều kiện "tựa đơn điệu xoay vòng" (cyclically anti-quasimonotone).

• Một số tác giả phát triển bài toán theo hướng mở rộng các kết quả đã có với ánh xạ mục tiêu ϕ là đơn trị sang ϕ là đa trị (chẳng hạn như [8, 18] và các tài liệu tham khảo trong đó).

Bài toán điểm yên ngựa với ánh xạ đa trị đã được xem xét bởi nhiều tác giả chẳng hạn như Chang-Yuan với công trình [2], Zang-Li với [18],... Trong các công trình này, điểm yên ngựa được định nghĩa dựa trên quan hệ thứ tự trong không gian ảnh của Φ gây nên bởi nón lồi với phần trong khác rỗng. Ta có thể mô tả lại khái niệm này như sau: Cho C là một nón lồi của không gian vectơ tô pô V với $\text{int}C \neq \emptyset$, và ánh xạ đa trị $\Phi : E \times F \rightrightarrows V$. Điểm (a, b) gọi là điểm yên ngựa của Φ nếu

$$\text{Max}\Phi(\overline{x}, F) \cap \Phi(\overline{x}, \overline{y}) \cap \text{Min}\Phi(E, \overline{y}) \neq \emptyset, \tag{1.4}$$

ở đây $\text{Min}A = \{x \in A : t - x \notin -\text{int}C \;\; \forall t \in A\}$ và $\text{Max}A = \{x \in A : t - x \notin \text{int}C \;\; \forall t \in A\}$ với $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ (xem [2, 15]).

Nhìn chung, các kết quả theo những hướng nói trên hầu hết là được xem xét bài toán trong môi trường có cấu trúc tô pô, khái niệm điểm yên ngựa được định nghĩa dựa trên thứ tự sinh bởi nón lồi, kết qủa có được dựa trên các giả thiết lồi cho hàm ϕ và sử dụng các công cụ như là các định lý về điểm bất động, định lý kiểu KKM thông qua các kỹ thuật vô hướng.

Gần đây, trong công trình [7] chúng tôi đã mở rộng bài toán này cho trường hợp "thứ tự" được dùng là gây nên bởi tập con có phần lỏi khác rỗng và chúng tôi xem xét bài toán trong môi trường không có bất kỳ một cấu trúc tô pô nào và các kết qủa không dựa vào các giả thiết lồi của ϕ.

Theo sự hiểu biết của chúng tôi, bài toán điểm yên ngựa của hàm đa trị với giá trị vectơ chưa được xem xét trong môi trường không có cấu trúc tô pô.

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ mở rộng một số kết quả trong [7] sang trường hợp ϕ là hàm đa trị. Đặc biệt khi mà ϕ là đơn trị chúng tôi nhận lại kết quả trong [7]. Để có được kết quả này chúng tôi sử dụng khái niệm tựa đơn điệu xoay vòng (cyclically quasimonotone) theo hướng của hàm ϕ đã định nghĩa trong [7], cải tiến cho toán tử đa trị.

Cấu trúc bài báo này như sau, mục tiếp theo chúng tôi chuẩn bị một số khái niệm, ký hiệu và các kết quả được phép sử dụng để trình bày kết quả chính trong Mục 3, cuối cùng là kết luận.

2. Chuẩn bị

Trong suốt bài báo này chúng tôi sử dụng V là không gian vectơ , E, F là các tập hợp khác rỗng. Ký hiệu $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, $\dot{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$. Khi K là tập con của V, ta ký hiệu $K^c = V \backslash K$ và $\dot{K} = K \backslash \{0\}$, ở đây 0 là phần tử không của V. Tập tất cả (tương ứng., hữu hạn khác rỗng) tập con khác rỗng của tập X được ký hiệu bởi $\mathscr{P}(X)$ (t.ứ, $\mathscr{F}(X)$). Cho $C \in \mathscr{P}(V)$ và $q \in V$. Nón gây nên bởi C, phần trong đại số của C, bao đóng vectơ của C và bao đóng vectơ theo hướng q của C chúng tôi sử dụng lại các ký hiệu trình bày trong [7] và lần lượt nhắc lại tương ứng như sau:

$$\begin{aligned} \mathrm{cone}C &:= \bigcup_{\lambda > 0} \lambda C, \\ \mathrm{core}C &:= \{x \in V : \forall v \in V, \exists \lambda > 0 \text{ sao cho } x + [0, \lambda]v \subset C\}. \end{aligned}$$

C được gọi là nón (t.ứ, lõi đại số, mở đại số) nếu $\mathrm{cone}C = C$ (t.ứ, $\mathrm{core}C \neq \emptyset$, $\mathrm{core}C = C$).

Chúng ta dễ thấy rằng $\mathrm{core}C \subset C$. Nếu V là không gian vectơ tô pô, ta ký hiệu $\mathrm{int}C$ là phần trong theo tô pô của C. Ta cũng thấy ngay $\mathrm{int}C \subset \mathrm{core}C \subset C$, và $\mathrm{int}C = C$ nếu C là lồi với $\mathrm{int}C \neq \emptyset$. Vì vậy, nếu C là đóng (t.ứ, mở), cũng là đóng theo vectơ (t.ứ, mở theo đại số).

