

SỰ TỒN TẠI ĐIỂM CÂN BẰNG CHO TRÒ CHƠI ĐA MỤC TIÊU

Nguyễn Xuân Hải⁽¹⁾, Nguyễn Hồng Quân⁽¹⁾

(1) Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông – cơ sở TP.HCM

Ngày nhận bài 15/05/2023; Ngày gửi phản biện 20/06/2023; Chấp nhận đăng 30/08/2023

Liên hệ email: nxhai@ptitphcm.edu.vn

<https://doi.org/10.37550/tdmu.VJS/2023.05.479>

Tóm tắt

Bài báo này giới thiệu bốn loại điểm cân bằng mới cho trò chơi đa mục tiêu và đưa ra một điều kiện đủ cho sự tồn tại các loại điểm cân bằng này. Các khái niệm và kết quả được thiết lập mà không dùng cả cấu trúc tuyến tính và cấu trúc tô pô trên các tập liên quan. Vài ví dụ cũng được cung cấp để minh họa cho các khái niệm và kết quả.

Từ khóa: C-cân bằng Henig-Nash, C-cân bằng Benson-Nash, C-cân bằng -Nash, C-cân bằng Nash yếu, sự tồn tại, trò chơi đa mục tiêu

Abstract

THE EXISTENCE OF EQUILIBRIUM POINTS IN MULTI-OBJECTIVE GAMES

This paper introduces four kinds of equilibrium points of multi-objective games and provides a sufficient condition for the existence of these equilibrium points. Concepts and results are established without using both linear and topological structures on related sets. Several examples are also provided to illustrate the concepts and results.

1 Giới thiệu

Lý thuyết trò chơi là một bộ phận quan trọng của Toán kinh tế và có nhiều áp dụng trong các lĩnh vực của khoa học kỹ thuật, chẳng hạn như lý thuyết mạch, kinh tế, tài chính, các ngành khoa học xã hội... Trong Lý thuyết trò chơi, khái niệm điểm cân bằng đóng một vai trò nền tảng. J. Nash ([8]) là người đầu tiên giới thiệu khái niệm này cho trò chơi không hợp tác với n đấu thủ. Về sau, khái niệm của Nash được nhiều nhà kinh tế và toán học quan tâm nghiên cứu và nó được dùng để mô tả rất nhiều tình huống trong các ngành khoa học tự nhiên cũng như khoa học xã hội [1, 2, 9, 10, 11, 12, 13, 14]. Trong khoảng vài chục năm qua, khái niệm điểm cân bằng đã được phát triển cho các trò chơi đa mục tiêu [1, 2, 7, 11, 12]. Trong hầu hết các công trình đã biết về trò chơi đa mục tiêu, có hai khái niệm điểm cân bằng được xét, đó là điểm cân bằng Nash và điểm cân bằng Nash yếu. Hơn nữa, các khái niệm điểm cân bằng này được xác định thông qua một nón lồi với phần trong không rỗng, và do đó nhất thiết phải có cả cấu trúc tuyến tính cũng như cấu trúc tô pô trong không gian ảnh của các hàm payoff. Các kết quả tồn tại được thiết lập đối với các giả thiết về tính lồi. Các công cụ chủ yếu dùng để chứng minh các kết quả là định lý KKM-Fan, các định lý điểm bất động, hoặc dùng kỹ thuật vô hướng hóa. Gần đây, một số tác giả đã nghiên cứu các bài toán trong tối ưu hóa, chẳng hạn bài toán tối ưu véc tơ, bài toán cân bằng véc tơ..., mà không dùng cấu trúc tô pô trong không gian ảnh của hàm mục tiêu. Hơn nữa các khái niệm nghiệm được phát biểu dựa trên các thứ tự tổng quát, các thứ tự này được xác định từ một tập tổng quát thay vì một nón lồi [3, 4, 6]. Bởi vì điểm cân bằng của một trò chơi có thể được chuyển đổi như là nghiệm của một bài toán tối ưu hoặc nghiệm của một bài toán cân bằng, việc nghiên

cứu điểm cân bằng của trò chơi đa mục tiêu trong cách đặt tổng quát, không dùng cả cấu trúc lồi và cấu trúc tôpô, là cần thiết và có ý nghĩa.

Mục đích chính của bài báo này là nghiên cứu bốn loại điểm cân bằng cho trò chơi đa mục tiêu và thiết lập một định lý tồn tại cho các loại điểm này. Ngoài hai khái niệm điểm cân bằng được mở rộng đến thứ tự tổng quát, chúng tôi giới thiệu ở đây hai loại điểm cân bằng mới. Kết quả tồn tại của chúng tôi được phát biểu không dựa vào cấu trúc tôpô cũng như không cần giả thiết về tính lồi.

Bài báo có cấu trúc như sau: Mục 2 chúng tôi giới thiệu trò chơi đa mục tiêu, đưa ra các khái niệm điểm cân bằng và thiết lập các mối quan hệ giữa chúng; Mục 3, chúng tôi chứng minh một định lý tồn tại cho các loại điểm cân bằng cũng như đưa ra vài ví dụ áp dụng nhằm minh họa và thể hiện sự hữu ích của kết quả mới này.

