# THE HIGHER TOPOLOGICAL COMPLEXITY OF BRAID ARRANGEMENTS

**Tran Hue Minh***, **Nguyen Van Ninh**
*TNU - University of Education*

**ARTICLE INFO**

**Received:** **02/4/2024**
**Revised:** **10/6/2024**
**Published:** **11/6/2024**

**KEYWORDS**

Topological complexity
Cohomology
Homotopy equivalent
Fiber
Orlik-Solomon algebra

**ABSTRACT**

The concept of topological complexity of topological space was introduced by M.Faber in 2001. In 2010, by generalizing this concept, Y.B. Rudyak introduced the concept of higher topological complexity. In this paper, we calculate the higher topological complexity for the complement of Braid arrangements in complex vector space. To do this, we estimate the upper bound by construct a series of projections, provide the relationship between the overall space with the projection space and the grain of the projections and give the lower bound by using the property of genered element of Orlik-Solomon algebra. By application this results, we give the result about the higher topological complexity of configuration space on real plane.

# ĐỘ PHỨC TẠP TÔ PÔ BẬC CAO CỦA SẮP XẾP BRAID

**Trần Huệ Minh***, **Nguyễn Văn Ninh**
*Trường Đại học Sư phạm - ĐH Thái Nguyên*

**THÔNG TIN BÀI BÁO**

**Ngày nhận bài:** **02/4/2024**
**Ngày hoàn thiện:** **10/6/2024**
**Ngày đăng:** **11/6/2024**

**TỪ KHÓA**

Độ phức tạp tô pô
Đối đồng điều
Tương đương đồng luân
Phân thớ
Đại số Orlik-Solomon

**TÓM TẮT**

Khái niệm độ phức tạp tô pô của không gian tô pô được M.Faber đưa ra năm 2001. Năm 2010, tổng quát hóa khái niệm trên Y.B. Rudyak đưa ra khái niệm độ phức tạp tô pô bậc cao của một không gian tô pô. Trong bài báo này, chúng tôi tính độ phức tạp tô pô bậc cao cho phần bù các sắp xếp Braid trong không gian véc tơ phức. Để có được kết quả này chúng tôi lần lượt đưa ra chặn trên bằng việc xây dựng một dãy các phép chiếu, đưa ra mối liên hệ giữa không gian tổng thể với không gian chiếu và thớ của các phép chiếu và đưa ra chặn dưới bằng cách sử dụng tính chất của các phần tử sinh của đại số Orlik-Solomon của sắp xếp tương ứng. Áp dụng kết quả này chúng tôi tính toán độ phức tạp tô pô bậc cao cho các không gian cấu hình trên mặt phẳng.

**DOI: https://doi.org/10.34238/tnu-jst.10016**

* Corresponding author. *Email: minhth@tnue.edu.vn*

## 1. Giới thiệu

Cho $X$ là một không gian tô pô liên thông đường, $PX$ là không gian các đường liên tục trong $X$ với tô pô compact mở. Xét ánh xạ $\pi^X : PX \to X \times X$, biến mỗi đường $\gamma \in PX$ thành cặp điểm đầu và điểm cuối của $\gamma$ hay $\pi^X(\gamma) = (\gamma(0); \gamma(1))$.

**Định nghĩa 1.** Độ phức tạp tô pô $TC(X)$ của không gian tô pô $X$ là số $m$ nhỏ nhất sao cho tồn tại một phủ mở $\{U_1, \ldots, U_m\}$ của $X \times X$ sao cho trên mỗi tập mở $U_i$ tồn tại một nhát cắt địa phương $s_i : U_i \to PX$ của $\pi^X$, nghĩa là $\pi^X \circ s_i = id_{U_i}$.

Khái niệm này được M. Farber định nghĩa trong [1] chính là giống Schwarz (xem [2]) của $\pi^X$.