Để nhận được khái niệm điểm yên ngựa của ánh xạ đa trị chúng tôi tham khảo [2, 18] và mở rộng khái niệm t.ứ trong định nghĩa sau

Định nghĩa 2.1. Cho K là tập con của V với $0 \notin \mathrm{core}K \neq \emptyset$ và Ω là tập con của V. Phần tử $\alpha \in \Omega$ được gọi là

(i) điểm K-*cực tiểu* (t.ứ, K-*cực địa*) Ω nếu

$$(\alpha - K) \cap \Omega = \{\alpha\} \;\; (\text{ t.ứ, } (\alpha + K) \cap \Omega = \{\alpha\}); \tag{2.5}$$

(ii) điểm K-*cực tiểu yếu* (t.ứ, K-*cực đại yếu*) của Ω nếu K trong (2.5) được thay thế bởi $\mathrm{core}K$.

Cho $\phi : X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị và G là tập con khác rỗng của X, ký hiệu $\phi(G) = \bigcup_{x \in G} \phi(x)$. Ta ký hiệu tập tất cả các điểm K-cực tiểu (t.ứ, K-cực tiểu yếu, K-cực đại, K-cực đại yếu) của Ω là $\mathrm{Min_K}\Omega$ (resp., $\mathrm{Min}_{w,K}\Omega$, $\mathrm{Max}_K\Omega$, $\mathrm{Max}_{w,K}\Omega$).

Định nghĩa 2.2. Cho $\Phi : E \times F \rightrightarrows V$ là ánh xạ đa trị và $K \subset V$ với $0 \notin \mathrm{core}K \neq \emptyset$. Phần tử $(a, b) \in E \times F$ iđược gọi là điểm K-*yên ngựa* (t.ứ, K-*yên ngựa yếu*) của Φ nếu tồn tại $\xi \in \Phi(a, b)$ thỏa $\xi \in \mathrm{Min}_K\Phi(E, b)$ (t.ứ, $\mathrm{Min}_{w,K}\Phi(E, b)$) và $\xi \in \mathrm{Max}_K\Phi(a, F)$ (t.ứ, $\mathrm{Max}_{w,K}\Phi(a, F)$).

Một trường hợp riêng, nếu $V = \mathbb{R}$ và K là nón lồi đóng của $\mathbb{R}$ với $\mathrm{int}K \neq \emptyset$, ta nhận lại khái niệm điểm yên ngựa mà đã được trình bày trong [2, 7].

Ta dễ dàng có được các cách nhìn khác về điểm yên ngựa của hàm đa trị được trình bày trong bổ đề sau:

Bổ đề 2.3. *Các phát biểu dưới đây là tương đương*

(i) $(a, b) \in E \times F$ *là điểm* K*-yên ngựa (t.ứ,* K*-yên ngựa yếu) của* Φ*.*

(ii) Tồn tại $\xi \in \Phi(a,b)$ *thỏa*

$$(\xi - \Phi(E,b)) \cap \dot{K} = \emptyset \ \ (\textit{t.ứ}, \ \ (\xi - \Phi(E,b)) \cap \mathrm{core}K = \emptyset)$$

và

$$(\Phi(a,F) - \xi) \cap \dot{K} = \emptyset \ \ (\textit{t.ứ}, \ \ (\Phi(a,F) - \xi) \cap \mathrm{core}K = \emptyset).$$

(iii) tồn tại $\xi \in \Phi(a,b)$ *sao cho không có phần tử* $x \in E$ *thỏa*

$$(\xi - \Phi(x,b)) \cap \dot{K} \neq \emptyset \ \ (\textit{t.ứ}, \ \ (\xi - \Phi(x,b)) \cap \mathrm{core}K \neq \emptyset)$$

và cũng không có $y \in F$ *thỏa*

$$(\Phi(a,y) - \xi) \cap \dot{K} \neq \emptyset \ \ (\textit{t.ứ}, \ \ (\Phi(a,y) - \xi) \cap \mathrm{core}K \neq \emptyset).$$

Trong suốt bài báo này ta luôn ký hiệu tập tất cả các điểm K-yên ngựa (K-yên ngựa yếu, t.ứ) của Φ là $S(\Phi, K)$ (t.ứ, $WS(\Phi, K)$).

Cho X là tập hợp khác rỗng và $n \in \dot{\mathbb{N}}$, ta ký hiệu

$$\mathscr{C}_n(X) = \{(x_1, ..., x_{n+1}) \in X^{n+1} : x_{n+1} = x_1\}.$$

Một phần tử của $\mathscr{C}_n(X)$ được gọi là n-vòng. Định nghĩa sau đây chúng tôi viết lại từ [7].

Định nghĩa 2.4. ([7, Defintion 2.]) Cho ánh xạ đơn trị $f : X \times X \to V$, $v \in V$ và $C \subset V$. f được gọi là *tựa đơn điệu vòng quanh theo hướng* v *tương ứng với* C (n.gọn, (v, C)-c.q.m) nếu bất kỳ $m \in \dot{\mathbb{N}}$ và $(x_1, ..., x_{m+1}) \in \mathscr{C}_m(X)$, tồn tại $i \in \{1, ..., m\}$ để cho $f(x_i, x_{i+1}) \in v + C$.