2 Các khái niệm về điểm cân bằng của trò chơi đa mục tiêu

Trong toàn bộ bài báo, ta kí hiệu \mathbb{R} là tập các số thực, $\mathbb{R}^k = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, k\}$, $\mathbb{R}_+^k = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^k \mid x_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, k\}$ là nón othant dương của \mathbb{R}^k . Gọi $E \subset \mathbb{R}^k$ là một tập không rỗng. Nón sinh bởi E , phần trong đại số của E và bao đóng vectơ của E tương ứng được xác định bởi

$$\text{cone}E := \bigcup_{\lambda > 0} \lambda E,$$

$$\text{core}E := \{v \in \mathbb{R}^k \mid \forall v' \in \mathbb{R}^k, \exists \lambda > 0 \text{ sao cho } v + [0, \lambda]v' \subset E\},$$

$$\text{vcl}E := \{v \in \mathbb{R}^k \mid \exists v' \in \mathbb{R}^k, \forall \lambda > 0, \exists \lambda' \in [0, \lambda] \text{ sao cho } v + \lambda'v' \in E\}.$$

Ta đã biết rằng $\text{core}E \subset E \subset \text{vcl}E$. Nếu $\text{cone}E = E$ (tương ứng, $\text{core}E \neq \emptyset$, $\text{core}E = E$, $\text{vcl}E = E$), E được gọi là một nón (tương ứng, tập rỗng, tập mở đại số, tập đóng vectơ). Kí hiệu $\text{int}E$ và $\text{cl}E$ là phần trong tôpô và bao đóng tôpô của E . Ta dễ dàng chứng minh rằng $\text{int}E \subset \text{core}E \subset E \subset \text{vcl}E \subset \text{cl}E$, và $\text{int}E = \text{core}E$ nếu E là lồi với $\text{int}E \neq \emptyset$. Bởi vậy, nếu E là mở (tương ứng, đóng) thì nó cũng mở đại số (tương ứng, đóng vectơ).

Ta đặt

$$\mathcal{H} = \{K \subset \mathbb{R}^k \mid K \text{ là nón rỗng, } K \neq \mathbb{R}^k\},$$

$$\mathcal{H}_c = \{K \in \mathcal{H} \mid K \text{ lồi}\},$$

$$\mathcal{C} = \{C \subset \mathbb{R}^k \mid C \text{ rỗng, } C \neq \mathbb{R}^k, \text{ và } C + C \subset C\},$$

$$\mathcal{C}^{\text{vcl}} = \{C \in \mathcal{C} \mid \text{vclcone}(C) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset\},$$

và với mỗi $C \subset \mathbb{R}^k$,

$$\mathcal{H}_C^{\text{core}} = \{D \in \mathcal{H}_c \mid C \subset \text{core}D\},$$

$$\mathcal{C}^{\text{core}} = \{C \subset \mathbb{R}^k \mid \mathcal{H}_C^{\text{core}} \neq \emptyset\}.$$

Vì $K + K \subset K$ cho mọi $K \in \mathcal{H}_c$, ta có $\mathcal{H}_c \subset \mathcal{C}$.

Trò chơi không hợp tác. Một trò chơi có m đấu thủ, kí hiệu là \mathcal{G} , trong đó mỗi đấu thủ không thể thực hiện các cam kết với những đấu thủ khác được gọi là một TRÒ CHƠI KHÔNG HỢP TÁC. Với trò chơi \mathcal{G} , gọi $I := \{1, 2, \dots, m\}$ là tập các đấu thủ. Chiến lược của đấu thủ i , kí hiệu là x_i , là một kế hoạch hành động hoàn chỉnh. Chiến lược x_i chỉ định hành động mà đấu thủ i thực hiện trong tất cả các hành động của trò chơi mà anh ta được yêu cầu hành động. Gọi A_i là tập tất cả tất cả các chiến lược dành cho đấu thủ i , nó được gọi là tập chiến lược của đấu thủ i . Đặt $A = A_1 \times \dots \times A_m$. Mỗi

$x = (x_1, \dots, x_m) \in A$ là một tổ hợp các chiến lược của các đấu thủ trong trò chơi. Với $(x_1, \dots, x_m) \in A$, gọi $c_i(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}$ là "phần thưởng" (Payoff) của đấu thủ i khi anh ta chọn chiến lược x_i và mỗi đấu thủ k chọn chiến lược x_k ($k \neq i$) của họ. "Phần thưởng" của đấu thủ i thường là lợi nhuận mà anh ta đạt được khi trò chơi kết thúc. Hàm $c_i : A \rightarrow \mathbb{R}, x = (x_1, \dots, x_m) \mapsto c_i(x_1, \dots, x_m)$ được gọi là hàm payoff của đấu thủ i . Một điểm $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \in A$ được gọi là một điểm CÂN BẰNG NASH của \mathcal{G} nếu, với mọi $y_i \in A_i$ và $i = 1, 2, \dots, m$, ta có

$$c_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_m) \geq c_i(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, y_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_m).$$

Bài toán cân bằng Nash là bài toán tìm điểm cân bằng Nash của trò chơi \mathcal{G} .

