http://doi.org/10.37550/tdmu.VJS/2024.02.538

BÀI TOÁN CAUCHY TRONG KHÔNG GIAN BANACH TỔNG QUÁT VỚI TÍCH PHÂN BOCHNER

Võ Viết Trí[(1)]

(1) Trường Đại học Thủ Dầu Một

Ngày nhận bài 7/3/2024; Ngày gửi phản biện 8/3/2024; Chấp nhận đăng 26/3/2024

Liên hệ email: trivv@tdmu.edu.vn

https://doi.org/10.37550/tdmu.VJS/2024.02.538

Tóm tắt

Mục đích chính trong bài viết này là, chúng tôi sử dụng mối liên hệ giữa khái niệm tích phân Lebesgue và tích phân Bochner để đưa một hệ vô hạn các phương đạo hàm với các điều kiện ban đầu về một phương trình. Chúng tôi chứng minh sự tồn tại và duy nhất của nghiệm ở dạng tích phân Bochner cho phương trình trong không gian Banach tổng quát. Thêm mữa, bài viết cung cấp một số minh họa cho việc áp dụng.

Từ khóa: *bài toán Cauchy, phương trình đạo hàm, tích phân Bochner*

Abstract

CAUCHY PROBLEM IN GENERALIZED BANACH SPACE WITH BOCHNER INTEGRAL

In this article, we leverage the connection between Lebesgue and Bochner integrals to condense an infinite system of derivatives with initial conditions into a single equation. We establish solution existence and uniqueness in a general Banach space, along with illustrative examples.

1. Giới thiệu

Bài toán Cauchy đã có nhiều ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khoa học và thực tiển, nghiên cứu về bài toán này luôn được nhiều sự quan tâm của bạn đọc. Bài toán Cauchy đã có nhiều biến thể và có nhiều kết quả phong phú. Một lớp bài toán trong số đó mà chưa được nghiên cứu nhiều, đó là, xét sự tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ vô hạn các phương trình vi phân có trể dạng sau đây: $u_n = u_n(t,x)$ thỏa

$$\frac{\partial u_n(t)}{\partial t} = f_n(t,(u_n)_t), \quad t \in (0,\mathbb{T}], \tag{1.1}$$

$$u_n(\gamma) = \frac{\gamma}{n}, \ \gamma \in [-r,0], n = 1,2,... \tag{1.2}$$

trong đó $\mathbb{T} > 0$, $r > 0$, với u là hàm số xác định trên $[-r, \mathbb{T}]$, và $t \in [0, \mathbb{T}]$, và $u_t : C([-r, 0], \mathbb{R})$ định nghĩa bởi $x_t(\gamma) = x(t + \gamma)$, với $\gamma \in [-r, 0]$.

Bài toán Cauchy truyền thống với điều kiện biên đã được nhiều nhà toán học quan tâm từ rất sớm với hệ chỉ có một hay hữu hạn phương trình. Gần đây, bài toán còn được đề xuất xem xét với các đạo hàm cấp không nguyên, như là đạo hàm Riemann-Liouville, Hadamard, Hadamard-Caputo,... (chẳng hạn, [1,2,4]). Nghiệm của một phương trình trong hệ đã nêu thường có dạng tích phân Lebesgue. Tương tự xây dựng tích phân Lebesgue của hàm thực đo được, khái niệm tích phân Bochner đã được hình thành và có hầu hết các tính chất tương tự của tích phân Lebesgue. Không gian Banach tổng quát có sự khác biệt bản chất với $\mathbb{R}$ là, trên đó chưa có thứ tự tuyến tính nên việc so sánh giữa hai hàm số nhận trị trong không gian Banach tổng quát không được thuận lợi như khi nó nhận giá trị trong $\mathbb{R}$. Hàm $f : \Omega \to \mathbb{E}$ khả tích Bochner khi và chỉ khi hàm $s \mapsto |f(s)|_{\mathbb{E}}$ là khả tích Lebesgue, quan hệ này cho phép chúng ta linh hoạt lựa chọn không gian hàm phù hợp thay vì là các hàm luôn nhận giá trị trong $\mathbb{R}$.

Xuất phát từ những suy nghĩ nêu trên, trong bài viết này, chúng tôi đề xuất một hướng giải quyết bằng cách chọn không gian hàm thích hợp, nhờ mối liên hệ giữa tích phân Lebesgue với tích phân Bochner để đưa hệ vô hạn phương trình về bài toán Cauchy truyền thống.