Với C là tập con khác rỗng của V và $v \in V$, ta định nghĩa hàm $\gamma_{v,C} : \mathscr{P}(V) \to \mathbb{R}$, xác định bởi

$$\gamma_{v,C}(\Omega) = \begin{cases} 1, & \Omega \subset v + C; \\ -1, & \Omega \not\subset v + C; \end{cases}$$

Dự vào Định nghĩa 2.4 ta định nghĩa khái niệm xoay vòng cho ánh xạ đa trị như sau:

Định nghĩa 2.5. Cho $C \in \mathscr{P}(V)$ và $v \in V$. Ánh xạ đa trị $\Phi : X \times X \rightrightarrows V$ gọi là *tựa đơn điệu xoay vòng theo hướng* v *tương ứng với* C (n.gọn, (v, C)-c.q.m) nếu hàm $\gamma_{v,C} \circ \Phi : X \times X \to \mathbb{R}$ là $(0, \mathbb{R}_+)$-c.q.c.

Ta ký hiệu tập tất cả các ánh xạ đơn/đa trị (v, C)-c.q.m từ $E \times E$ vào V bởi $\mathscr{C}_{(v,C)}(E, V)$.
Cơ sở của các kết quả chính trong bài báo này dựa trên Bổ đề 2.6 dưới đây. Cho $\varphi : E \times E \rightrightarrows V$, $K \subset E$, $C \in \mathscr{P}(V)$ và $v \in V$. Với $(x, y) \in E \times E$ ta ký hiệu

$$_vG^{\varphi}_C(x, K) = \{a \in K : \gamma_{v,C} \circ \varphi(x, a) = 1\} \text{ và } {_vH^{\varphi}_C}(K, y) = \{a \in K : \gamma \circ \varphi(a, y) = 1\}.$$

Bổ đề 2.6. *Nếu* $\varphi : E \times E \rightrightarrows V$ *là* (v, C)*-c.q.m, thì các tập* $\bigcap\limits_{x \in A} {_vG^{\varphi}_C}(x, E)$ *và* $\bigcap\limits_{y \in A} {_vH^{\varphi}_C}(E, y)$ *là khác rỗng với mọi* $A \in \mathscr{F}(E)$.

Chứng minh. Ta sẽ chứng minh Bổ đề này bằng phương pháp phản chứng. Giả sử trái lại rằng, tồn tại $A \in \mathscr{F}(E)$ để cho
$$\bigcap_{x \in A} {}_vG_C^{\varphi}(x, E) = \emptyset.$$
Điều này dẫn đến rằng
$$(\forall a \in E, \exists x \in A, \gamma_{v,C} \circ \varphi(x, a) \neq 1). \tag{2.6}$$
Sử dụng giả thiết (v, C)-c.q.m của φ cho 1-vòng tạo nên bởi một phần tử $x \in E$, nghĩa là, $(x, x) \in \mathscr{C}_1(E)$, ta có
$$\gamma_{v,C} \circ \varphi(x, x) = 1 \text{ với mọi } x \in E. \tag{2.7}$$
Ta giả sử rằng tập A có m phần tử. Trước tiên, ta lấy một phần tử bất kỳ của A, và ký hiệu nó là x_m. Sử dụng khẳng định (2.6) cho phần tử $a := x_m$ kết hợp với (2.7), tồn tại $x_{m-1} \in A \backslash \{x_m\}$ thỏa
$$\gamma_{v,C} \circ \varphi(x_{m-1}, x_m) \neq 1. \tag{2.8}$$
Sử dụng giả thiết (v, C)-c.q.m của φ cho $(x_{m-1}, x_m, x_{m-1}) \in \mathscr{C}_2(E)$ với chú ý (2.8) ta nhận được
$$\gamma_{v,C} \circ \varphi(x_m, x_{m-1}) = 1. \tag{2.9}$$
Sử dụng (2.6) cho $a := x_{m-1}$ cùng với (2.7) và (2.9), tồn tại $x_{m-2} \in A \backslash \{x_{m-1}, x_m\}$ để cho
$$\gamma_{v,C} \circ \varphi(x_{m-2}, x_{m-1}) \neq 1. \tag{2.10}$$
Lại sử dụng giả thiết cho $(x_{m-2}, x_{m-1}, x_{m-2}) \in \mathscr{C}_2(E)$, và chú ý rằng
$$(x_{m-2}, x_m, x_{m-2}) \in \mathscr{C}_2(E),$$
ta có
$$\gamma_{v,C} \circ \varphi(x_{m-1}, x_{m-2}) = 1 \text{ và } \gamma_{v,C} \circ \varphi(x_m, x_{m-2}) = 1.$$
Tiếp tục quá trình này, ta có được tập $A = \{x_1, x_2, ..., x_m\}, x_{m+1} := x_1$, khi đó, $(x_1, ..., x_{m+1}) \in \mathscr{C}_m(E)$ và $\gamma_{v,C} \circ \varphi(x_i, x_j) = 1$ với mọi $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$ thỏa $i \geq j$. Đặc biệt, $\varphi(x_i, x_1) = 1$ với mọi $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Điều này mâu thuẫn với (2.6) khi mà chọn $a := x_1$.