Trò chơi hàm payoff của đấu thủ. Với trò chơi \mathcal{G} nói trên, trong nhiều tình huống thực tiễn, "phần thưởng" của đấu thủ i không nhất thiết phải một loại phần thưởng nào đó, mà có thể gồm nhiều loại khác nhau (tiền bạc, chức vụ, danh tiếng,...). Bởi vậy, "phần thưởng" của đấu thủ i có thể được xác định như là vectơ mà mỗi thành phần của vectơ thể hiện giá trị của một loại phần thưởng. Và như vậy, hàm payoff của người chơi i là một hàm vectơ $\mathbf{c}_i : A = \prod_{i=1}^n A_i \rightarrow \mathbb{R}^k$. Trong trường hợp này ta nói \mathcal{G} là một trò chơi không hợp tác đa mục tiêu hoặc trò chơi không hợp tác với "payoff vectơ".

Từ đây trở đi ta dùng các kí hiệu sau:

- Ta kí hiệu $\mathcal{G} = (A_i, \mathbf{c}_i)_{i \in I}$ là trò chơi không hợp tác đa mục tiêu với n đấu thủ, trong đó $I := \{1, 2, \dots, n\}$ là tập các đấu thủ, A_i là tập chiến lược của đấu thủ i và $\mathbf{c}_i : A = \prod_{i=1}^n A_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ là hàm payoff vectơ của đấu thủ i .
- $A_{-i} := \prod_{k \neq i} A_k$,
- $x_{-i} = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m)$ là hình chiếu của $x = (x_1, \dots, x_m)$ trên A_{-i} ,
- $(x_{-i}, y_i) := (x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_m)$.

Chúng tôi giới thiệu các khái niệm điểm cân bằng sau đây cho trò chơi hàm payoff của đấu thủ.

Định nghĩa 2.1 Cho $C \subset \mathbb{R}^k$. Xét trò chơi không hợp tác đa mục tiêu với n đấu thủ $\mathcal{G} = (A_i, \mathbf{c}_i)_{i \in I}$. Một điểm $\bar{x} = (\bar{x}_i)_{i \in I} \in A$ được gọi là:

- (a) một điểm C -CÂN BẰNG HENIG-NASH của \mathcal{G} nếu tồn tại $D \in \mathcal{H}_C^{core}$ sao cho với mỗi $i \in I$,

$$(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \cap (-\text{core}D) = \emptyset;$$

- (b) một điểm C -CÂN BẰNG BENSON-NASH của \mathcal{G} nếu với mỗi $i \in I$,

$$\text{vclcone}(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset;$$

- (c) một điểm C -CÂN BẰNG NASH của \mathcal{G} nếu với mỗi $i \in I$,

$$(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i)) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset;$$

- (d) một điểm C -CÂN BẰNG NASH YẾU của \mathcal{G} nếu với mỗi $i \in I$,

$$(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i)) \cap (-\text{core}C) = \emptyset.$$

Nhận xét rằng, khi $k = 1$ và $C = [0, +\infty)$, cả bốn khái niệm điểm cân bằng trong Định nghĩa 2.1 trở thành khái niệm điểm cân bằng Nash.

Ta kí hiệu $S^{He}(\mathcal{G}, C)$ (tương ứng, $S^{Be}(\mathcal{G}, C)$, $S(\mathcal{G}, C)$, $S^w(\mathcal{G}, C)$) là tập các điểm C -cân bằng Henig-Nash (tương ứng, tập các điểm C -cân bằng Benson-Nash, tập các điểm C -cân bằng Nash, tập các điểm C -cân bằng Nash yếu) của \mathcal{G} .

Mệnh đề sau nêu lên mối quan hệ giữa các loại điểm cân bằng trong Định nghĩa 2.1.

Mệnh đề 2.1 Cho $C \subset \mathbb{R}^k$. Với trò chơi $\mathcal{G} = (A_i, \mathbf{c}_i)_{i \in I}$, ta có các quan hệ sau.

- (a) $S^{He}(\mathcal{G}, C) \subset S^{Be}(\mathcal{G}, C)$.
- (b) $S(\mathcal{G}, C) \subset S^w(\mathcal{G}, C)$.
- (c) If $C + C = C$, thì $S^{He}(\mathcal{G}, C) \subset S^{Be}(\mathcal{G}, C) \subset S(\mathcal{G}, C) \subset S^w(\mathcal{G}, C)$.

Chứng minh. (a) Nếu $\bar{x} \in S^{He}(\mathcal{G}, C)$, thì tồn tại $D \in \mathcal{K}_C^{core}$ sao cho với mỗi $i \in I$,

$$(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \cap (-coreD) = \emptyset.$$

Điều này kéo theo rằng

$$cone(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \cap (-coreD) = \emptyset.$$

Giả sử tồn tại $u \in vclcone(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \cap (-coreD)$. Thế thì, $u \in -coreD = -core(coreD)$ khi D là lõi. Do đó, với mọi $v \in \mathbb{R}^k$, tồn tại $\lambda_v > 0$ sao cho $u + [0, \lambda_v]v \subset -coreD$. Hơn nữa, khi $u \in vclcone(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C)$, tồn tại $v' \in \mathbb{R}^k$ sao cho $u + \lambda'_v v' \in cone(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C)$ với $\lambda'_v \in [0, \lambda_v]$ nào đó. Thế thì, $u + \lambda'_v v' \in cone(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \cap (-coreD)$, mâu thuẫn. Vậy, $vclcone(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \cap (-coreD) = \emptyset$. Do đó, $vclcone(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset$, tức là, $\bar{x} \in S^{Be}(\mathcal{G}, C)$.