Trước tiên, chúng tôi thiết lập sự tồn tại nghiệm dưới dạng tích phân Bochner cho dạng tổng quát. Đặc biệt, trong trường hợp hàm nguồn có thỏa điều kiện Lipschitz chúng tôi thiết lập tính duy nhất nghiệm. Cụ thể, chúng tôi xem xét bài toán có trễ được mô tả dưới đây.

Cho $\mathbb{E}$ là không gian Banach với chuẩn $|.|$, và J là khoảng đóng bị chặn của $\mathbb{R}$. Ta ký hiệu $C(J, \mathbb{E})$ là không gian các hàm liên tục trên J và nhận giá trị trong $\mathbb{E}$ và được xem xét với chuẩn $\|x\| = \sup_{t\in J} |x(t)|$. Ký hiệu $\mathcal{C} = C([-r, 0], \mathbb{E})$ xét với chuẩn $\|x\|_r = \sup_{s\in[-r,0]} |x(s)|$, với $x \in \mathcal{C}$.

Giả sử $\varphi \in \mathcal{C}$ và $f : (0, \infty) \to \mathbb{E}$. Ta tìm $u \in C([-r, \mathbb{T}], \mathbb{E})$ thỏa

$$\frac{\partial u(t)}{\partial t} = f(t, u_t),\ \ t \in (0, \mathbb{T}], \tag{1.3}$$

$$u|_{[-r,0]} = \varphi, \tag{1.4}$$

ở đó $u|_{[-r,0]}$ là hạn chế của u lên $[-r, 0]$. Chúng tôi xem xét bài toán dưới môt vài giả thiết dưới đây:

(H1): $f : (0, \infty) \times \mathcal{C} \to \mathbb{E}$ là hàm L^1-Caratheodory, nghĩa là,

(i) với mỗi $x \in \mathcal{C}$, hàm $t \to f(t, x)$ là đo được;

(ii) với hầu hết $t \in (0, \mathbb{T})$, hàm $x \to f(t, x)$ là liên tục.

(iii) với mỗi $T > 0$, tồn tại $b \in L^1((0, \mathbb{T}), \mathbb{R}_+)$ để

$$|f(t, v)| \le b(t) \text{ với hầu hết } t \in (0, T).$$

(H2): f là hàm thỏa điều kiện Lipschitz đều theo biến thứ hai, nghĩa là tồn tại số $L > 0$ thỏa

$$|f(t, v) - f(t, w)| \le L\|v - w\|_r \quad \text{với mọi } u, v \in \mathcal{C}, t \in [0, \mathbb{T}]$$

Tiếp theo, chúng tôi thiết lập sự thiết lập không gian hàm cụ thể để bài toán (1.1)-(1.2) hoàn toàn có thể giả quyết bằng bài toán (1.3)-(1.4). Sử dụng kết quả đạt được, chúng tôi chứng minh sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình (1.1)-(1.2). Cuối cùng chúng tôi minh họa bởi ví dụ cụ thể.

Đóng góp khoa học của bài viết của chúng tôi là, đề nghị cách chọn lựa không gian hàm thích hợp để có thể làm đơn gian hơn bài toán với các điều kiện ban đầu.

Phần tiếp theo, trong Mục 2 chúng tôi nêu một số định nghĩa và nhắc lại một số kết quả sẽ được sử dụng sau đó. Kết qua chính sẽ được trình bày trong Mục 3 và cuối cùng là một số ví dụ minh họa.

2. Chuẩn bị

Trong mục này chúng tôi nhắc lại một số kết quả được dùng trong các phần tiếp sau.

Bổ đề 2.1. [3, 6, **Banach fixed point theorem**] *Cho V là tập con đóng của không gian Banach E và dãy $\{q_n\}$ với $q_n \to 0$. Giả sử ánh xạ $\mathcal{A} : V \to V$ thỏa*

$$\|\mathcal{A}^n(u) - \mathcal{A}^n(v)\|_E \leq q_n \|u - v\|_E \quad \textit{với mọi } n \in \mathbb{N}.$$

Khi đó, $\mathcal{A}$ có duy nhất điểm bất động $x_* \in V$, nghĩa là, $\mathcal{A}x_* = x_*$. Thêm nữa, $x_n \to x_*$, trong đó $x_{n+1} = \mathcal{A}x_n$, $x_0 \in V$.