Để chứng minh $\bigcap_{y \in A} {}_vH_C^{\varphi}(E, y) \neq \emptyset$, chúng ta giả sử trái lại rằng
$$(\forall a \in E, \exists x \in A, \gamma_{v,C} \circ \varphi(a, x) \neq 1). \tag{2.11}$$
Bắt đầu từ phần tử x_1 của A, ta lập luận tương tự như trên, cũng thiết lập được $A = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ thỏa $\gamma_{v,C} \circ \varphi(x_m, x_i) = 1$ với mọi $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Điều này mâu thuẫn với (2.11) khi chọn $a := x_m$. □

3. Kết quả chính

Để thuận lợi cho việc trình bày các kết quả chính, chúng tôi trình bày một số khái niệm và ký hiệu liên quan.

Ta ký hiệu

$$\begin{aligned}\mathscr{K}(V) &= \{K \in \mathscr{P}(V) : K \text{ nón có lỏi }, K \neq V\}, \\ \mathscr{K}_c(V) &= \left\{K \in \mathscr{K}(V) : K \text{ lồi}\right\}, \\ \mathscr{D}(V) &= \{K \in \mathscr{P}(V) : K \text{ có lỏi }, K \neq V, K + K \subset K\}\end{aligned}$$

Cho $\mathscr{R}$ là tập con khác rỗng của tập tích Đề-Các $X \times X$ ($\mathscr{R}$ còn gọi là quan hệ hai ngôi trên X). Ta viết $x\mathscr{R}y$ nếu và chỉ nếu $(x, y) \in \mathscr{R}$ và nói rằng X là *$\mathscr{R}$-chận trên* (t.ứ,*-chận dưới*) *hữu hạn* nếu tồn tại một tập con A gồm hữu hạn của X sao cho với mỗi $x \in X$, $x\mathscr{R}y$ (t.ứ, $y\mathscr{R}x$) với $y \in A$ nào đó. Khi đó, A gọi là $\mathscr{R}$-chận trên (resp., -chận dưới) của X.

Định nghĩa 3.1. Cho E là tập khác rỗng, $\mathscr{R}$ là một quan hệ hai ngôi trong E, $v \in V$ và ánh xạ đa trị $\Phi : E \times E \rightrightarrows V$, $D \in \mathscr{P}(V)$. Ánh xạ đa trị Φ được gọi là $(D, \mathscr{R})$*-tăng* (t.ứ, -giảm) nếu với mỗi $(x, y, z) \in E \times E \times E$ thỏa $y\mathscr{R}z$, ta có mệnh đề sau đúng

$$\gamma_{v,D} \circ \Phi(x, y) = 1 \Rightarrow \gamma_{v,D} \circ \Phi(x, z) = 1 \ \ (\text{t.ứ, } \gamma_{v,D} \circ \Phi(x, z) = 1 \Rightarrow \gamma_{v,D} \circ \Phi(x, y) = 1).$$

Với ánh xạ đa trị $\Phi : E \rightrightarrows V$, $G \subset V$, $v \in V$. Ta ký hiệu

$$\begin{aligned}[\Phi, G, v]^- &= \{x \in E : \Phi(x) - v \subset -G\}, \\ [\Phi, G, v]^+ &= \{x \in E : \Phi(x) - v \subset G\}.\end{aligned}$$

Định nghĩa 3.2. Cho E là không gian tô pô, $\emptyset \neq G \subset V$ và ánh xạ đa trị $\Phi : E \rightrightarrows V$.

(a) Với $q \in \dot{V}$, Φ được gọi là (q, G)*-nửa liên tục dưới* (n.gọn, l.s.c) (t.ứ, (q, G)*-nửa liên tục trên* (n.gọn, u.s.c)) nếu với bất kỳ $r \in \mathbb{R}$, tập $[\Phi, G, rq]^-$ (t.ứ, $[\Phi, G, rq]^+$) là đóng.

(b) Φ được gọi là G*-nửa liên tục dưới* (t.ứ, G*-nửa liên tục trên*) nếu tập $[\Phi, G, v]^-$ (t.ứ, $[\Phi, G, v]^+$) là đóng với mọi $v \in V$.

Với mỗi ánh xạ đa trị $\Phi : E \times F \rightrightarrows V$ và $K \subset V$ thiết lập ánh xạ g_Φ đa trị liên kết với nó định nghĩa như sau: $g_\Phi : (E \times F) \times (E \times F) \rightrightarrows V$ xác định bởi

$$g_\Phi((x, y), (x', y')) = \Phi(x, y') - \Phi(x', y), \tag{3.12}$$

ở đây $a = (x, y), b = (x', y') \in E \times F$. Từ (3.12) ta thấy $g_\Phi(a, b) = -g_\Phi(b, a)$. Cho $D \subset V$, và $(a_1, a_2, ..., a_{m+1}) \in \mathscr{R}_m\left((E \times F)^m\right)$. Đặt $b_j = a_{m-j+1}, j = 1, ..., m$, $b_0 := b_m; b_{m+1} := b_1$, khi đó, nếu $g_\Phi(a_j, a_{j+1}) \in_1 D$, thì $g_\Phi(b_{m-j}, b_{m-j+1}) \in_1 -D$. Vì vậy, nếu g_Φ là $(0, D)$-c.q.m, thì nó cũng là $(0, -D)$-c.q.m và $0 \in D$. Ta ký hiệu $X = E \times F$ trong suốt mục này.