(b) Hiển nhiên.

(c) Do các phần (a) và (b), ta chỉ cần chứng tỏ rằng $S^{Be}(\mathcal{G}, C) \subset S(\mathcal{G}, C)$. Nếu $\bar{x} \in S^{Be}(\mathcal{G}, C)$, thì $vclcone(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset$ cho mọi $i \in I$. Điều này kéo theo rằng $(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset$ cho mọi $i \in I$. Thế thì, với mọi $i \in I$ và $y_i \in A_i$, $\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, y_i) \notin -C - C \setminus \{0\} \supset -C \setminus \{0\}$. Do đó, $\bar{x} \in S(\mathcal{G}, C)$. \square

3 Sự tồn tại điểm cân bằng

Kết quả chính của bài báo là Định lí 3.1 dưới đây. Trong định lí này, khác với một số kết quả đã biết, các tập chiến lược không cần thiết phải là những không gian tôpô. Hơn nữa, định lí không dùng bất kỳ giả thiết về tính lõi.

Định lí 3.1 Xét trò chơi $\mathcal{G} = (A_i, \mathbf{c}_i)_{i \in I}$ và $C \subset \mathbb{R}^k$.

(a) Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa

(i) với bất kì $x^1, \dots, x^m \in A$ với $x^{m+1} := x^1$, tồn tại $j \in \{1, \dots, m\}$ sao cho

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x^j) - \mathbf{c}_i(x_{-i}^j, x_i^{j+1})] \notin -C \setminus \{0\};$$

(ii) tồn tại một tập con hữu hạn M của A sao cho

$$\bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i)] \in -C \setminus \{0\}\} \subset \bigcup_{y^j \in M} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i^j)] \in -C \setminus \{0\}\}$$

Thế thì, $S(\mathcal{G}, C) \neq \emptyset$.

(b) Giả sử rằng các điều kiện sau đây được thỏa

(i) với bất kì $x^1, \dots, x^m \in A$ với $x^{m+1} := x^1$, tồn tại $j \in \{1, \dots, m\}$ sao cho

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x^j) - \mathbf{c}_i(x_{-i}^j, x_i^{j+1})] \notin -\text{core}C;$$

(ii) tồn tại một tập con hữu hạn M của A sao cho

$$\bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i)] \in -\text{core}C\} \subset \bigcup_{y^j \in M} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i^j)] \in -\text{core}C\}.$$

Thế thì, $S^v(\mathcal{G}, C) \neq \emptyset$.

(c) Giả sử rằng $C \in \mathcal{C}^{\text{core}}$ và các điều kiện sau đây được thỏa

(i) với bất kì $x^1, \dots, x^m \in A$ với $x^{m+1} := x^1$, tồn tại $j \in \{1, \dots, m\}$ sao cho

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x^j) - \mathbf{c}_i(x_{-i}^j, x_i^{j+1})] \in C;$$

(ii) tồn tại một tập con hữu hạn M của A sao cho

$$\bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i)] \notin C\} \subset \bigcup_{y^j \in M} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i^j)] \notin C\}.$$

Thế thì, $S^{\text{He}}(\mathcal{G}, C) \neq \emptyset$.

(d) Giả sử rằng $C \in \mathcal{C}^{\text{vcl}}$ và các điều kiện (i)-(ii) trong (c) được thỏa, thì, $S^{\text{Be}}(\mathcal{G}, C) \neq \emptyset$.

Chúng minh. Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 3.1 Cho $E \subset \mathbb{R}^k$. Với trò chơi $\mathcal{G} = (A_i, \mathbf{c}_i)_{i \in I}$, giả sử rằng

(I) với bất kì $x^1, \dots, x^m \in A$ với $x^{m+1} := x^1$, tồn tại $j \in \{1, \dots, m\}$ sao cho

$$\sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(x^j) - \mathbf{c}_h(x_{-h}^j, x_h^{j+1})] \notin -E;$$

(II) tồn tại một tập con hữu hạn M của A sao cho

$$\bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid \sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(x) - \mathbf{c}_h(x_{-h}, y_h)] \in -E\} \subset \bigcup_{y^j \in M} \{x \in A \mid \sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(x) - \mathbf{c}_h(x_{-h}, y_h^j)] \in -E\}.$$

Khi đó, tồn tại $\bar{x} \in A$ sao cho $\sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(\bar{x}) - \mathbf{c}_h(\bar{x}_h, y_h)] \in \mathbb{R}^k \setminus (-E)$ với mọi $y \in A$.

Thật vậy, giả sử trái lại rằng, với mỗi $x \in A$, tồn tại $y \in A$ sao cho

$$\sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(x) - \mathbf{c}_h(x_h, y_h)] \in -E,$$

hoặc tương đương,

$$A = \bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid \sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(x) - \mathbf{c}_h(x_h, y_h)] \in -E\}.$$

Bởi (II), tồn tại một tập con hữu hạn $M := \{y^1, \dots, y^m\}$ của A sao cho

$$M \subset A = \bigcup_{y^j \in M} \{x \in A \mid \sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(x) - \mathbf{c}_h(x_h, y_h^j)] \in -E\}.$$

Bởi (I), ta thấy rằng

$$y^j \notin U^j := \{x \in A \mid \sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(x) - \mathbf{c}_h(x_h, y_h^j)] \in -E\} \text{ cho mọi } j = 1, \dots, m.$$

