VỀ VAI TRÒ PHƯƠNG PHÁP LUẬN CỦA PHÉP BIỆN CHỨNG DUY VẬT TRONG NHẬN THỨC TOÁN HỌC THÔNG QUA NGUYÊN LÝ PHÁT TRIỂN VÀ NGUYÊN LÝ VỀ MỐI LIÊN HỆ PHỔ BIẾN

Vũ Xuân Cảnh[1*], Vũ Đức Bộ[1], Vũ Thị Thảo[1], Hà Thị Thuỳ Trang[1], Phan Thị Phương Trinh[1], Nguyễn Thị Bảo Trang[1], Bùi Thị Hương Giang[1]

[1]Học viện Kỹ thuật Quân sự

**Tác giả liên hệ: phuminh09@gmail.com*

TÓM TẮT

Nguyên lí về mối liên hệ phổ biến là nguyên tắc lí luận xem xét sự vật, hiện tượng khách quan tồn tại trong mối liên hệ, ràng buộc lẫn nhau. Nguyên lí về mối liên hệ phổ biến đòi hỏi chúng ta phải có một quan điểm toàn diện khi nghiên cứu toán học. Khi giải một bài toán hình học, phải nhìn một điểm, một đường thẳng trong mối liên hệ với các điểm, đường thẳng khác trong sự thống nhất với cả hình vẽ. Khi xét một bài toán có thể dùng tất cả các phương pháp của đại số, hình học, lượng giác... Nguyên lí về sự phát triển cho chúng ta thấy rằng sự phát triển một lí thuyết toán học hay cả lĩnh vực toán học nói chung là một tiến trình khách quan, không phụ thuộc ý muốn cá nhân nào. Đó là quá trình giải quyết những mâu thuẫn nảy sinh trong bản thân nội bộ toán học và giải quyết những nhu cầu của thực tiễn. Nguyên lí về sự phát triển biểu hiện thông qua ba qui luật cơ bản của triết học duy vật biện chứng.

Từ khóa: *phép biện chứng duy vật; hai nguên lý; nhận thức toán học.*

ON THE METHODOLOGICAL ROLE OF MATERIALIST DIALECTICS IN MATHEMATICAL COGNITION THROUGH THE PRINCIPLE OF DEVELOPMENT AND THE PRINCIPLE OF UNIVERSAL INTERCONNECTION

ABSTRACT

The principle of universal interconnection is a theoretical principle that considers objects and phenomena in objective reality as existing in mutual relationships and interactions. This principle requires a comprehensive perspective in the study of mathematics. When solving a geometry problem, a point or a line should be considered in relation to other points and lines, as well as in connection with the entire geometric figure. Similarly, when examining a mathematical problem, various methods from algebra, geometry, trigonometry, and other mathematical fields may be applied. The principle of development shows that the evolution of a mathematical theory, as well as mathematics as a whole, is an objective process that does not depend on any individual’s will. It is a process that resolves contradictions arising within mathematics itself and addresses the practical needs of reality. The principle of development is manifested through the three fundamental laws of dialectical materialist philosophy.

Keywords: *Materialist dialectics; two principles; mathematical cognition.*

Ngày nhận bài: 20/11/2025 Ngày nhận bài sửa: 30/11/2025 Ngày duyệt đăng bài: 09/12/2025

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Toán học là một trong những lĩnh vực khoa học cơ bản có vai trò đặc biệt quan trọng trong sự phát triển của khoa học – công nghệ và đời sống xã hội. Không chỉ cung cấp các công cụ tính toán và mô hình hóa, toán học còn giúp con người rèn luyện tư duy logic, khả năng phân tích và phương pháp nhận thức khoa học. Tuy nhiên, quá trình nhận thức toán học không phải là một quá trình tĩnh tại mà luôn vận động, phát triển và gắn bó chặt chẽ với nhiều lĩnh vực tri thức khác. Điều này cho thấy việc tiếp cận toán học không chỉ đơn thuần dựa trên kỹ thuật hay công thức mà còn cần một nền tảng phương pháp luận khoa học. Trong triết học Mác – Lênin, phép biện chứng duy vật được xem là phương pháp luận khoa học chung cho việc nhận thức và cải tạo thế giới. Hai nguyên lý cơ bản của phép biện chứng duy vật là nguyên lý về mối liên hệ phổ biến và nguyên lý về sự phát triển. Nguyên lý về mối liên hệ phổ biến khẳng định rằng mọi sự vật, hiện tượng trong thế giới đều tồn tại trong những mối quan hệ ràng buộc và tác động lẫn nhau. Trong khi đó, nguyên lý về sự phát triển chỉ ra rằng mọi sự vật, hiện tượng luôn vận động, biến đổi và phát triển theo những quy luật khách quan. Khi vận dụng vào lĩnh vực toán học, hai nguyên lý này giúp làm sáng tỏ bản chất của quá trình hình thành và phát triển tri thức toán học. Các khái niệm, định lý hay phương pháp trong toán học không tồn tại riêng lẻ mà luôn có mối liên hệ chặt chẽ với nhau, đồng thời phát triển qua từng giai đoạn lịch sử nhận thức của con người. Việc nhìn nhận toán học dưới góc độ biện chứng giúp người học hiểu rõ hơn sự hình thành của tri thức, thấy được tính hệ thống và tính phát triển của các cấu trúc toán học, từ đó nâng cao hiệu quả học tập và nghiên cứu. Xuất phát từ ý nghĩa đó, việc nghiên cứu vai trò phương pháp luận của phép biện chứng duy vật trong nhận thức toán học thông qua nguyên lý phát triển và nguyên lý về mối liên hệ phổ biến không chỉ có giá trị về mặt lý luận mà còn có ý nghĩa thực tiễn trong việc định hướng phương pháp học tập và giảng dạy toán học một cách khoa học và toàn diện.