Định lý 3.3. *Cho $D \subset V$, và $\Phi : X \rightrightarrows V$. Giả sử g_Φ được định nghĩa bởi (3.12), là $(0, D^c)$-c.q.m và thêm nữa*

(i) khi mà họ $\left\{\left(\mathcal{L}_\Phi^D(b)\right)^c : b \in X\right\}$ phủ X, thì nó phải có chứa phủ con hữu hạn, ở đây $\mathcal{L}_\Phi^D(b) := \{a \in X : g_\Phi(a, b) \subset D^c\}$, và $\left(\mathcal{L}_\Phi^D(b)\right)^c = X \backslash \mathcal{L}_\Phi^D(b)$. Đặc biệt, một trong các điều kiện sau được thỏa

(ii) E, F là các không gian gian tô pô và tập $\mathcal{L}_\Phi^D(b)$ là tập đóng với mọi $b \in X$;

(iii) tồn tại quan hệ hai ngôi $\mathscr{R}$ trong X sao cho X là $\mathscr{R}$-chặn trên (t.ứ, -chặn dưới) hữu hạn và g_Φ là $(D^c, \mathscr{R})$-giảm (t.ứ, -tăng).

Khi đó, $S(\Phi, C) \neq \emptyset$ (t.ứ, $S(\Phi, C) \neq \emptyset$) nếu $\dot{C} \subset D$ (t.ứ, $\operatorname{core}C \subset D$).

Chứng minh. Kế hoạch chứng minh Định lý này như sau: Trước tiên, ta chứng minh kết luận của Định lý với giả thiết trong phần đầu của (i), sau đó chứng tỏ một trong các điều kiện (ii) hoặc (iii) dẫn đến điều kiện được nêu trong (i).

Ta nhận xét rằng

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\Phi^D(b) &= \{a \in X : g_\Phi(a, b) \subset D^c\} \\ &= \{a \in X : \gamma_{0,D^c} \circ g_\Phi(a, b) = 1\} \\ &=_0 H_C^{g_\Phi}(D^c, b)\end{aligned} \tag{3.13}$$

Giả sử $\bigcap\limits_{b\in X} \mathcal{L}_\Phi^D(b) = \emptyset$. Khi đó họ $\mathscr{C} := \left\{ \left(\mathcal{L}_\Phi^D(b)\right)^c : b \in X \right\}$ phủ X, bởi giả thiết (i), họ này chứa phủ con hữu hạn. Ta tìm được tập $A \subset X$ có hữu hạn phần tử và theo Bổ đề 2.6 ta nhận được $\bigcap\limits_{b\in A} \mathcal{L}_\Phi^D(b) = \emptyset$. Điều này là không thể, do đó $\bigcap\limits_{b\in X} \mathcal{L}_\Phi^D(b) \neq \emptyset$. Nghĩa là, tồn tại $\overline{a} = (\overline{x}, \overline{y}) \in X$ thỏa $g_\Phi(\overline{a}, b) \subset D^c$ với mọi $b \in X$, dẫn đến,

$$g_\Phi(\overline{a}, b) \cap D = \emptyset \text{ với mọi } b \in X. \tag{3.14}$$

Lần lượt chọn $b = (x, \overline{y})$, $b = (\overline{x}, y)$ trong (3.14) và chú ý rằng $\dot{C} \subset D$ (t.ứ, $\operatorname{core}C \subset D$), ta nhận được

$$(\Phi(\overline{x}, \overline{y}) - \Phi(x, \overline{y})) \cap \dot{C} = \emptyset \text{ (t.ứ, } \cap \operatorname{core}C = \emptyset) \text{ với mọi } x \in E$$

và

$$(\Phi(\overline{x}, y) - \Phi(\overline{x}, \overline{y})) \cap \dot{C} = \emptyset \text{ (t.ứ, } \cap \operatorname{core}C = \emptyset) \text{ với mọi } y \in F.$$

Điều này cho ta $(\overline{x}, \overline{y})$ là điểm C-yên ngựa (t.ứ, C-yên ngựa yếu) của Φ.

Tiếp theo, ta thấy ngay rằng từ điều kiện (ii) bởi tính compact của $X = E \times F$ dẫn đến điều kiện (i). Bây giờ, giả sử có giả thiết (iii) và giả sử họ

$$\mathscr{C} = \left\{ V_b := \left(\mathcal{L}_\Phi^D(y)\right)^c \mid b \in X \right\}.$$

phủ X và A là một $\mathscr{R}$-chặn trên (t.ứ, -chặn dưới) hữu hạn của X. Khi đó với bất kỳ $\alpha \in X$, ta có $\alpha \in V_a$ với $a \in X$ nào đó. Bởi định nghĩa của tập A, tồn tại $\beta \in A$ với $a\mathscr{R}\beta$ (t.ứ, $\beta\mathscr{R}a$). Ta sẽ chứng tỏ $V_a \subset V_\beta$. Thật vậy, với mỗi $z \in V_a$, nếu $z \notin V_\beta$, thì $\gamma_{0,D^c} \circ \Phi(z, \beta) = 1$. Bởi giả thiết (iii) ta nhận được $\gamma_{0,D^c} \circ \Phi(z, a) = 1$. Điều này là mâu thuẫn $z \in V_a$. Vì vậy, $\alpha \in V_a \subset V_\beta$ với $\beta \in A$ nào đó. Điều này đưa đến $\mathscr{C}$ có phủ con hữu hạn. Hoàn thành chứng minh. □