Khi $y^1 \notin U^1$, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử rằng $y^1 \in U^2$, tức là

$$\sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(y^2) - \mathbf{c}_h(y_h^2, y_h^1)] \in -E.$$

Thế thì, bởi (I),

$$\sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(y^1) - \mathbf{c}_h(y_h^1, y_h^2)] \notin -E,$$

tức là $y^2 \notin U^1$. Vậy, $y_2 \notin U^1 \cup U^2$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử rằng $y_2 \in U^3$. Thế thì,

$$\sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(y^2) - \mathbf{c}_h(y_h^2, y_h^1)] \in -E \text{ và } \sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(y^3) - \mathbf{c}_h(y_h^3, y_h^2)] \in -E.$$

Điều này và (I) kéo theo rằng

$$\sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(y^2) - \mathbf{c}_h(y_h^2, y_h^3)] \notin -E \text{ và } \sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(y^1) - \mathbf{c}_h(y_h^1, y_h^3)] \notin -E,$$

tức là, $y^3 \notin U^2$ và $y^3 \notin U^1$. Do đó, $y^3 \notin U^1 \cup U^2 \cup U^3$. Cứ tiếp tục như vậy ta suy ra rằng

$$y^j \notin \bigcup_{l=1}^j U^l \text{ cho mọi } j = 1, \dots, m.$$

Đặc biệt, $y^m \notin \bigcup_{l=1}^m U^l = A$, mâu thuẫn. Vậy, phải tồn tại $\bar{x} \in A$ sao cho

$$\sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(\bar{x}) - \mathbf{c}_h(\bar{x}_h, y_h)] \in \mathbb{R}^k \setminus (-E) \text{ với mọi } y \in A.$$

Bây giờ ta chứng minh Định lí 3.1.

(a) Áp dụng Bổ đề 3.1 cho $E = C \setminus \{0\}$ ta suy ra tồn tại $\bar{x} \in A$ sao cho

$$\sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(\bar{x}) - \mathbf{c}_h(\bar{x}_h, y_h)] \notin -C \setminus \{0\} \text{ với mọi } y \in A. \tag{1}$$

Với mỗi $i \in I$ và với mọi $y_i \in A_i$, lấy $y = (\bar{x}_{-i}, y_i) \in A$. Thế thì, từ (1) ta suy ra

$$\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, y_i) = \sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(\bar{x}) - (\mathbf{c}_h(\bar{x}_{-h}, y_h))] \notin -C \setminus \{0\}.$$

Bởi vậy, với mỗi $i \in I$,

$$(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i)) \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset.$$

Điều này chứng tỏ rằng $\bar{x} \in S(\mathcal{G}, C)$.

(b) Áp dụng Bổ đề 3.1 cho $E = \text{core}C$ ta suy ra tồn tại $\bar{x} \in A$ sao cho

$$\sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(\bar{x}) - \mathbf{c}_h(\bar{x}_{-h}, y_h)] \notin -\text{core}C \text{ với mọi } y \in A. \quad (2)$$

Tương tự như phần (a), với mỗi $i \in I$ và với mọi $y_i \in A_i$, trong (2) lấy $y = (\bar{x}_{-i}, y_i) \in A$ ta có

$$\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, y_i) = \sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(\bar{x}) - (\mathbf{c}_h(\bar{x}_{-h}, y_h))] \notin -\text{core}C.$$

Do đó, với mỗi $i \in I$,

$$(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i)) \cap (-\text{core}C) = \emptyset.$$

Điều này có nghĩa là $\bar{x} \in S^w(\mathcal{G}, C)$.

(c) và (d). Áp dụng Bổ đề 3.1 cho $E = -\mathbb{R}^k \setminus C$ ta suy ra tồn tại $\bar{x} \in A$ sao cho

$$\sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(\bar{x}) - \mathbf{c}_h(\bar{x}_{-h}, y_h)] \in C \text{ với mọi } y \in A. \quad (3)$$

Với mỗi $i \in I$ và với mọi $y_i \in A_i$, lấy $y = (\bar{x}_{-i}, y_i) \in A$ và thay vào (3) ta được

$$\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, y_i) = \sum_{h=1}^n [\mathbf{c}_h(\bar{x}) - (\mathbf{c}_h(\bar{x}_{-h}, y_h))] \in C.$$

Bởi vậy, với mỗi $i \in I$,

$$(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i)) \subset C. \quad (4)$$

Với phần (c), khi $C \in \mathcal{C}^{core}$, tồn tại $D \in \mathcal{K}_C^{core}$. Thế thì, bởi (4),

$$(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \subset C + \text{core}D \subset \text{core}D.$$

Vì $\text{core}D \cap (-\text{core}D) = \emptyset$, ta có

$$(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \cap (-\text{core}D) = \emptyset.$$

Vậy, $\bar{x} \in S^{He}(\mathcal{G}, C)$.