2. NỘI DUNG

Phép biện chứng duy vật là khoa học về các qui luật chung nhất về sự phát triển của thế giới vật chất, đồng thời là lí luận nhận thức và lôgic học. Các qui luật nhận thức và các hình thức tư duy không tách rời lí luận về các qui luật và các hình thức vận động của tồn tại. Phép biện chứng duy vật được xây dựng trên cơ sở một hệ thống những nguyên lí, những phạm trù cơ bản, những qui luật phổ biến phản ánh đúng đắn hiện thực khách quan. Phép biện chứng duy vật do C.Mác và Ph.Ăng-ghen xây dựng trên cơ sở kế thừa có phê phán hạt nhân hợp lí trong phép biện chứng của Hêghen, là phép biện chứng dựa trên nền tảng của chủ nghĩa duy vật, xuất phát từ biện chứng khách quan của tự nhiên và xã hội, là phương pháp luận phổ biến trong các ngành khoa học cụ thể. Xét từ góc độ kết cấu nội dung, phép biện chứng duy vật của chủ nghĩa Mác-Lênin có hai đặc trưng cơ bản sau:

Một là, phép biện chứng duy vật của chủ nghĩa Mác-Lênin là phép biện chứng được xác lập trên nền tảng của thế giới quan duy vật khoa học. Với đặc trưng này phép biện chứng duy vật của chủ nghĩa Mác-Lênin chẳng những có sự khác biệt căn bản với phép biện chứng duy tâm của G.Hêghen mà còn có sự khác biệt về trình độ so với phép biện chứng duy vật cổ đại.

Hai là, trong phép biện chứng duy vật của chủ nghĩa Mác-Lênin có sự thống nhất giữa nội dung của thế giới quan (duy vật biện chứng) với phương pháp luận (biện chứng duy vật) do đó, nó không dừng lại ở sự giải thích thế giới mà còn là công cụ để nhận thức thế giới và cải tạo thế giới. Với những đặc trưng cơ bản trên, phép biện chứng duy vật giữ vai trò là nội dung đặc biệt quan trọng trong thế giới quan và phương pháp luận triết học, tạo nên tính khoa học và tính cách mạng của chủ nghĩa Mác-Lênin, đồng thời nó cũng là thế giới quan và phương pháp luận chung nhất của hoạt động sáng tạo trong các lĩnh vực nghiên cứu khoa học.

Phép biện chứng duy vật được xây dựng trên cơ sở một hệ thống những nguyên lí, những phạm trù cơ bản, những qui luật phổ biến phản ánh hiện thực khách quan, được đề cập ở các phần tiếp theo của luận án.

Hai nguyên lí của triết học duy vật biện chứng là hai nguyên lí cơ bản và đóng vai trò xương sống trong phép biện chứng duy vật của triết học Mác-Lênin khi xem xét, kiến giải sự vật, hiện tượng. Hai nguyên lí cơ bản gồm: Nguyên lí về mối liên hệ phổ biến và Nguyên lí về sự phát triển.

2.1. Nguyên lí về mối liên hệ phổ biến

Nguyên tắc lí luận xem xét sự vật, hiện tượng khách quan tồn tại trong mối liên hệ, ràng buộc lẫn nhau tác động, ảnh hưởng lẫn nhau giữa các sự vật, hiện tượng hay giữa các mặt của một sự vật, của một hiện tượng trong thế giới. Nguyên lí này biểu hiện thông qua sáu cặp phạm trù cơ bản. Liên hệ phổ biến là khái niệm nói lên rằng mọi sự vật, hiện tượng trong thế giới (cả tự nhiên, xã hội và td) dù đa dạng phong phú, nhưng đều nằm trong mối liên hệ với các sự vật, hiện tượng khác; đều chịu sự chi phối, tác động, ảnh hưởng của các sự vật, hiện tượng khác. Cơ sở của mối liên hệ phổ biến là tính thống nhất vật chất của thế giới.

Ví dụ 1.1: Với mỗi khối đa diện (H) trong mặt phẳng, kí hiệu Đ là số đỉnh, C là số cạnh, M là số mặt của đa giác. Khi đó số (H) = Đ – C + M, gọi là đặc số của khối đa diện (H). Đây là một thể hiện của nguyên lí về mối liên hệ phổ biến trong hợp các khối đa diện. Đặc biệt, đối với khối đa diện lồi còn được thể hiện bởi một đặc trưng khác là: Mọi khối đa diện lồi đều có đặc số bằng 2 (Định lí Ơle): Đ – C + M = 2 (Đoàn Quỳnh & cộng sự, 2007). Nguyên lí về mối liên hệ phổ biến là cơ sở lí luận của quan điểm toàn diện trong nhận thức và hoạt động thực tiễn. Quan điểm toàn diện đòi hỏi:

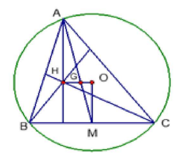
+ Khi nhận thức sự vật phải nhận thức trong mối liên hệ với các sự vật, hiện tượng khác; trong mối liên hệ giữa các mặt, các yếu tố của bản thân sự vật đó.

+ Để cải tạo sự vật trên thực tế phải sử dụng đồng bộ nhiều giải pháp.

+ Phải biết phân loại đúng các mối liên hệ, trên cơ sở đó nhận thức đúng và giải quyết để thúc đẩy sự vật tiến lên.

+ Chống lại quan điểm chiết trung-lắp ghép một cách máy móc vô nguyên tắc những cái trái ngược nhau vào làm một; chống lại ngụy biện-một kiểu đánh tráo các mối liên hệ một cách có ý thức, có chủ định (Vũ Trọng Dung & Lê Doãn Tá, 2009).