Định lý 3.4. *Cho $\Phi : X \rightrightarrows V$ và $D \subset V$. Giả sử rằng g_Φ, xác định bởi (3.12), là $(0, D)$-c.q.m và*

(i) nếu mà họ $\left\{ \left(\hat{\mathcal{L}}_\Phi^D(b)\right)^c : b \in X \right\}$ phủ X, thì nó chứa phủ con hữu hạn, ở đây $\hat{\mathcal{L}}_\Phi^D(b) := \{a \in X : g_\Phi(a, b) \in_1 -D\}$, $\left(\hat{\mathcal{L}}_\Phi^D(b)\right)^c = X \backslash \hat{\mathcal{L}}_\Phi^D(b)$. Trường hợp riêng là, một trong các điều kiện sau được thỏa

(ii) *E, F là các không gian tô pô và tập $\hat{\mathcal{L}}_{\Phi}^{D}(b)$ là đóng với mọi $b \in X$;*

(iii) *tồn tại quan hệ hai ngôi $\mathscr{R}$ trong X sao cho X là $\mathscr{R}$-chặn trên (t.ứ, -chặn dưới) hữu hạn và g_{Φ} là $(-D, \mathscr{R})$-giảm (t.ứ, -tăng).*

Khi đó, Φ có điểm C-yên ngựa (t.ứ, C-yên ngựa yếu) nếu $\dot{C} \cap -D = \emptyset$ (t.ứ, $\mathrm{core}C \cap -D = \emptyset$).

Chứng minh. Ta không khó khăn lắm để kiểm tra các điều kiện của Định lý 3.3 (t.ứ, Định lý 3.4) đúng cho Φ, g_{Φ}, C và D nếu và chỉ nếu các điều kiện của Định lý 3.4 (t.ứ, Định lý 3.3) đúng cho Φ, g_{Φ}, C và $-D^c$. Vì vậy, các Định lý này là tương đương. □

Thật là không dể dàng kiểm tra các điều kiện (i),(ii) của các định lý ở trên. Tuy nhiên, trong trường hợp: ánh xạ đa trị được phân tích thành tổng của hàm đơn trị và một hàm đa trị, chúng tôi đề nghị các điều kiện đủ cho các giả thiết của Theorem 3.3.

Mệnh đề 3.5. *Cho các không gian tô pô E, F, $D \in \mathscr{K}_c(V)$, $\mathcal{A} : E \times F \rightrightarrows V$ và $f : E \times F \to V$ là ánh xạ đơn trị. Giả sử với mỗi $b = (x_1, y_1) \in E \times F$ các điều kiện sau đây được nắm giữ*

(i) *ánh xạ $f(., y_1)$ là D-u.s.c và*

(ii) *ánh xạ $f(x_1, .)$ là D-l.s.c.*

Khi đó $\{a \in X : g_{\phi}(a, b) \subset D^c\}$ là tập đóng, ở đây $\Phi = f + \mathcal{A}$.

Chứng minh. Ta có

$$g_{\Phi}(a, b) = \Phi(x, y_1) - \Phi(x_1, y) = g_f(a, b) + g_{\mathcal{A}}(a, b) \tag{3.15}$$

với mọi $a = (x, y) \in E \times F$. Ta lấy lưới bất kỳ $\{(x_\mu, y_\mu)\} \subset \{a \in X : g_{\phi}(a, b) \subset D^c\}$ với $(x_\mu, y_\mu) \to (\overline{x}, \overline{y})$. Nếu $(\overline{x}, \overline{y}) \notin g_{\Phi}(b)$, tồn tại $w \in \Phi(\overline{x}, y_1) - \Phi(x_1, \overline{y})$ với $w \in D$. Vì (3.15), tồn tại $e \in g_{\mathcal{A}}(a, b)$ để cho $w = f(\overline{x}, y_1) - f(x_1, \overline{y}) + e \in D$. Đặt $v = \frac{1}{2}w \in D$, khi đó $w - v \in D$, nghĩa là,

$$f(\overline{x}, y_1) - f(x_1, \overline{y}) + e - v \in D. \tag{3.16}$$

Điều này suy ra rằng

$$\overline{x} \in \mathscr{U}(b, \overline{y}) := \{x \in E : f(x, y_1) - (f(x_1, \overline{y}) - e + v) \in D\} \tag{3.17}$$

và

$$\overline{y} \in \mathscr{V}(b, \overline{x}) := \{y \in F : -f(x_1, y) + (f(\overline{x}, y_1) + e - v) \in D\}. \tag{3.18}$$

Vì $f(., y_1)$ là D-u.s.c và $f(x_1, .)$ là D-l.s.c, $\mathscr{U}(b, \overline{y})$ và $\mathscr{V}(b, \overline{x})$ là lân cận của $\overline{x}$ và $\overline{y}$, t.ứ. Vì vậy, tồn tại μ thỏa $(x_\mu, y_\mu) \in \mathscr{U}(b, \overline{y}) \times \mathscr{V}(b, \overline{x})$, nghĩa là,

$$f(x_\mu, y_1) - f(x_1, \overline{y}) + e - v \in D \text{ và } -f(x_1, y_\mu) + f(\overline{x}, y_1) + e - v \in D.$$