Với phần (d), khi $C \in \mathcal{C}^{vcl}$, bởi (4), ta có

$$(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \subset C + C \subset C.$$

Do đó,

$$\text{vclcone}(\mathbf{c}_i(\bar{x}) - \mathbf{c}_i(\bar{x}_{-i}, A_i) + C) \cap (-C \setminus \{0\}) \subset \text{vclcone}C \cap (-C \setminus \{0\}) = \emptyset.$$

Vậy, $\bar{x} \in S^{Be}(\mathcal{G}, C)$. □

Nhận xét 3.1 Do Mệnh đề 2.1, nếu các điều kiện trong phần (a) thỏa thì $S^w(\mathcal{G}, C) \neq \emptyset$, và nếu các điều kiện trong phần (c) thỏa thì $S^{Be}(\mathcal{G}, C) \neq \emptyset$. Thêm nữa, nếu $C \in \mathcal{C} \cap \mathcal{C}^{core}$ và các điều kiện trong phần (c) thỏa, thì cả bốn tập điểm cân bằng là không rỗng.

Trong trường hợp các hàm payoff của trò chơi là tách biến, ta có hệ quả sau.

Hệ quả 3.1 $C \subset \mathbb{R}^k$. Với trò chơi $\mathcal{G} = (A_i, \mathbf{c}_i)_{i \in I}$, giả sử rằng với mỗi $i \in I$,

$$\mathbf{c}_i(x) = h_i(x_i) + g_i(x_{-i}) \text{ cho mọi } x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A,$$

ở đây $h_i : A_i \rightarrow \mathbb{R}^k$ và $g_i : A_{-i} \rightarrow \mathbb{R}^k$.

(a) Giả sử rằng $C \in \mathcal{C}$ và tồn tại một tập con hữu hạn M của A sao cho

$$\bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n (h_i(x_i) - h_i(y_i)) \in -C \setminus \{0\}\} \subset \bigcup_{y^j \in M} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n (h_i(x_i) - h_i(y_i)) \in -C \setminus \{0\}\}.$$

Thế thì, $S(\mathcal{G}, C) \neq \emptyset$.

(b) Giả sử rằng $C \in \mathcal{C}$ và tồn tại một tập con hữu hạn M của A sao cho

$$\bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n (h_i(x_i) - h_i(y_i)) \in -\text{core}C\} \subset \bigcup_{y^j \in M} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n (h_i(x_i) - h_i(y_i)) \in -\text{core}C\}.$$

Thế thì, $S^w(\mathcal{G}, C) \neq \emptyset$.

Chứng minh. Với mọi $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ và $y = (y_1, \dots, y_n) \in A$ ta có

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i)] &= \sum_{i=1}^n (h_i(x_i) + g_i(x_{-i}) - h_i(y_i) - g_i(x_{-i})) \\ &= \sum_{i=1}^n (h_i(x_i) - h_i(y_i)). \end{aligned}$$

(a) Rõ ràng giả thiết (ii) của phần (a) của Định lí 3.1 thỏa. Ta chứng minh giả thiết (i) của Định lí 3.1 cũng thỏa. Vì $C \in \mathcal{C}$, ta dễ kiểm tra được rằng $C \setminus \{0\} + C \setminus \{0\} \subset C \setminus \{0\}$. Giả sử (i) của Định lí 3.1 không thỏa. Thế thì tồn tại $x^1, \dots, x^m \in A$ với $x^{m+1} := x^1$ sao cho với mọi $j \in \{1, \dots, m\}$

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x^j) - \mathbf{c}_i(x_{-i}^j, x_i^{j+1})] = \sum_{i=1}^n (h_i(x_i^j) - h_i(x_i^{j+1})) \in -C \setminus \{0\}.$$

Suy ra

$$0 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (h_i(x_i^j) - h_i(x_i^{j+1})) \in -C \setminus \{0\} - C \setminus \{0\} - \dots - C \setminus \{0\} \subset -C \setminus \{0\},$$

mâu thuẫn.

(b) Với điều kiện trong phần (b) của Hệ quả 3.1 ta thấy rằng giả thiết (ii) của phần (b) của Định lí 3.1 thỏa. Ta kiểm tra giả thiết (i) của phần (b) của Định lí 3.1. Khi $C \in \mathcal{C}$, ta có $\text{core}C + \text{core}C =$

coreC. Nếu (i) của phần (b) của Định lí 3.1 không thỏa, thì tồn tại $x^1, \dots, x^m \in A$ với $x^{m+1} := x^1$ sao cho với mọi $j \in \{1, \dots, m\}$

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x^j) - \mathbf{c}_i(x_{-i}^j, x_i^{j+1})] = \sum_{i=1}^n (h_i(x_i^j) - h_i(x_i^{j+1})) \in -\text{core}C.$$

Suy ra

$$0 = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n (h_i(x_i^j) - h_i(x_i^{j+1})) \in -\text{core}C - \text{core}C - \dots - \text{core}C = -\text{core}C,$$

mâu thuẫn. □

Sau đây là vài ví dụ minh họa cho các kết quả trên.

Ví dụ 3.1 Xét trò chơi không hợp tác đa mục tiêu $\mathcal{G} = (A_i, \mathbf{c}_i)_{i \in I}$ với $I = \{1, 2\}$, $A_1 = A_2 = [0, 1]$, $\mathbf{c}_i : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ được xác định bởi, cho mọi $x = (x_1, x_2) \in A$,

$$\mathbf{c}_1(x) = ((x_1)^2 + \gamma_1(x_2), a_1),$$

$$\mathbf{c}_2(x) = ((x_2)^2 + \gamma_2(x_1), a_2),$$

ở đây $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$

Với $C = \mathbb{R}_+^2$, ta xét sự tồn tại các điểm cân bằng của \mathcal{G} .