Ví dụ 1.2: Gọi G, H, O lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔABC. Chứng minh: G, H, O thẳng hàng (Định lí Ơle) (Đoàn Quỳnh & cộng sự, 2006)



Hình 1.1. Hình bài toán ví dụ 1.2

Nguồn: Tác giả tổng hợp

Giải: HS đã lí luận như sau (xem Hình 1.1): Gọi M là trung điểm BC $\Rightarrow$ OM $\perp$ BC $\Rightarrow$ OM//AH và $G \in AM$. Ta có: $HAG = OMG$; $AHG = MOG$ (so le trong) $\Rightarrow$ ΔAGH đồng dạng $\Delta MGO \Rightarrow AGH = MGO$ và đối đỉnh $\Rightarrow$ H, G, O thẳng hàng. *Nhận xét:* Trong cách làm trên, HS đã ngộ nhận: $AHG = MOG$, tuy nhiên điều này chỉ có khi H, G, O thẳng hàng. Đây cũng chính là một sai lầm HS thường gặp trong quá trình giải toán. Ta xét một cách giải đúng bằng PP vectơ: Gọi A' là điểm đối tâm của A thì HBA'C là hình bình hành, M là trung điểm HA' $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AH} = 2\overrightarrow{OM}$. Mặt khác: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AH}$. Do đó: $3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} \Rightarrow$ O, G, H thẳng hàng.

Theo chủ nghĩa Mác-Lênin thì các sự vật hiện tượng trong thế giới chỉ biểu hiện sự tồn tại của mình thông qua sự vận động, sự tác động qua lại lẫn nhau. Nguyên lí này được dựa trên một khẳng định trước đó của triết học Mác-Lênin là khẳng định tính thống nhất vật chất của thế giới là cơ sở của mối liên hệ giữa các sự vật và hiện tượng. Các sự vật, hiện tượng tạo thành thế giới dù có đa dạng, phong phú, có khác nhau bao nhiêu, song chúng đều chỉ là những dạng khác nhau của một thế giới duy nhất, thống nhất- thế giới vật chất (Triết học Mac-Lenin, 1994). Nguyên lí về mối liên hệ phổ biến giúp cho các nhà toán học thấy rõ mối liên hệ, tác động qua lại của tất cả các khái niệm, định lí, công thức toán học. Chúng không tồn tại một cách độc lập mà liên hệ chặt chẽ, thống nhất, bổ sung cho nhau. Nhìn ở một khía cạnh nhỏ nào đó, như việc định nghĩa một khái niệm, chứng minh một định lí đều phải dựa trên các khái niệm, định lí đã có từ trước; giải một bài toán hình học đôi khi cũng cần phải sử dụng các phép tính của đại số, lượng giác…toán học càng phát triển, tất cả các chuyên ngành của toán học càng gắn bó khăng khít, liên thông với nhau đến mức thật khó phân biệt ranh giới giữa chúng.

Nguyên lí về mối liên hệ phổ biến đòi hỏi chúng ta phải có một quan điểm toàn diện khi nghiên cứu toán học. Khi giải một bài toán hình học, phải nhìn một điểm, một đường thẳng trong mối liên hệ với các điểm, đường thẳng khác trong sự thống nhất với cả hình vẽ. Khi xét một bài toán có thể dùng tất cả các phương pháp của đại số, hình học, lượng giác... trong mối liên hệ thống nhất để tìm ra lời giải tổng hợp.

Ví dụ 1.3: Cho điểm M(x;y) trên elip (E): $36x^2+16y^2=9$. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức P=y-2x+5.

Giải: Trên quan điểm toàn diện, dẫn dắt HS nhận ra các hướng giải sau:

Cách 1: PP vectơ: Phương trình (E) $\Leftrightarrow$ $\sqrt{(6x)^2+(4y)^2}=3$, gợi ý đến công thức: $|\vec{u}.\vec{v}|=||\vec{u}|.|\vec{v}|.\cos(\vec{u},\vec{v})|\le|\vec{u}|.|\vec{v}|$. Xét $\vec{u}=(6x;4y)$ và $\vec{v}=(-\frac{1}{3};\frac{1}{4})$, ta có:

$$|(6x)\left(-\frac{1}{3}\right)+(4y)(\frac{1}{4})|\le\sqrt{36x^2+16y^2}.\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{16}}\Leftrightarrow|y-2x|\le\frac{5}{4}\Rightarrow\frac{15}{4}\le P\le\frac{25}{4}$$

Do đó: $\text{Min } P=\frac{15}{4}$ khi $x=\frac{2}{5},y=\frac{-9}{20}$; $\text{Max } P=\frac{25}{4}$ khi $x=\frac{-2}{5},y=\frac{9}{20}$

Cách 2: Dùng PP bất đẳng thức: Phương trình (E) được viết về dạng: $(6x)^2+(4y)^2=9$. Dùng bất đẳng thức Bunhiacôpski ta có:

$$9.\frac{25}{144}=\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2\right].\left[(6x)^2+(4y)^2\right]\ge(y-2x)^2\Rightarrow\frac{15}{4}\le P\le\frac{25}{4}$$

Cách 3: PP miền giá trị.

Từ hệ: $\begin{cases}36x^2+16y^2=9\\P=y-2x+5\end{cases}$ phải có nghiệm $\Rightarrow\frac{15}{4}\le P\le\frac{25}{4}$

Cách 4: PP lượng giác: Phương trình (E) $\Leftrightarrow (2x)^2+\left(\frac{4}{3}y\right)^2=1\Rightarrow\exists\alpha\in[0,2\pi]$ sao cho: $2x=\sin\alpha$; $\frac{4}{3}y=\cos\alpha$, và ta được: $3\cos\alpha-4\sin\alpha=4P-5$. Phương trình này có nghiệm

$$\Leftrightarrow(4P-5)^2\le3^2+(-4)^2\Rightarrow\frac{15}{4}\le P\le\frac{25}{4}$$

Cách 5: PP HH tổng hợp: P = y - 2x + 5 là họ đường thẳng y = 2x + P - 5 cùng phương với đường thẳng (d): y = 2x. Do đó, trước hết ta xét các tiếp tuyến với (E) có phương (d), đó là $y=2x\pm\frac{5}{4}$. Ta cũng tìm được: $\frac{15}{4}\le P\le\frac{25}{4}$.