Do $f(\overline{x}, y_1) - f(x_1, \overline{y}) + e = 2v$, chúng ta biết được $f(x_\mu, y_1) - f(x_1, y_\mu) + e \in D$. Vì vậy, $(\Phi(x_\mu, y_1) - \Phi(x_1, y_\mu)) \cap D \neq \emptyset$. Điều này mâu thuẫn, nên $(\overline{x}, \overline{y}) \in \{a \in X : g_{\phi}(a, b) \subset D^c\}$. Ta kết luận $\{a \in X : g_{\phi}(a, b) \subset D^c\}$ là đóng trong X. □

Cho Φ là ánh xạ đơn/đa trị từ $E \times F$ vào V, g_Φ được xác định bởi (3.12) và $D \in \mathscr{P}(V)$. Ta viết $\Phi \in \mathscr{T}_c(D)$ khi và chỉ khi

$$g_\Phi(a,b) \subset \{w \in V : D^c + w \subset D^c\} \quad \text{với } (a,b) \in X \times X.$$

Mệnh đề 3.6. *Cho $f : E \times F \to V$ và $0 \notin D \in \mathscr{P}(V)$, $\Phi : E \times F \rightrightarrows V$ định nghĩa bởi $\Phi = f + \mathcal{A}$ với $\mathcal{A} : E \times F \rightrightarrows V$. Giả sử g_f, xác định bởi (3.12), thỏa*

$$g_f(a,b) = \Psi(a,b)\,(h(a) - h(b)) \text{ với mọi } a \in E \times F, b \in E \times F, \tag{3.19}$$

ở đây $h : E \times F \to V$ và $\Psi : E \times F \to \mathbb{R}_+$. Khi đó, g_Φ là $(0, D^c)$-c.q.m nếu $D \in \mathscr{D}(V)$ (t.ứ, $D \in \mathscr{K}_c(V)$, chú ý rằng $\mathscr{K}_c(V) \subset \mathscr{D}(V)$) và $\mathcal{A} \in \mathscr{T}_c(D)$.

Chứng minh. Trước tiên, với biểu diễn

$$0 = h(a_1) - h(a_2) + \ldots + h(a_m) - h(a_1) \notin D \ \forall m\text{-vòng tùy ý } (a_1, \ldots, a_{m+1}) \in \mathscr{C}_m(X)$$

ta có $\phi \in \mathscr{C}_{(0,D^c)}$ ở đó, $\phi(a,b) = h(a) - h(b)$. Vì vậy, với bất kỳ $(a_1, \ldots, a_{m+1}) \in \mathscr{C}_m(X)$, tồn tại $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ sao cho $h(a_i) - h(a_{i+1}) \in D^c$. Hơn nữa, nếu $0 \notin D \in \mathscr{K}_c(V)$ và $\Psi(a_i, a_{i+1}) \in \mathbb{R}_+$, do $\mathcal{A} \in \mathscr{T}_c(D)$, nên dẫn đến $g_\Phi(a_i, a_{i+1}) = g_f(a_i, a_{i+1}) + g_{\mathcal{A}}(a_i, a_{i+1}) \subset D^c$. Vậy, $g_\Phi \in \mathscr{C}_{(0,D^c)}(X, V)$. □

Ví dụ 3.7. Cho E, F là các không gian tô pô compact, $C, D \in \mathscr{P}(V)$, $\mathcal{A} : E \times F \rightrightarrows V$ và $f : E \times F \to V$. Giả sử rằng $\mathcal{A} \in \mathscr{T}_c(D)$. Ta xem xét sự tồn tại điểm yên ngựa của hàm $\Phi = f + \mathcal{A}$. Cụ thể: với $V = \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (\xi(x), \gamma(y))$, ở đây $\xi : E \to \mathbb{R}$ là l.s.c và $\gamma : F \to \mathbb{R}$ là u.s.c. Với $C = \mathbb{R}^2_+$, $D = \{d = (d_1, d_2) \in \mathbb{R}^2 : d_1 + d_2 > 0\}$ và $\mathcal{A}(a,b) = G \subset \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 + \mu_2 = 0\}$ (G là tập nào đó) với mọi $(a,b) \in (E \times F) \times (E \times F)$ (như thế có $(G - G) + D^c \subset D^c$).