Tổng quát khái niện trên, trong [3], Yu. Rudyak đã mở rộng khái niệm này thành khái niệm độ phức tạp tô pô bậc cao (hoặc xem [4]) như sau: Với $k \geq 2$, đặt $J_k$ là tích kết của $k$ đoạn đơn vị $[0;1]_i$, $i = 1, \ldots, k$, với $0_i \in [0;1]_i$ được đồng nhất, $X^{J_k}$ là không gian tất cả các hàm liên tục từ $J_k$ vào $X$ với tô pô compact mở. Xét phân thớ

$$\begin{aligned} e_k^X : X^{J_k} &\to X^k \\ \gamma &\mapsto (\gamma(1_1), \ldots, \gamma(1_k)) \end{aligned}$$

với $1_i$ là phần tử 1 trong $[0;1]_i$. Đây chính là một cái thế phân thớ của ánh xạ đường chéo $d_k : X \to X^k$ (xem [3]).

**Định nghĩa 2.** Độ phức tạp tô pô bậc cao $TC_k(X)$ của không gian tô pô $X$ là số $m$ nhỏ nhất sao cho tồn tại một phủ mở $\{U_1, \ldots, U_m\}$ của $X^k$ bởi $m$ tập mở và với mỗi tập mở tồn tại một nhát cắt địa phương $f_i : U_i \to X^{J_k}$ của $e_k$, nghĩa là $e_k^X \circ f_i = id_{U_i}$.

Cũng như độ phức tạp tô pô thì độ phức tạp tô pô bậc cao cũng có các tính chất sau.

i) $TC_k$ là một bất biến đồng luân. Nghĩa là hai không gian tô pô tương đương đồng luân thì có cùng độ phức tạp tô pô bậc cao.

ii) Vì $e_k^X$ là cái thế phân thớ của ánh xạ $d_k : X \to X^k$ nên ta có tính chất sau: Nếu $m$ là một số nguyên dương sao cho tồn tại $m$ lớp đối đồng điều $u_i \in H^*(X^k)$ với $i = 1, \ldots, m$ thỏa mãn $d_k^*(u_i) = 0$ và $u_1 \ldots u_m \neq 0 \in H^*(X^k)$. Khi đó $TC_k(X) \geq m + 1$.

Độ phức tạp tô pô bậc cao đã được tính cho các mặt cầu và tích của các mặt cầu bởi I. Basabe, J. González, Y.B. Rudyak, and D. Tamaki trong [4], và một số không gian cấu hình và bởi J. Gonzélez, B. Guti'errez [5].

Chúng tôi quan tâm đến độ phức tạp tô pô bậc cao của phần bù các sắp xếp siêu phẳng. Trong [6] và [7] chúng tôi đã tính toán $TC_k$ cho phần bù của một số lớp các sắp xếp siêu phẳng. Trong bài báo này chúng tôi tính $TC_k$ cho phần bù của một sắp xếp Braid.

## 2. Sơ lược về vấn đề nghiên cứu

Trước hết chúng ta nhắc lại về sắp xếp Braid.

**Định nghĩa 3.** Sắp xếp Braid $\mathcal{B}_n$ trong không gian véc tơ phức $\mathbb{C}^n$ là một sắp xếp có đa thức xác định

$$Q(\mathcal{B}_n) = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i).$$

Ta kí hiệu $H_{ij}$ là siêu phẳng có phương trình xác định là $x_j - x_i = 0$ hay $x_j = x_i$ với $1 \le i < j \le n$. Chú ý rằng $\mathcal{B}_2$ chỉ gồm một siêu phẳng (mặt phẳng) phức có phương trình xác định $x_2 - x_1 = 0$.

**Định nghĩa 4.** Một sắp xếp tâm $\mathcal{A}$ trong $\mathbb{C}^n$ có hạng $r$ được gọi là sắp xếp siêu giải được nếu dàn $L(\mathcal{A})$ có một dãy cực đại các phần tử modula.

$$\mathbb{C}^n = X_0 < X_1 < \cdots < X_r = T, \quad (1)$$

trong đó $T$ là tâm của $\mathcal{A}$.