Nhận xét: Đây là một bài toán thường gặp và phong phú về phương pháp. Sẽ còn nhiều lời giải khác, nếu ta tiếp tục suy nghĩ (như dùng hàm số, bất đẳng thức khác). Điều đó cho thấy, sau khi đã giải được bài toán bằng một cách nào đó, nên nhìn nhận bài toán trên quan điểm toàn diện của triết học duy vật biện chứng, có thể tìm được nhiều lời giải.

Nguyên lí về mối liên hệ phổ biến biểu hiện thông qua sáu cặp phạm trù cơ bản sau:

(1) Cặp phạm trù Cái chung và cái riêng: Cái riêng là phạm trù chỉ một sự vật, một hiện tượng, một quá trình nhất định. Cái chung là phạm trù triết học dùng để chỉ những mặt, những thuộc tính không những có ở một kết cấu vật chất nhất định, mà còn được lặp lại trong nhiều sự vật, hiện tượng hay quá trình riêng lẻ khác nữa. Cái chung và cái riêng có mối quan hệ biện chứng, thể hiện ở chỗ: Cái chung chỉ tồn tại trong cái riêng, thông qua cái riêng mà biểu hiện sự tồn tại của mình. Cái riêng chỉ tồn tại trong mối liên hệ với cái chung. Cái riêng là cái toàn bộ, phong phú hơn cái chung, cái chung là cái bộ phận, nhưng sâu sắc hơn cái riêng.

Ví dụ 1.4: Hình thoi là "cái riêng" của hình bình hành nếu ta nhìn dưới góc độ các cạnh đối diện song song, hay của một tứ giác có đường tròn nội tiếp...Hoặc một tam giác là "cái chung" của tam giác vuông, tam giác cân, tam giác đều...

(2) Cặp phạm trù Nguyên nhân và kết quả: Nguyên nhân là phạm trù chỉ sự tác động lẫn nhau giữa các mặt trong một sự vật hoặc giữa các sự vật với nhau, gây ra một biến đổi nhất định nào đó. Còn kết quả là phạm trù chỉ những biến đổi xuất hiện do tác động lẫn nhau giữa các mặt trong một sự vật hoặc giữa các sự vật với nhau gây ra. Nguyên nhân sinh ra kết quả, xuất hiện trước kết quả.

Ví dụ 1.5: Từ nguyên nhân tứ giác ABCD có tổng hai góc đối diện bằng 1800 dẫn đến kết quả là nó nội tiếp được đường tròn.

(3) Cặp phạm trù Tất nhiên và ngẫu nhiên: Tất nhiên là phạm trù chỉ cái do những nguyên nhân cơ bản bên trong của kết cấu vật chất quyết định và trong những điều kiện nhất định nó phải xảy ra như thế chứ không thể khác được. Ngẫu nhiên là phạm trù chỉ cái không do mối liên hệ bản chất, bên trong kết cấu vật chất, bên trong sự vật quyết định mà do các nhân tố bên ngoài, do sự kết hợp nhiều hoàn cảnh bên ngoài quyết định. Tất nhiên và ngẫu nhiên có mối quan hệ biện chứng là: Đều tồn tại khách quan, độc lập với ý thức của con người và đều có vị trí nhất định đối với sự phát triển của sự vật. Cái tất nhiên bao giờ cũng thể hiện sự tồn tại của mình thông qua vô số cái ngẫu nhiên. Còn cái ngẫu nhiên là hình thức biểu hiện của cái tất nhiên, đồng thời là cái bổ sung cho cái tất nhiên, chúng có thể chuyển hóa cho nhau. *Ví dụ 1.6:* Từ các hiện tượng: Cho đoạn thẳng AB, tồn tại duy nhất điểm G mà: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$; Cho ΔABC, tồn tại duy nhất điểm G mà: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$...liệu có phải là *ngẫu nhiên*, hay thể hiện một qui luật thống nhất, tức là cái *tất nhiên?* Điều này đã được kiểm nghiệm: Cho n điểm $A_1, A_2,...,A_n$, tồn tại duy nhất điểm G mà: $\overrightarrow{GA_1}+\overrightarrow{GA_2}+...+\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$, $n \geq 2$.

(4) Cặp phạm trù Nội dung và hình thức: Nội dung là phạm trù chỉ tổng hợp tất cả những mặt, những yếu tố, những quá trình tạo nên sự vật. Hình thức là phạm trù chỉ phương thức tồn tại và phát triển của sự vật, là hệ thống các mối liên hệ tương đối bền vững giữa các yếu tố của sự vật đó. Nội dung và hình thức có sự thống nhất biện chứng, chúng không tồn tại tách rời nhau, nhưng không phải vì thế mà lúc nào nội dung và hình thức cũng phù hợp với nhau. Ví dụ 1.7: Nội dung của hình học sơ cấp có thể diễn tả bằng "hình" hoặc bằng "số" hay hình giải tích. Mỗi hình thức đó có chỗ hay, chỗ dở của nó: Dùng hình thì trực quan, huy động được trí tưởng tượng nhưng có tính khái quát thấp, có khi phải xét nhiều trường hợp. Dùng số thì không trực quan, nhưng khi đạt được phương trình rồi thì có tính khái quát cao.

(5) Cặp phạm trù Bản chất và hiện tượng: Bản chất là phạm trù chỉ sự tổng hợp tất cả những mặt, những mối liên hệ tất nhiên, tương đối ổn định bên trong sự vật, qui định sự vận động và phát triển của sự vật. Hiện tượng là phạm trù chỉ sự biểu hiện ra "bên ngoài" của

bản chất. Bản chất và hiện tượng có quan hệ biện chứng vừa thống nhất gắn bó chặt chẽ với nhau, vừa mâu thuẫn đối lập nhau.

Ví dụ 1.8: Bản chất của phép biến đổi tuyến tính:

i) $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$; ii) $k(l\vec{u}) = l(k\vec{u})$

cũng là bản chất của phép biến đổi afin, nhưng các phép biến hình afin được thể hiện dưới nhiều hình thức như phép tịnh tiến, phép đối xứng tâm, phép đối xứng trục, phép quay... (Nguyễn Cảnh Toàn, 2005).