Với mọi $x, y \in A$, ta có

$$\sum_{i=1}^2 [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i)] = ((x_1)^2 + (x_2)^2 - (y_1)^2 - (y_2)^2, 0).$$

Lấy bất kỳ $x^1, \dots, x^m \in A$ với $x^{m+1} := x^1$. Giả sử rằng với mọi $j \in \{1, \dots, m\}$

$$\sum_{i=1}^2 [\mathbf{c}_i(x^j) - \mathbf{c}_i(x_{-i}^j, x_i^{j+1})] = ((x_1^j)^2 + (x_2^j)^2 - (x_1^{j+1})^2 - (x_2^{j+1})^2, 0) \in -\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Thế thì

$$\begin{aligned} (0, 0) &= \sum_{j=1}^m ((x_1^j)^2 + (x_2^j)^2 - (x_1^{j+1})^2 - (x_2^{j+1})^2, 0) \in -\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\} + \dots + -\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ &\subset -\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}, \end{aligned}$$

mâu thuẫn. Vậy phải tồn $j \in \{1, \dots, m\}$ sao cho $\sum_{i=1}^2 [\mathbf{c}_i(x^j) - \mathbf{c}_i(x_{-i}^j, x_i^{j+1})] \notin -\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Do đó, giả thiết (i) của phần (a) của Định lí 3.1 thỏa.

Với $M = \{(1, 1)\}$. Ta có:

$$\begin{aligned} &\bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i)] \in -\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0, 0)\}\} \\ &= \bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 \leq (y_1)^2 + (y_2)^2\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 \leq 2\} \\ &= \bigcup_{y^j \in M} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i^j)] \in -\mathbb{R}_+^2 \setminus \{(0,0)\}\}. \end{aligned}$$

Vậy giả thiết (ii) của phần (a) của Định lí 3.1 thỏa. Do đó $S(\mathcal{G}, \mathbb{R}_+^2) \neq \emptyset$.

Bây giờ Lấy bất kỳ $x^1, \dots, x^m \in A$ với $x^{m+1} := x^1$. Giả sử rằng với mọi $h \in \{1, \dots, m-1\}$

$$\sum_{i=1}^2 [\mathbf{c}_i(x^h) - \mathbf{c}_i(x_{-i}^h, x_i^{h+1})] = ((x_1^h)^2 + (x_2^h)^2 - (x_1^{h+1})^2 - (x_2^{h+1})^2, 0) \notin \mathbb{R}_+^2.$$

Thế thì

$$(x_1^h)^2 + (x_2^h)^2 < (x_1^{h+1})^2 + (x_2^{h+1})^2 \text{ với mọi } h \in \{1, \dots, m-1\}.$$

Đặc biệt,

$$(x_1^1)^2 + (x_2^1)^2 < (x_1^m)^2 + (x_2^m)^2.$$

Điều này kéo theo rằng

$$\sum_{i=1}^2 [\mathbf{c}_i(x^m) - \mathbf{c}_i(x_{-i}^m, x_i^{m+1})] = ((x_1^m)^2 + (x_2^m)^2 - (x_1^1)^2 - (x_2^1)^2, 0) \in \mathbb{R}_+^2.$$

Vậy, giả thiết (ii) của phần (c) của Định lí 3.1 thỏa.

Với $M = \{(1, 1)\}$. Ta có:

$$\begin{aligned} &\bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i)] \notin \mathbb{R}_+^2\} \\ &= \bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 < (y_1)^2 + (y_2)^2\} \\ &= \bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid (x_1)^2 + (x_2)^2 < 2\} \\ &= \bigcup_{y^j \in M} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i^j)] \notin \mathbb{R}_+^2\}. \end{aligned}$$

Vậy giả thiết (ii) của phần (c) của Định lí 3.1 thỏa. Vì $\mathbb{R}_+^2 \in \mathcal{C}^{core}$, ta có $S^{He}(\mathcal{G}, \mathbb{R}_+^2) \neq \emptyset$.

Ví dụ 3.2 Xét trò chơi không hợp tác đa mục tiêu $\mathcal{G} = (A_i, \mathbf{c}_i)_{i \in I}$ với $\mathbf{c}_i : A \rightarrow \mathbb{R}^k$ được xác định bởi, cho mọi $x = (x_i)_{i \in I} \in A$,

$$\mathbf{c}_i(x) = (\varphi_{i1}(x_i) + \gamma_{i1}(x_{-i}), \dots, \varphi_{ij}(x_i) + \gamma_{ij}(x_{-i}), \dots, \varphi_{ik}(x_i) + \gamma_{ik}(x_{-i})),$$

ở đây $\gamma_j : A_{-i} \rightarrow \mathbb{R}$, và $\varphi_{ij} : A_i \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa: với mọi $j = 1, 2, \dots, n$,

$$\varphi_{ij}(x_i) \leq \varphi_{ij}(x_i^*) \text{ cho mọi } x_i \in A_i \text{ và } x_i^* \in A_i \text{ nào đó.}$$

Với $C = \mathbb{R}_+^k$, ta xét sự tồn tại các điểm cân bằng của \mathcal{G} .