Với mỗi phần tử $X \in L(\mathcal{A})$ ta kí hiệu $\mathcal{A}_X = \{H \in \mathcal{A} \mid X \subset H\}$. Khi đó nếu $X, Y \in L(\mathcal{A})$ và $X < Y$ thì $\mathcal{A}_Y \subset \mathcal{A}_X$. Giả sử $\mathcal{A}$ là sắp xếp siêu giải được với dãy cực đại các phần tử modular như $(1)$, ta đặt $b_i = | \mathcal{A}_{X_i} \setminus \mathcal{A}_{X_{i-1}} |$ với $i = 1, \ldots, r$. Khi đó dãy $\{b_1, \ldots, b_r\}$ không phụ thuộc vào các phần tử của dãy modular cực đại và dãy này gọi là exponent của sắp xếp $\mathcal{A}$.

Từ sự xác định của $\mathcal{B}_n$ ta có thể dễ dàng suy ra $\mathcal{B}_n$ là một sắp xếp siêu giải được, hạng $n-1$ với dãy cực đại các phần tử modular như sau

$$\mathbb{C}^n = X_0 < \{x_1 = x_2\} < \{x_1 = x_2 = x_3\} < \cdots < \{x_1 = x_2 = \cdots = x_n\} = T, \quad (2)$$

và exponent của $\mathcal{B}_n$ là $\{1, 2, \ldots, n-1\}$.

Bây giờ ta đặt $M(\mathcal{B}_n) = \mathbb{C}^n \setminus \bigcup_{H\in\mathcal{B}_n} H$ gọi là phần bù của $\mathcal{B}_n$. Khi đó phép chiếu chính tắc $\pi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-1}$, xác định bởi $\pi(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$ cảm sinh ra phép chiếu

$$\pi : M(\mathcal{B}_n) \to M(\mathcal{B}_{n-1}).$$

Để chứng minh cho trường hợp tổng quát, ta sẽ lần lượt đưa ra chặn dưới và chặn trên cho $TC_k(M(\mathcal{B}_n))$. Để đưa ra được chặn dưới, chúng tôi sử dụng sự đẳng cấu của đại số đối đồng điều của $M$ với đại số Orlik-Solomon, từ đó tính toán trực tiếp trên các phần tử của đại số Orlik-Solomon. Để đưa ra chặn trên, chúng tôi xây dựng nhát cắt của phép chiếu $\pi$ từ đó đưa ra mối liên hệ giữa $TC_k(M(\mathcal{B}_n))$ và $TC_k(M(\mathcal{B}_{n-1}))$. Cuối cùng đưa ra kết luận về kết quả của $TC_k(M(\mathcal{B}_n))$.

## 3. Kết quả chính

**Định lý.** *Với* $n \ge 2$, $TC_k(M(\mathcal{B}_n)) = (n-1)k$.

*Chứng minh:* Chứng minh của định lý sẽ chia làm hai phần.

### 3.1. Chặn dưới

Ta có $H^*(M(\mathcal{B}_n); \mathbb{C})$ đẳng cấu với đại số Orlik – Solomon $\mathsf{A}(\mathcal{B}_n)$ của $\mathcal{B}_n$ như các đại số phân bậc (xem [8]) và kết hợp với việc sử dụng tính chất chặn dưới (ii) ta sẽ đưa ra chặn dưới của

$TC_n$ bằng việc sử dụng đại số Orlik-Solomon. Ta đồng nhất các phần tử sinh của $H^*(M(\mathcal{B}_n);\mathbb{C})$ với các phần tử sinh của $\mathsf{A}(\mathcal{B}_n)$. Vì $\mathsf{A}(\mathcal{B}_n)$ là đại số thương của đại số ngoài $E(\mathcal{B}_n)$ với các phần tử sinh $e_{ij}$ ứng với các siêu phẳng $H_{ij}$. Do vậy, $\mathsf{A}(\mathcal{B}_n)$ sinh bởi các phần tử $a_{ij} = \varphi(e_{ij})$ với $\varphi : E(\mathcal{B}_n) \to \mathsf{A}(\mathcal{B}_n)$ là phép chiếu chính tắc.