(6) Cặp phạm trù Khả năng và hiện thực: Hiện thực là phạm trù chỉ những cái đang tồn tại trên thực tế. Khả năng là phạm trù chỉ cái chưa xuất hiện, chưa tồn tại trên thực tế, nhưng sẽ xuất hiện, sẽ tồn tại thực sự khi có các điều kiện tương ứng. Khả năng và hiện thực tồn tại trong mối quan hệ chặt chẽ với nhau, không tách rời nhau, thường xuyên chuyển hóa lẫn nhau trong quá trình phát triển của sự vật.

Ví dụ 1.9: Khi dạy học các hệ thức lượng cơ bản trong lượng giác. Dùng máy tính cầm tay cho HS kiểm tra kết quả: $\sin^2 30^0 + \cos^2 30^0$, $\sin^2 40^0 + \cos^2 40^0$...đều cho kết quả bằng 1 là một *hiện thực*. Vậy liệu có phải *khả năng* $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ là một *hiện thực* ?

2.2. Nguyên lí về sự phát triển

Nguyên tắc lí luận mà trong trong đó khi xem xét sự vật, hiện tượng khách quan phải đặt chúng vào quá trình luôn luôn vận động và phát triển (vận động tiến lên từ thấp đến cao, từ đơn giản đến phức tạp, từ kém hoàn thiện đến hoàn thiện hơn của sự vật).

Theo triết học duy vật biện chứng, phát triển là một phạm trù triết học chỉ khái quát quá trình vận động tiến lên từ thấp lên cao, từ kém hoàn thiện đến hoàn thiện hơn của sự vật. Nguồn gốc của sự phát triển nằm ngay trong bản thân sự vật. Đó là mâu thuẫn trong bản thân sự vật. Quá trình giải quyết liên tục những mâu thuẫn đó qui định sự vận động, phát triển của sự vật.

Ví dụ 1.10: Sự phát triển hệ thống số: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$. Số tự nhiên xuất hiện từ rất sớm trong xã hội loài người, xuất phát từ nhu cầu đếm số lượng sản phẩm thu được. Các tập hợp số sau này xuất hiện cũng do nhu cầu thực tế mà nảy sinh. Ở đây ta chỉ xét mâu thuẫn phát sinh trong nội bộ toán học, đó là sự có nghiệm của một phương trình đa thức.

Trên $N = \{0,1,2,..\}$: Phương trình $2x - 4 = 0$ có nghiệm $x = 2 \in N$. Nhưng phương trình $2x + 4 = 0$ không có nghiệm trên N. Để giải quyết mâu thuẫn này (từ thực tiễn), dẫn đến sự mở rộng tập N thành tập $Z = \{...-2,-1,0,1,2,..\}$, khi đó phương trình có nghiệm $x = -2 \in Z$. Trên Z phương trình $2x - 3 = 0$ không có nghiệm, dẫn đến sự mở rộng thành tập $Q = \{\frac{p}{q}, p \in Z, q \in N^*\}$, khi đó phương trình có nghiệm $x = \frac{3}{2} \in Q$. Trên Q, phương trình $x^2 - 2 = 0$ không có nghiệm, dẫn đến sự mở rộng tập Q thành tập số thực R, khi đó phương trình có nghiệm $x = \pm\sqrt{2}$. Trong phần hàm số mũ và lôgarit, HS đã được thừa nhận: "Mỗi số vô tỉ đều là giới hạn của một dãy số hữu tỉ". Sau khi mở rộng đến tập số vô tỉ, ta có các kết quả phép toán trên tập số thực. Sự mở rộng này được thể hiện trong quan hệ bao hàm: $N \subset Z \subset Q \subset R$. Cũng với cách giải quyết mâu thuẫn trong lí luận như vậy, ta mở rộng tập số thực thành tập số phức C bằng cách định nghĩa đơn vị ảo i mà $i^2 = -1$, khi đó phương trình: $x^2 + 1 = 0$ có nghiệm $x = \pm i$. Quá trình này được thể hiện trong quan hệ bao hàm: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$. Trong xã hội, phát triển thể hiện ở khả năng chinh phục tự nhiên, cải tạo xã hội phục vụ con người. Trong tư duy, phát triển thể hiện ở việc nhận thức vấn đề gì đó ngày càng đầy đủ, đúng đắn hơn. Triết học Mác-Lênin luôn coi trọng sự vận động và phát triển của sự vật, hiện tượng. Việc đặt sự vật, hiện tượng trong trạng thái luôn phát triển là một nguyên lí quan trọng của triết học Mác-Lênin. Nguyên lí về sự phát triển cho chúng ta thấy rằng sự phát triển một lí thuyết toán học hay cả lĩnh vực toán học nói chung là một tiến trình khách quan, không phụ thuộc ý muốn cá nhân nào. Đó là quá trình giải quyết những mâu thuẫn nảy sinh trong bản thân nội bộ toán học và giải quyết những nhu cầu của thực tiễn. Nguyên lí về sự phát triển biểu hiện thông qua ba qui luật cơ bản của triết học duy vật biện chứng.

Ba qui luật cơ bản của phép biện chứng duy vật trong triết học Mác- Lênin là các qui luật cơ bản trong phương pháp luận của triết học Mác-Lênin và được áp dụng để giải thích về sự phát triển của sự vật, hiện tượng, ba qui luật này hợp thành nguyên lí về sự phát triển. Ba qui luật cơ bản có ý nghĩa đặc biệt quan trọng trong phép duy vật biện chứng của triết học Mác-Lênin, nó là một trong những nền tảng, cơ bản cấu thành phép biện chứng duy vật cũng như một trong những nội dung quan trọng của toàn bộ triết học Mác-Lênin.