Rõ ràng là $D \in \mathscr{D}(V), 0 \in D^c$, $D^c + g_{\mathcal{A}}(a,b) \subset D^c$ và $\dot{C} = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \subset D$. Với $a = (x,y); b = (x_1, y_1)$ ta có

$$\begin{aligned} g_f(a,b) &= (\xi(x), \gamma(y_1)) - (\xi(x_1), \gamma(y)) \\ &= (\xi(x), -\gamma(y)) - (\xi(x_1), -\gamma(y_1)) \end{aligned}$$

điều này là có dạng (3.19) với $h(x,y) = (\xi(x), -\gamma(y))$ và $\Psi(a,b) = 1$. Thêm nữa,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^D_\Phi(b) &= \{a \in E \times F : g_\Phi(a,b) + g_{\mathcal{A}}(a,b) \subset D^c\} \\ &= \{(x,y) \in E \times F : (\xi(x) - \xi(x_1), -\gamma(y) + \gamma(y_1)) + (G - G) \subset D^c\}. \end{aligned}$$

Chú ý rằng, nếu $c = (c_1, c_2) \in G - G$ thì $c_1 + c_2 = 0$. Vì vậy, $a = (x,y) \in \mathcal{L}^D_\Phi(b)$ nếu và chỉ nếu $\xi(x) - \xi(x_1) - \gamma(y) + \gamma(y_1) \leq 0$, nghĩa là, $\mathcal{L}^D_\Phi(b) = \{a = (x,y) : \xi(x) - \gamma(y) \leq \xi(x_1) - \gamma(y_1)\}$. Do ξ là l.s.c và γ là u.s.c, ta thấy $\mathcal{L}^D_\Phi(b)$ là đóng với mọi $b \in E \times F$. Bởi Mệnh đề 3.6 và Định lý 3.3, ta nhận được $S(\Phi, \mathbb{R}^2_+) \neq \emptyset$.

4. Kết luận

Trong bài báo này chúng tôi đã chứng minh vài điều kiện đủ cho sự tồn tại điểm yên ngựa của ánh xạ đa trị nhận giá trị trong không gian vectơ tổng quát và không yêu cầu cấu trúc tô pô cũng như các giả thiết về tính chất lồi của tập sinh tiền thứ tự hay tính chất lồi của hàm mục tiêu. Bài viết cũng đưa ra một vài công cụ để kiểm tra điều kiện đủ này và có ví dụ tổng quát để minh họa cho kết quả.

Lời cảm ơn

Bài báo này được sự hổ trợ của Trường đại học Thủ Dầu Một thuộc đề tài mã số DT.21.1-015.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] B. Bonnet, H. Frankowska, Necessary optimality conditions for optimal control problems in Wasserstein spaces. Applied Mathematics & Optimization, 84(2) (2021), 1281-1330.

[2] S. S. Chang, G. X. Z. Yuan, Saddle Points and Minimax Theorems for Vector-Valued Multifunctions on H-Spaces. Appl. Math. Lett., 11(3) (1998), 101-107.

[3] Y.L. Chang , J.S. Chen, Convexity of symmetric cone trace functions in Euclidean Jordan algebras. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 14 (1) (2013), 53-61.

[4] D. I. Duca, L. Lupsa, Saddle points for vector valued functions: existence, necessary and sufficient theorems. J. Glob. Optim. 53 (2012), 431–440.

[5] F. Ferro, A minimax theorem for vector-valued functions. J. Optim. Theory Appl., 60 (1989), 19-31.

[6] F. Flores-Bazán, C. Vera,Characterization of the nonemptiness and compactness of solution sets in convex and nonconvex vector optimization. J. Optim. Theory Appl., **130** (2006), 185-207.

[7] N. X. Hai, N. H. Quan and V. V. Tri, Some saddle-point theorems for vector-valued functions. J. Global Optim., (2022), https://doi.org/10.1007/s10898-022-01250-z

[8] K. R. Kazmi, S. Khan, Existence of solutions for a vector saddle point problem. Bull. Austral. Math. Soc., 61 (2000), 201-206.

[9] P. Q. Khanh, N. H. Quan. Versions of the Weierstrass theorem for bifunctions and the solution existence in optimization. SIAM J. Optim., 29 (2019), 1502-1523.

[10] B. Kim, J. Kim, Existence of a unique Nash equilibrium for an asymmetric lottery Blotto game with weighted majority. J. Math. Anal. Appl., 479(1) (2019), 1403-1415.

[11] J. Y. Lu, J-S. Chen, N. Zhang, No gap second-order optimality conditions for circular conic programs. Numerical Functional Analysis and Optimization, 40(10) (2019), 1113-1135.

[12] M. Milasi, D. Scopelliti. A stochastic variational approach to study economic equilibrium problems under uncertainty. J. Math. Anal. Appl., 502(1) (2021), 125-243.

[13] L. D. Muu, L. T. Xuan. On fixed point approach to equilibrium problem. J. Fixed Point Theory Appl., 23 (2021), 50.

[14] Z. D. Mitrović, I. D. Arandelović. Generalized scalar equilibrium problem with applications to best and coupled best approximations. J. Fixed Point Theory Appl. 19 (2017), 1613-1624.

[15] T. Tanaka, Generalized quasiconvexities, cone saddle points, and minimax theorem for vector-valued functions. J. Optim. Theory Appl., 81, 355-377 (1994)

[16] X. Wang, G. López, C. Li, J. C. Yao. Equilibrium problems on Riemannian manifolds with applications. J. Math. Anal. Appl., 473(2) (2019), 866-891.

[17] Y. D. Xu, P. P. Zhang, S. K. Zhu. Optimality conditions for efficient solutions of nonconvex constrained multiobjective optimization problems via image space analysis. Optimization, 70(8) (2021), 1673-1701.

[18] Y. Zhang, S.J. Li, Minimax theorems for scalar set-valued mappings with nonconvex domains and applications. J. Glob. Optim., 57 (2013), 1359–1373.