Bổ đề 2.2. [5, **Schauder fixed point theorem**]. *Cho X là không gian Banach và $\mathcal{B}$ là tập con lồi đóng bị chặn của X. Nếu $A : \mathcal{B} \to X$ là ánh xạ liên tục thỏa $A(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ và $A(\mathcal{B})$ là compact tương đối, khi đó A có điểm bất động trong $\mathcal{B}$.*

3. Kết quả chính

Ta bắt đầu mục mày bằng định nghĩa nghiệm dạng tích phân của phương trình (1.3)-(1.4). Tiếp theo là thiết lập sự tồn tại và tồn tại duy nhất nghiệm cho bài toán (1.3)-(1.4) và mối liên hệ giữa hai bài toán này và cuối cùng là minh họa bởi hai ví dụ cụ thể cho việc áp dụng.

3.1. Sự tồn tại nghiệm toàn cục của bài toán tổng quát

Định nghĩa 3.1. Một hàm $u : [0, \mathbb{T}] \to \mathbb{E}$ được gọi là nghiệm dạng tích phân của phương trình (1.3) với điều kiện đầu (1.4) nếu:

(i) u liên tục tuyệt đối trên $[0, \mathbb{T}]$,

(ii) $u|_{[-r,0]} = \varphi$,

(iii) u thỏa phương trình (1.3).

Mệnh đề 3.2. *Giả sử giả thiết (H1) được thỏa. Hàm $u \in C([-r, \mathbb{T}])$ là nghiệm tích phân của (1.3)-(1.4) nếu và chỉ nếu u thỏa các điều kiện sau đây*

$$u(t) = \varphi(t) \textit{ với mọi } t \in [-r, 0], \tag{3.5}$$

$$u(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s, u_s)ds \quad \textit{với } t \in (0, \mathbb{T}]. \tag{3.6}$$

Chứng minh. (i) Chiều thuận: Giả sử u là nghiệm của (1.3)-(1.4). Khi đó, vì u liên tục tuyệt đối trên $[0, \mathbb{T}]$ nên tồn tại hàm g khả tích Bochner g để $u(t) = u(a) + \int_0^t g(s)ds$. Khi đó, $u'(t) = g(t)$. Do u là nghiệm của (1.3) nên $g(t) = f(t, u_t)$. Vậy u thỏa (3.5)-(3.6).
(ii) Chiều đảo: Giả sử u thỏa (3.5)-(3.6). Ta thấy ngay $u(0) = \varphi(0)$. Vì với giả thiết (H1) thì $|f| \in L^1((0, \mathbb{T}), \mathbb{R}^+)$ và do đó f khả tích Bochner. Suy ra u liên tục tuyệt đối trên $[0, \mathbb{T}]$. Ta thấy ngay u thỏa (1.3)-(1.4). Ta kết thúc chứng minh. □

Định lý 3.3. *Giả sử có giả thiết* (H1). *Khi đó với bất* $\varphi \in C([-r,0],\mathbb{E})$. *Khi đó phương trình* (1.3)-(1.4) *có nghiệm xác định trên* $(0,\mathbb{T}]$ *và nghiệm được trình bày bởi*

$$u(t) = \varphi(0) + \int_0^t f(s,u_s)ds.$$

Chứng minh. Ta định nghĩa toán tử $\mathcal{T}: C([-r,\mathbb{T}],\mathbb{E}) \to C([-r,\mathbb{T}],\mathbb{E})$ như sau:

$$\mathcal{T}u(t) = \begin{cases} \varphi(t) & t \in [-r,0]; \\ \varphi(0) + \int_0^t f(s,u_s)ds & t \in (0,\mathbb{T}]. \end{cases}$$

Ta kiểm tra $\mathcal{T}$ được định nghĩa tốt, ta chỉ còn việc kiểm tra tính liên tục của nó tại 0. Thấy ngay rằng $\mathcal{T}(u)$ liên tục tại bất kỳ $t_0 \in [-r,0]$.

• Trường hợp $t_0 = 0$. Ta có

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}(t) - \mathcal{T}(0)| &= \left|\int_0^t f(s,u_s)ds\right| \\ &\le \int_0^t |f(s,u_s)|ds \\ &\le \|b\|_{L^1((0,T),\mathbb{R}_+)} t \to 0, \quad \text{khi } t \to 0^+. \end{aligned}$$

• Trường hợp $t_0 \in (0,\mathbb{T}]$.