2.3. Qui luật chuyển hóa từ những sự thay đổi về lượng thành những sự thay đổi về chất và ngược lại

Qui luật này thể hiện: Mỗi sự vật, hiện tượng là một thể thống nhất bao gồm chất và lượng nhất định, trong đó chất tương đối ổn định còn lượng thường xuyên biến đổi. Sự biến đổi này tạo ra mâu thuẫn giữa lượng và chất. Lượng biến đổi đến một mức độ nhất định và trong những điều kiện nhất định thì lượng phá vỡ chất cũ, mâu thuẫn giữa lượng và chất được giải quyết, chất mới được hình thành với lượng mới, nhưng lượng mới lại biến đổi và phá vỡ chất đang kìm hãm nó. Quá trình tác động lẫn nhau giữa hai mặt chất và lượng tạo nên sự vận động liên tục, từ biến đổi dần dần đến nhảy vọt, rồi lại biến đổi dần để chuẩn bị cho bước nhảy vọt tiếp theo, tạo lên cách thức vận động, cơ chế phát triển của sự vật. Theo quan điểm của Triết học Mác-Lênin, bất cứ một sự vật, hiện tượng nào cũng bao gồm mặt chất và mặt lượng. Hai mặt đó thống nhất hữu cơ với nhau trong sự vật, hiện tượng. Trong thực tế lượng của sự vật thường được xác định bởi những đơn vị đo lượng cụ thể như: Độ dài đoạn thẳng AB=2cm, thể tích một khối tứ diện V=10m3, hay một tam giác là một hình có 3 góc, 3 cạnh..., bên cạnh đó có những lượng chỉ có thể biểu thị dưới dạng trừu tượng và khái quát như: Tập hợp các điểm trong mặt phẳng, một lớp các vectơ cùng phương, một chùm các đường tròn qua hai điểm phân biệt..., trong những trường hợp đó chúng ta chỉ có thể nhận thức được lượng của sự vật bằng con đường trừu tượng và khái quát hoá. Khi lượng biến đổi đến điểm nút thì diễn ra bước nhảy, chất mới ra đời thay thế cho chất cũ, sự vật mới ra đời thay thế cho sự vật cũ, nhưng rồi những lượng mới này tiếp tục biến đổi đến điểm nút mới lại xảy ra bước nhảy mới. Cứ như vậy, quá trình vận động, phát triển của sự vật diễn ra theo cách thức từ những thay đổi về lượng dẫn đến những thay đổi về chất một cách vô tận. Đó là quá trình thống nhất giữa tính tuần tự, tiệm tiến, liên tục với tính gián đoạn, nhảy vọt trong sự vận động, phát triển (Vũ Trọng Dung, & Lê Doãn Tá, 2009).

Tác động ngược: Sự thay đổi về chất tác động trở lại đối với sự thay đổi về lượng. Lượng thay đổi luôn luôn trong mối quan hệ với chất, chịu sự tác động của chất. Song sự tác động của chất đối với lượng rõ nét nhất khi xảy ra bước nhảy về chất, chất mới thay thế chất cũ, nó qui định qui mô và tốc độ phát triển của lượng mới trong một độ mới. Khi chất mới ra đời, nó không tồn tại một cách thụ động, mà có sự tác động trở lại đối với lượng, được biểu hiện ở chỗ: chất mới sẽ tạo ra một lượng mới phù hợp với nó để có sự thống nhất mới giữa chất và lượng. *Ví dụ 1.11:* Xét nguyên hàm hàm lũy thừa: $y = x^m$, $m \in Z$: $\int x^{m-1}dx = \frac{x^m}{m} + C$, $\forall m \neq 0$.

Khi m biến thiên (thay đổi về lượng) thì nguyên hàm đó giữ nguyên chất lượng là một hàm đại số $F(x) = \frac{x^m}{m} + C$, cho đến giới hạn m=0 thì chất lượng đó thay đổi, nguyên hàm trở thành một hàm số siêu việt: $F(x) = \ln|x| + C$ (Nguyễn Cảnh Toàn, 2005).

Qui luật chuyển hóa từ những sự thay đổi về lượng thành những sự thay đổi về chất và ngược lại cho ta thấy cơ chế của sự phát triển.

2.4. Qui luật thống nhất và đấu tranh giữa các mặt đối lập

Qui luật thống nhất và đấu tranh của các mặt đối lập (qui luật mâu thuẫn) là hạt nhân của phép biện chứng. Tất cả các sự vật, hiện tượng trên thế giới đều chứa đựng những mặt trái ngược nhau. Mặt đối lập là những mặt có những đặc điểm, những thuộc tính, những tính qui định có khuynh hướng biến đổi trái ngược nhau. Sự tồn tại các mặt đối lập là khách quan và là phổ biến trong tất cả các sự vật. Các mặt đối lập nằm trong sự liên hệ, tác động qua lại lẫn nhau tạo thành mâu thuẫn biện chứng. Mâu thuẫn biện chứng tồn tại một cách khách quan và phổ biến trong tự nhiên, xã hội và tư duy. Mâu thuẫn biện chứng trong tư duy là phản ánh mâu thuẫn trong hiện thực và là nguồn gốc phát triển của nhận thức. Các mặt đối lập vừa thống nhất với nhau lại vừa đấu tranh với nhau. Sự thống nhất của các mặt đối lập là sự nương tựa vào nhau, không tách rời nhau giữa các mặt đối lập, sự tồn tại của mặt này phải lấy sự tồn tại của mặt kia làm tiền đề (Vũ Trọng Dung, & Lê Doãn Tá, 2009).

Các mặt đối lập không chỉ thống nhất, mà còn luôn luôn "đấu tranh" với nhau. Đấu tranh của các mặt đối lập là sự tác động qua lại theo xu hướng bài trừ và phủ định lẫn nhau. Hình thức đấu tranh của các mặt đối lập hết sức phong phú, đa dạng, tùy thuộc vào tính chất, vào mối quan hệ qua lại giữa các mặt đối lập và tùy điều kiện cụ thể diễn ra cuộc đấu tranh giữa chúng. Thực tiễn cuộc sống là vô cùng đa dạng và đặt ra vô số vấn đề cần giải quyết mà những kiến thức toán học ở từng thời kì chưa cho phép giải quyết ngay được. Mâu thuẫn giữa lí luận toán học và thực tiễn cuộc sống là động lực thúc đẩy toán học phát triển để đáp ứng nhu cầu của cuộc sống. Trong một số trường hợp, động lực thúc đẩy cho lí luận toán học phát triển là mâu thuẫn trong nội bộ lí luận.