Với mọi $x, y \in A$, ta có

$$\sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_i, y_i)] = (\varphi_1(x) - \varphi_1(y), \dots, \varphi_j(x) - \varphi_j(y), \dots, \varphi_k(x) - \varphi_k(y)),$$

ở đây

$$\varphi_j(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_{ij}(x_i).$$

Lấy bất kỳ $x^1, \dots, x^m \in A$ với $x^{m+1} := x^1$. Giả sử rằng với mọi $h \in \{1, \dots, m-1\}$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x^h) - \mathbf{c}_i(x_{-i}^h, x_i^{h+1})] &= (\varphi_1(x^h) - \varphi_1(x^{h+1}), \dots, \varphi_j(x^h) - \varphi_j(x^{h+1}), \dots, \varphi_k(x^h) - \varphi_k(x^{h+1})) \\ &\in -\text{core} \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Thế thì

$$\varphi_j(x^h) - \varphi_j(x^{h+1}) < 0 \text{ cho mọi } h \in \{1, \dots, m-1\}.$$

Suy ra

$$\varphi_j(x^m) - \varphi_j(x^1) \geq 0,$$

tức là

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x^m) - \mathbf{c}_i(x_{-i}^m, x_i^{m+1})] &= (\varphi_1(x^m) - \varphi_1(x^1), \dots, \varphi_j(x^m) - \varphi_j(x^1), \dots, \varphi_k(x^m) - \varphi_k(x^1)) \\ &\notin -\text{core} \mathbb{R}^k. \end{aligned}$$

Vậy, điều kiện (i) của phần (b) của Định lí 3.1 thỏa.

Với mỗi $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ ta đặt $x^* := (x_1^*, \dots, x_n^*) \in A$, và $M = \{x^*\}$. Ta có: với mỗi $y \in A$,

$$\begin{aligned} &\bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i)] \in -\text{core} \mathbb{R}^k\} \\ &= \bigcup_{y \in A} \{x \in A \mid \varphi_1(x) < \varphi_1(y), \dots, \varphi_j(x) < \varphi_j(y), \dots, \varphi_k(x) < \varphi_k(y)\} \\ &\subset \{x \in A \mid \varphi_1(x) < \varphi_1(x^*), \dots, \varphi_j(x) < \varphi_j(x^*), \dots, \varphi_k(x) < \varphi_k(x^*)\} \\ &= \bigcup_{y^j \in M} \{x \in A \mid \sum_{i=1}^n [\mathbf{c}_i(x) - \mathbf{c}_i(x_{-i}, y_i^j)] \in -\text{core} C\}. \end{aligned}$$

Vậy giả thiết (ii) của phần (b) của Định lí 3.1 thỏa. Do đó $S^w(\mathcal{G}, C) \neq \emptyset$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] E. Allevi, A. Gnudi, I.V. Konnov, S. Schaible (2003). Noncooperative games with vector payoff under relative pseudomonotonicity. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 118, 245-254.
- [2] E. Allevi, A. Gnudi, I. V. Konnov, S. Schaible (2006). Infinite Player Noncooperative Games with Vector Payoffs Under Relative Pseudomonotonicity. *Journal of Global Optimization*, 34, 79-96.
- [3] C. Gutiérrez, V. Novo, J. L. Ródenas-Pedregosa, T. Tanaka (2016). Nonconvex separation functional in linear spaces with applications to vector equilibria. *Siam on Optimization*, 26, 2677-2695.
- [4] N.X. Hai, N.H. Quan, V.V. Tri (2023). Some saddle-point theorems for vector-valued functions. *Journal of Global Optimization*, 86, 141-161.
- [5] R. Indrajit (2001). *On Games with Identical Equilibrium Payoffs*, Economic Theory, 17, 223-231.
- [6] P. Q. Khanh, N. H. Quan (2019). Versions of the Weierstrass Theorem for Bifunctions and the Solution Existence in Optimization. *Siam on Optimization*, 29(2), 1502-1523.
- [7] D. Lozovanu, D. Solomon, A. Zelikovsky (2002). Multiobjective Games and Determining Pareto Nash Equilibria, Buletinul Academiei de Ştiinţe a Republicii Moldova. *Matematica*, 3(49), 115-122.
- [8] J. F. Nash (1951). Non-cooperative games, *Annals of Mathematics*, 54, 286-295.
- [9] H. Nikaido, K. Isoda (1995). Note on Noncooperative Convex Games. *Pacific Journal of Mathematics*, 5, 807-815.
- [10] L. S. Shapley, F. D. Rigby (1959). Equilibrium points in games with vector payoffs. *Naval Research Logistics Quarterly*, 6(1), 57-61.
- [11] K. Somasundaram, J. Baras (2009). *Pareto Nash Replies for Multi-Objective Games*. Economics Mediterranean Conference on Control and Automation.
- [12] C. Wang, H. Yang (2021). Some Kinds of Bargaining Equilibria of Multi-objective Games. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica*, 37, 201-213.
- [13] J. Yu, G. X. Z. Yuan (1988). The study of Pareto equilibria for multiobjective games by fixed point and Ky Fan minimax inequality methods. *Computers and Mathematics with Applications*, 35, 17-24.
- [14] M. Yushuang, J. Wensheng (2022). Existence and stability of weakly Pareto-Nash equilibria for discontinuous multiobjective games, *Applicable Analysis*, DOI: 10.1080/00036811.2022.2147066.