† Nếu $t < t_0$, ta phân tích

$$\int_0^{t_0} f(s,u_s)ds = \int_0^t f(s,u_s)ds + \int_t^{t_0} f(s,u_s),$$

và do đó

$$|\mathcal{T}u(t) - \mathcal{T}u(t_0)| \le A(t,t_0),$$

ở đó

$$A(t,t_0) = \int_t^{t_0} |f(s,u_s)|ds \le \|b\|_{L^1((0,\mathbb{T}),\mathbb{R}^+)}(t-t_0) \to 0, \quad \text{khi } t \to t_0^-.$$

† Nếu $t_0 < t$, ta lập luận tương tự và có được $|\mathcal{T}u(t) - \mathcal{T}u(t_0)| \to 0$ khi $t \to t_0^+$. Đi dến kết luận $\mathcal{T}u$ liên tục tại t_0.

Tiếp theo ta chứng tỏ $\mathcal{T}$ là liên tục và compact từ $C([-r,0],\mathbb{E})$ vào $C([-r,0],\mathbb{E})$. Với số $R > 0$, ta định nghĩa $\mathcal{M} = \{u \in C([-r,\mathbb{T}],\mathbb{E}) : \|u\| \le R\}$ Ta sẽ chứng minh tập $\mathcal{T}(\mathcal{M})$ là tập compact tương đối trong $C([-r,\mathbb{T}],\mathbb{E})$ bằng cách kiểm tra tập này đồng liên tục và đồng bị chặn từng điểm. Giả sử $u^{(n)} \in \mathcal{M}$, $y^{(n)} = \mathcal{T}(u^{(n)})$.

• Tính đồng bị chặn từng điểm của $\mathcal{M}$ nhờ vào đánh giá sau

$$\begin{aligned} \|y^{(n)}\| &= \sup_{t\in[-r,\mathbb{T}]} |\mathcal{T}(u^{(n)})(t)| \\ &\le \sup_{t\in[-r,0]} |\mathcal{T}(u^{(n)})(t)| + \sup_{t\in(0,\mathbb{T}]} |\mathcal{T}(u^{(n)})(t)| \\ &\le \|\varphi\|_r + \|b\|_{L^1((0,\mathbb{T}),\mathbb{R}_+)} t, \text{ với } t \in [-r,\mathbb{T}]. \end{aligned}$$

• Tích đồng liên tục được lập luận tương tự phần kiểm tra tính định nghĩa tốt của $\mathcal{T}$ với chú ý đánh giá

$$A(t,t_0) = \int_t^{t_0} |f(s,(u^{(n)})_s)|ds \le \|b\|_{L^1((0,\mathbb{T}),\mathbb{R}^+)}(t-t_0) \to 0, \quad \text{khi } t \to t_0^-$$

là không phụ thuộc vào $u^{(n)}$.

Với $h > 0$. Ta ký hiệu

$$\mathscr{B}_h = \left\{ u \in C([-r,\mathbb{T}],\mathbb{E}) : u|_{[-r,0]} = \varphi, \sup_{s\in[0,\mathbb{T}]} |u(s)-\varphi(0)| \le h \right\}$$

Ta định nghĩa hàm ψ như sau:

$$\psi(s) = \begin{cases} \varphi(s), & s \in [-r,0]; \\ \varphi(0), & s \in [0,\mathbb{T}]. \end{cases}$$

Ta thấy $\psi \in \mathscr{B}_h$. Tính lồi của $\mathscr{B}$ là dễ dàng kiểm tra. Ta kiểm tra tính đóng của $\mathscr{B}_h$, giả sử dãy $\{u_n\}_{n=1,2,...} \subset \mathscr{B}_h$ với $u_n \to u$. Ta có

$$\begin{aligned} \sup_{s\in[0,\mathbb{T}]} |u(s)-\varphi(0)| &\le \sup_{s\in[0,\mathbb{T}]} |u(s)-u_n(s)| + \sup_{s\in[0,\mathbb{T}]} |u_n(s)-\varphi(0)| \\ &\le \sup_{s\in[-r,\mathbb{T}]} |u(s)-\varphi(0)| + h \\ &\le \|u_n - u\| + h \to h. \end{aligned}$$

Điều này cho $u \in \mathscr{B}_h$. Vậy $\mathscr{B}_h$ là một tập lồi và đóng của $C([-r,\mathbb{T}],\mathbb{E})$.