Sự ra đời của hình học Lôbasepxki xuất phát từ băn khoăn của ông về việc tại sao loài người trải qua hơn 2000 năm đeo đuổi việc chứng minh tiên đề V của Ơclid mà vẫn thất bại nên ông có nghi vấn: “Hay là tiên đề Ơclid không phải là hệ quả lôgic của các tiên đề khác?”. Nghiên cứu của ông trước hết là nhằm sáng tỏ nghi vấn trên. Nếu cứ theo lôgic ấy, dựa theo qui luật mâu thuẫn, có thể dự đoán rằng rồi sẽ có những lí thuyết nảy sinh từ mối băn khoăn rằng tại sao phương trình Diôphante $x^n+y^n=z^n$ lại không có nghiệm khi n >2 ?...Như vậy là, qui luật mâu thuẫn, hạt nhân của phép biện chứng duy vật đã thể hiện tính đúng đắn của nó ngay trong toán học. Mâu thuẫn chính là nguồn gốc, động lực phát triển toán học. Qui luật mâu thuẫn cũng đã góp phần thay đổi thế giới quan và định hướng PP luận cho các nhà toán học. Họ thấy rõ sự thống nhất BC giữa những khuynh hướng phát triển khoa học trái ngược nhau (chẳng hạn đặc biệt hóa và khái quát hoá), những trường hợp khác nhau để tìm ra con đường giải quyết mâu thuẫn, thúc đẩy sự phát triển tiến lên của toán học. Giáo sư Nguyễn Cảnh Toàn thông qua những bài báo và công trình nghiên cứu khoa học của mình cũng thừa nhận: Chính tư duy biện chứng đã giúp ông rất nhiều trong nghiên cứu toán học và ngược lại các kết quả nghiên cứu cũng đã củng cố rất nhiều thế giới quan duy vật biện chứng ở ông. Abel chứng minh sự không giải được bằng căn thức của các phương trình đại số bậc $n > 4$. Galois không chịu dừng ở đó nên cuối cùng đã đưa ra tiêu chuẩn khiến ta thấy rõ mâu thuẫn mà thống nhất khi $n \leq 4$ và $n > 4$ và kết quả là lí thuyết Galois ra đời.

Có thể nói, qui luật mâu thuẫn mở ra một thế giới quan và phương pháp luận cho các nhà toán học, tạo cho họ niềm tin vượt qua những khó khăn lớn, kiên trì đeo đuổi sự nghiệp nghiên cứu của mình và cuối cùng đạt được những kết quả thật là vĩ đại. Như vậy, qui luật thống nhất và đấu tranh giữa các mặt đối lập được coi là hạt nhân của phép biện chứng duy vật, nó vạch rõ nguồn gốc, động lực của sự phát triển toán học.

2.5. Qui luật phủ định của phủ định

Phủ định là sự thay thế sự vật này bằng sự vật khác trong quá trình vận động và phát triển. Trong lịch sử triết học, tùy theo thế giới quan và phương pháp luận, các nhà triết học và các trường phái triết học có quan niệm khác nhau về phủ định. Chủ nghĩa duy vật biện chứng cho rằng sự chuyển hóa từ những thay đổi về lượng dẫn đến những thay đổi về chất, sự đấu tranh thường xuyên của các mặt đối lập làm cho mâu thuẫn được giải quyết, từ đó dẫn đến sự vật cũ mất đi, sự vật mới ra đời. Sự thay thế diễn ra liên tục tạo nên sự vận động và phát triển không ngừng của sự vật. Sự vật mới ra đời là kết quả của phủ định sự vật cũ. Điều đó cũng có nghĩa sự phủ định là tiền đề, điều kiện cho sự phát triển liên tục, cho sự ra đời của cái mới thay thế cái cũ. Đó là phủ định BC. Phủ định BC là phạm trù triết học dùng để chỉ sự phủ định tự thân, là một khâu trong quá trình dẫn tới sự ra đời sự vật mới, tiến bộ hơn sự vật cũ. Đặc trưng cơ bản của phủ định biện chứng là tính khách quan và tính kế thừa.

Qui luật phủ định của phủ định là qui luật phát triển vô cùng phổ biến của tự nhiên, lịch sử và tư duy. Nó vạch ra xu hướng tất yếu đi lên của mọi sự vận động, phát triển cũng như vạch ra xu hướng, định hướng của sự phát triển. Ăng-ghen đã đánh giá tầm quan trọng của qui luật đối với khoa học tự nhiên: *"Vậy phủ định của phủ định là cái gì? Là qui luật phát triển của tự nhiên, của lịch sử và của tư duy vô cùng phổ biến và chính vì vậy mà có một tầm quan trọng và một ý nghĩa vô cùng lớn, một qui luật có giá trị đối với động vật và thực vật, đối với địa chất học, toán học, lịch sử…"* (Mac. C &. Ph.Ăng - ghen, 2004). Ăng-ghen đã mô tả qui luật phủ định của phủ định trong toán học: Ăng-ghen giả sử rằng ông có hai biến x và y và làm cho chúng trở thành những số vi phân, nghĩa là giả sử x và y là nhỏ vô hạn đến nỗi không còn gì hết ngoài các tỉ số của chúng đối với nhau, một tỉ số không có một cơ sở nào có thể gọi là cơ sở vật chất được cả, một tỉ số về số lượng mà không có một số lượng nào đó; như vậy thì $\frac{dy}{dx}$, tỉ số vi phân của x và y sẽ là $\frac{0}{0}$ nhưng $\frac{0}{0}$ được coi như biểu thức của $\frac{y}{x}$. Cái tỉ số ấy giữa 2 lượng đã biến mất đi, cái lúc chúng biến mất đi mà ta xác định được đó chính là một mâu thuẫn. Như vậy là thay cho x và y, ông đã có cái phủ định chúng, tức dx và dy. Lại tiếp tục làm tính coi dx và dy là những số thực và phủ định cái phủ định nghĩa là chuyển công thức vi phân thành tích phân và thay thế cho dx và dy ta lại có được những số thực x và y nhưng lúc đó không phải là ông ở vào chỗ mà ông đã xuất phát: *"Trái lại tôi đã giải đáp được bài toán mà hình học và đại số học thông thường có lẽ đã nát óc ra mà cũng không giải quyết nổi"* (Mac. C &. Ph.Ăng - ghen, 1994).