Bây giờ ta chọn h để có được $\mathcal{T}(\mathscr{B}_h) \subset \mathscr{B}_h$. Với $u \in \mathscr{B}_h$, rõ ràng $\mathcal{T}u|_{[-r,0]=\varphi}$ và có đánh giá

$$\begin{aligned} |\mathcal{T}u(s) - \varphi(0)| &= \left| \int_0^t f(s,u_s)ds \right| \\ &\le \int_0^t |f(s,u_s)|ds \\ &\le \|b\|_{L^1((0,T),\mathbb{R}_+)}\mathbb{T}. \end{aligned}$$

Như vậy ta có thể $h > \|b\|_{L^1((0,T),\mathbb{R}_+)}\mathbb{T}$. Khi đó $\mathcal{T}(\mathscr{B}_h) \subset \mathscr{B}_h$. Áp dụng định lý điểm bất động Schauder ta có điều phải chứng minh. □

Định lý 3.4. *Giả f thỏa điều kiện* (i) *của giả thiết* (H1) *cùng với giả thiết* (H2). *Khi đó bài toán* (1.3)-(1.4) *có nghiệm duy nhất.*

Chứng minh. Ta sử dụng lại các tập $\mathscr{B}_h$ và toán tử $\mathcal{T}$ như định nghĩa trong chứng minh của Định lý 3.3. Với $h > 0$ thỏa $h > \|b\|_{L^1((0,T),\mathbb{R}_+)}\mathbb{T}$ ta có được $\mathcal{T}(\mathscr{B}_h) \subset \mathscr{B}_h$. Ta định nghĩa $\mathcal{T}^1 = \mathcal{T}$ (ánh xạ đồng nhất) và $\mathcal{T}^n = \mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{n-1}$ với $n = 2, 3, ...$

Với $t \in (0,T]$, bằng quy nạp theo n ta chứng minh mệnh đề sau:

$$|\mathcal{T}^n x(t) - \mathcal{T}^n y(t)| \le \frac{(Lt)^n}{n!}\|x-y\|, \ \forall x,y \in \mathscr{B}_h. \tag{3.1}$$

http://doi.org.xxxxxxxxxxx

Thật vậy, dễ dàng thấy (3.1) đúng với $n = 1$. Giả sử khẳng định đúng cho $n = k$. Trước hết ta nhận xét $|\mathcal{T}x(s) - \mathcal{T}y(s)| = 0$ nếu $s \in [-r, 0]$ và $\mathcal{T}x(s) - \mathcal{T}y(s) = \int_0^t (f(\xi, x_\xi) - f(\xi, y_\xi))d\xi$ nếu $t > 0$. Do đó

$$|\mathcal{T}x(s) - \mathcal{T}y(s)| \leq \|\mathcal{T}x - \mathcal{T}y\|_{C([0,s],\mathbb{E})} \ \forall s > 0 \ \text{ và}$$
$$\|x_s - y_s\|_r \leq \|x - y\|_{C([0,s],\mathbb{E})}.$$

Với $s < t$ cùng với giả thiết quy nạp, ta đánh giá

$$\begin{aligned}\|(\mathcal{T}^k x)_s - (\mathcal{T}^k y)_s\|_r &= \sup_{\theta\in[-r,0]} |\mathcal{T}^k x(s+\theta) - \mathcal{T}^k y(s+\theta)| \\ &= \sup_{\theta\in[s-r,s]} |\mathcal{T}^k x(\theta) - \mathcal{T}^k y(\theta)| \\ &\leq \frac{L^k}{k!}\|x - y\|t^k. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Bây giờ, chứng minh (3.1) đúng với $n = k + 1$. Thật vậy, với bất đẳng thức (3.2) ta có

$$\begin{aligned}|\mathcal{T}^{k+1}x(t) - T^{k+1}y(t)| &\leq \int_0^t \left| f(s, (\mathcal{T}^k x)_s) - (\mathcal{T}^k y)_s \right| ds \\ &\leq L\int_0^t \|(\mathcal{T}^k x)_s - (\mathcal{T}^k y)_s\|_r ds \\ &\leq \frac{(Lt)^{k+1}}{k!}.\end{aligned}$$

Như vậy (3.1) đúng với mọi $t \in (0, \mathbb{T}]$ và nó cũng có

$$\|\mathcal{T}^n x - \mathcal{T}^n y\| \leq \gamma_n \|x - y\| \text{ với mọi } x, y \in \mathscr{B}_h,$$

ở đây $\gamma_n = \frac{(\mathbb{T}L)^n}{n!} \to 0$ (vì chuỗi $\sum \gamma_n$ hội tụ). Theo định lý điểm bất động Banach ta kết thúc chứng minh định lý. □

3.2. Sự tồn tại nghiệm của hệ phương trình

Trong mục này, ta sẽ cho thấy bài toán (1.1)-(1.2) hoàn tòa có thể giải quyết bởi mô hình (1.3)-(1.4).

Ta ký hiệu $\mathbb{E} = \{\xi = \{\xi_j\}_{j\in\mathbb{N}} : \lim_{j\to\infty} \xi_j = 0\}$. $\mathbb{E}$ là không gian Banach với chuẩn

$$|\xi| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\xi_n|, \ \ \xi \in \mathbb{E}.$$

Với $j \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ...,)$, với $x_j \in C([-r, \mathbb{T}], \mathbb{R})$, ta định nghĩa $\mathbf{x}(s) = (x_1(s), x_2(s), ...)$, như vậy $\mathbf{x} \in C([-r, \mathbb{T}], \mathbb{E})$ và $\mathbf{x}_t \in C([-r, 0], \mathbb{E})$ với $\mathbf{x}_t(\theta) = (x_1(t + \theta), x_2(t + \theta), ...)$ với $\theta \in [-r, 0]$.

Ta định nghĩa $f_j : (0, \infty) \times C([-r, 0], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, với $j = 1, 2, ...$ và

$$f(t, \mathbf{x}_t) = (f_1(t, (x_1)_t), f_2(t, (x_2)_t), ...)\,, \ \ (t, \mathbf{x}) \in [-r, \mathbb{T}] \times C([-r, \mathbb{T}], \mathbb{E}).$$

Khi đó bài toán (1.3)-(1.3) tương đương với bài toán (1.3)-(1.4).

http://doi.org/10.37550/tdmu.VJS/2024.02.538

3.3. Minh họa

Ví dụ 3.5. Cho $r > 0$ và $\mathbb{T} > 0$. Xét hệ sau

$$\frac{\partial u_n}{\partial t}(t,x) = \frac{x_n^2(t-r)}{nt^{\frac{1}{3}}}, \quad t \in (0,\mathbb{T}], x \in \Omega, \tag{3.3}$$

$$u_n(\gamma,x) = \frac{\gamma}{n}, \ \gamma \in [-r,0], x \in \Omega, n = 1,2,... \tag{3.4}$$

Ta định nghĩa $\varphi[-r,0] \to \mathbb{E}$, với $\varphi(\gamma) = \left(\frac{\gamma}{1}, \frac{\gamma}{2}, ...\right)$,

$$f_n(t,v) = \frac{v^2(-r)}{nt^{\frac{1}{3}}} \quad v \in C([-r,0],\mathbb{R}).$$

Khi đó, dễ thấy điều kiện (i), (ii) của giả thiết (H1) được thỏa. Với $T > 0$, $\mathbf{w} \in C([-r,0],\mathbb{E})$, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, ...)$ với $\|\mathbf{w}\|_r \leq T$ ta có

$$\begin{aligned} |w_j(-r)| &\leq \sup_{n\geq 1} |w_n(\theta)| \\ &\leq \sup_{\theta\in[-r,0]} \left(\sup_{n\geq 1} |w_n(\theta)|\right) \\ &= \sup_{\theta\in[-r,0]} |\mathbf{w}(\theta)| \\ &= \|\mathbf{w}\|_r \leq T \quad \text{với mọi } j = 1,2,.... \end{aligned} \tag{3.5}$$

Suy ra

$$\begin{aligned} |f(t,\mathbf{w})| &\leq \sup_{j\geq 1} |f_j(t,w_j)| \\ &\leq \frac{T^2}{t^{\frac{1}{3}}} \equiv b(t). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Vậy điều kiện (iii) của (H1) được thỏa. Vậy ta có giả thiết (H1) và hệ (3.3)-(3.4) có nghiệm theo Định lý 3.3.