Các nhà toán học nhiều khi đã sử dụng tư duy biện chứng và Qui luật phủ định của phủ định một cách không ý thức: Lôbasepxki khi phát minh ra hình học mang tên mình chỉ nghĩ là mình đã phủ định hình học Ơclid chứ không nghĩ là mình mở rộng hình học Ơclid. Những khái quát của ông và các tác giả cho thấy hình học Lôbasepxki phủ định hình học Ơclid đồng thời là sự mở rộng hình học Ơclid. Như vậy một phát minh vĩ đại như hình học Lôbasepxki cũng không thoát khỏi qui luật phủ định của phủ định tức phủ định có tính kế thừa.

Qui luật phủ định của phủ định chỉ rõ xu hướng, định hướng của sự phát triển toán học, trải qua những lần phủ định liên tiếp trong đó quá trình phủ định biện chứng xảy ra khách quan trên cơ sở kế thừa những nền toán học đã có từ trước và những phát minh toán học ra đời không phải là sự phủ định sạch trơn mà trên cơ sở những phát minh, những kết quả đã có từ lâu của các nhà toán học tiền bối. Qui luật phủ định của phủ định cũng cho chúng ta thấy rằng trong quá trình phủ định một kết quả toán học, chúng ta phải biết kế thừa có chọn lọc, tiếp thu những cái tích cực của chúng để mở rộng, phát triển lên. Nó chính là định hướng của sự phát triển.

Các đối tượng và sự kiện toán học với tư cách là đối tượng của tư duy vừa có tính hiện thực sâu vừa có tính trừu tượng cao. Hai mặt "hiện thực" và "trừu tượng" của chúng đối lập với nhau nhưng lại tồn tại trong sự thống nhất biện chứng, mặt "hiện thực" là nguồn gốc, mặt "trừu tượng" là thể hiện của nguồn gốc trên. Mặt "hiện thực" gắn liền với cái cảm tính, cái riêng, cái cụ thể..., còn mặt "trừu tượng" gắn liền với cái lí tính, cái chung, cái trừu tượng..., cho nên trong tư duy toán học cũng phải được thể hiện mối quan hệ biện chứng giữa các cặp phạm trù; cái cảm tính và cái lí tính; cái riêng và cái chung; cái cụ thể và cái trừu tượng...Để nhận thức mặt nội dung của "hiện thực" cần có tư duy biện chứng, và để nhận thức mặt hình thức của "hiện thực" cần có tư duy lôgic; nên tư duy toán học cũng phải là sự thống nhất biện chứng giữa tư duy lôgic và tư duy biện chứng. Như vậy giữa toán học và tư duy biện chứng có quan hệ biện chứng và hai nguyên lý cơ bản của phép biện chứng duy vật đóng vai trò là nền tảng phương pháp luận trong nhận thức toán học.

3. KẾT LUẬN

Như vậy, trong nhận thức toán học, phép biện chứng duy vật có vai trò phương pháp luận vô cùng quan trọng trong định hướng quá trình hình thành và phát triển tư duy nhận thức toán học của con người. Tri thức toán học xuất hiện từ sự đòi hỏi hiểu biết sự vật, hiện tượng xung quanh của con người, là sự mâu thuẫn trong quá trình tư duy của con người. Trong quá trình nghiên cứu về sự vật, hiện tượng, những công thức toán học ra đời không dựa trên sự nghiên cứu rời rạc của sự vật, hiện tượng mà nghiên cứu sự vật trong mối liên hệ với các sự vật, hiện tượng khác, nhìn nhận mọi sự vật, hiện tượng một cách toàn diện để đưa ra kết luận đúng đắn nhất.

Mặt khác, sự phát triển của toán học là một quá trình khách quan, không phụ thuộc vào ý muốn cá nhân của con người, đó là quá trình giải quyết những mâu thuẫn nảy sinh trong bản thân toán học và giải quyết những nhu cầu của thực tiễn. Hiểu biết của con người về sự vật hiện tượng là hữu hạn, nên tri thức toán học sẽ không ngừng vận động và phát triển để ngày càng hoàn thiện nhận thức của con người về giới tự nhiên.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Vũ Trọng Dung, & Lê Doãn Tá (2009). *Giáo trình Triết học Mác-Lênin, Tập 1*. Nxb Lao động Xã hội.

Đoàn Quỳnh , Văn Như Cương, Phạm Vũ Khuê, & Bùi Văn Nghị (2006). *SGK hình học 10 (nâng cao)*. Nxb Giáo dục, Hà Nội.

Đoàn Quỳnh, Văn Như Cương, Phạm Khắc Ban, Lê Huy Hùng, & Tạ Mân (2007). *Hình học 12 nâng cao.* Nxb Giáo dục, Hà Nội.

Nguyễn Cảnh Toàn (2005). *Tuyển tập các công trình Toán học và Giáo dục*. Nxb Giáo dục, Hà Nội.

Triết học Mác – Lênin (1994). *Chương trình cao cấp, tập 1*. Học viện chính trị quốc gia Hồ Chí Minh, Nxb Chính trị quốc gia, Hà Nội.

Mác.C & Ph.Ăng-ghen (1994). *Tuyển tập, tập 3*. Nxb Chính trị quốc gia-Sự thật, Hà Nội.

Mác.C & Ph.Ăng-ghen (2004). *Toàn tập, tập 20*. Nxb Chính trị quốc gia-Sự thật, Hà Nội