Ví dụ 3.6. Cho $r > 0$, $\mathbb{T} > 0$ và $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ là hàm thỏa điều kiện Lipschitz với hệ số L. Xét hệ sau n phương trình

$$\frac{\partial u_j}{\partial t}(t) = \frac{\Phi(u_j(t-r))}{1+jt^{\frac{1}{3}}}, \quad t \in (0,\mathbb{T}], \tag{3.7}$$

$$u_j(\gamma,x) = \frac{\gamma}{n}, \ \gamma \in [-r,0], j = 1,2,...,n. \tag{3.8}$$

Ta định nghĩa các không gian $\mathbb{E} = \{\xi = (\xi_1, ..., \xi_n) \in \mathbb{R}^n : \max_{1\leq j\leq n} |\xi_j| < \infty\}$ với chuẩn $|\xi| = \max_{1\leq j\leq n} |\xi_j|$, $\mathcal{C} = C([-r,0],\mathbb{E})$, $\mathcal{C}_j = C([-r,0],\mathbb{R})$. Giả sử $\mathbf{x} = (x_1,...,x_n) \in C([-r,\mathbb{T}],\mathbb{E})$, với $x_j \in C([-r,\mathbb{T}],\mathbb{R})$, $\mathbf{x}(s) = (x_1(s),...,x_n(s))$. Ta định nghĩa hàm $f : (0,\infty) \times \mathcal{C} \to \mathbb{E}$ với $f = (f_1,...,f_n)$, trong đó $f_j : (0,\infty) \times \mathcal{C}_j$ định bởi

$$f_j(t,w) = \frac{\Phi(w(-r))}{1+jt^{\frac{1}{3}}}, \ j = 1,...,n. \tag{3.9}$$

Ta kiểm tra điều kiện Lipschitz của hàm f. Giả sử $\mathbf{v} = (v_1, ..., v_n), \mathbf{w} = (w_1, ..., w_n) \in \mathcal{C}$. Ta có

$$\begin{aligned}|f_j(t, v_j) - f_j(t, w_j)| &= \frac{|\Phi(v_j(-r)) - \Phi(w_j(-r))|}{1 + jt^{1/3}} \\ &\leq L|v_j(-r) - w_j(-r)| \\ &\leq L|\mathbf{v}(-r) - \mathbf{w}(-r)| \\ &\leq L\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_r \quad \text{với mọi } j = 1, ..., n, t \geq 0. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Suy ra $|f(t, \mathbf{v}) - f(t, \mathbf{w})| \leq L\|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|_r$. Vậy giả thiết (H2) được thỏa. Hệ phương trình (3.7)-(3.8) có nghiệm duy nhất sử dụng Định lý 3.4.

4. Kết luận

Sự lựa chọn không gian hàm thích hợp cho việc giải quyết một hệ vô hạn các phương trình làm cho bài toán trở nên đơn giản hơn được quan tâm và giải quyết trong bài viết này. Chúng tôi đã sử dụng mối liên hệ giữa hai loại tích phân Lebesgue và Bochner để thực hiện điều này, các điều kiện đặt ra là phù hợp và có trình bày ví dụ minh họa cho việc áp dụng. Ngoài ra, mô hình bài toán còn có thể phát triển cho các dạng phương trình tích phân có bậc cao hơn hay bậc không nguyên với điều kiện phi địa phương.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Y.L. Chang , J.S. Chen, Convexity of symmetric cone trace functions in Euclidean Jordan algebras. Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 14 (1) (2013), 53-61.

[2] F. Jarada, T. Abdeljawadb, D. Baleanu, On the generalized fractional derivatives and their Caputo modification. J. Nonlinear Sci. Appl., 10 (2017), 2607–2619.

[3] A.A. Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo, Theory and Applications of Fractional Differential Equations. Elsevier, Amsterdam (2006)

[4] T.B.Ngoc, V.V. Tri, Global existence and continuous dependence on parameters for space-time fractional pseudo-parabolic inclusion, Journal of Nonlinear and Convex Analysis, 23(7), 1469–1485 (2022).

[5] T. Roubicek, Nonlinear partial differential equations with applicaltions, Birkhauser Verlag Basel-Boston-Berlin (2011)

[6] K. Diethelm, N.J. Ford, Analysis of fractional differential equations, J. Math. Anal. Appl., 265(2), 229–248 (2002)