Xét các phần tử $a_{1i}$ với $i = 2,\dots,n$ và đặt $a = \prod_{i=2}^{n} a_{1i}$. Khi đó ta có $a \neq 0$. Xét các phần tử $a_{2j}$ với $j = 3,\dots,n$ và đặt $b = \prod_{j=3}^{n} a_{2j}$. Khi đó ta cũng có $b \neq 0$.

Với mỗi phần tử $a_{ij}$ ta đặt

$$\overline{a}_{ij_t} = 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes \overset{t}{\breve{a}_{ij}} \otimes \dots \otimes 1 - a_{ij} \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1, \text{ với } t = 2,\dots,k$$

Xét phần tử

$$\omega = \prod_{i=2}^{n} \Big(\prod_{t=2}^{k} \overline{a}_{1i_t}\Big) . \prod_{j=3}^{n} \overline{a}_{2j_k}.$$

Trong khai triển của $\omega$ có số hạng $a \otimes \dots \otimes a \otimes b$ bậc $(k-1)(n-1)+n-2$ không bị triệt tiêu bởi các số hạng khác. Do đó ta có $\omega \neq 0$.

Mặt khác, $d_k^* \overline{a}_{ij_t} = 0$ với mọi $i, j = 1,\dots,n$ và $t = 2,\dots,k$. Từ đó ta suy ra

$$TC_k(M(\mathcal{B}_n)) \geq (k-1)(n-1)+(n-2)+1 = (n-1)k. \tag{3}$$

***3.2. Chặn trên***

Để đưa ra chặn trên, trước hết ta cần một số bổ đề sau

**Bổ đề 1.** *Với mỗi* $n$, *tồn tại ánh xạ* $\sigma : M(\mathcal{B}_{n-1}) \to M(\mathcal{B}_n)$ *thỏa mãn* $\pi \circ \sigma = Id_{M(\mathcal{B}_{n-1})}$.

Thật vậy, xét $\sigma : M(\mathcal{B}_{n-1}) \to M(\mathcal{B}_n)$ xác định bởi

$$\sigma(x_1,\dots,x_{n-1}) = (x_1,\dots,x_{n-1},\phi(x_1,\dots,x_{n-1})).$$

Trong đó $\phi(x_1,\dots,x_{n-1}) = \sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}|x_i|^2}$. Khi đó, dễ dàng kiểm tra được $\pi \circ \sigma = Id_{M(\mathcal{B}_{n-1})}$.

**Bổ đề 2.** *Cho* $X$ *là một không gian tô pô bất kì,* $C = \{C_1,\dots,C_p\}$ *và* $D = \{D_1,\dots,D_q\}$ *là các phủ mở của* $X^k$ *thỏa mãn trên mỗi tập* $C_i \cap D_j$ *tồn tại một nhát cắt địa phương của* $e_k^X$. *Khi đó*

$$TC_k(X) \leq p+q-1.$$

*Chứng minh:* Giả sử $C = \{C_1,\dots,C_p\}$ và $D = \{D_1,\dots,D_q\}$ là các phủ mở của $X^k$, khi đó ta có thể xây dựng được một phủ mở $U = \{U_1,U_2,\dots,U_{p+q-1}\}$ của $X^k$ thỏa mãn điều kiện mỗi tập mở $U_i$, với $i = 1,2,\dots,p+q-1$ là hợp rời của các tập mở có dạng $C_i \cap D_j$ với bộ chỉ số

$i, j$ nào đó (xem [2]). Do đó, tồn tại các nhát cắt của $e_k^X$ trên mỗi $U_i$, $i = 1, 2, \ldots, p + q - 1$. Do đó

$$TC_k(X) \le p + q - 1.$$

**Bổ đề 3. (Xem [7])** *Tồn tại một họ các tương đương đồng luân $h_x : \pi^{-1}(x) \to X_{n-1}$ phụ thuộc liên tục vào $x \in M(\mathcal{B}_{n-1})$, thỏa mãn $h_x(\sigma(x)) = P$. Với $X_{n-1}$ là tích kết của $n-1$ đường tròn $S^1$ tại $P$.*

Ta quay lại chứng minh chặn trên.

Giả sử $TC_k(M(\mathcal{B}_{n-1})) = p$. Suy ra tồn tại một phủ mở $U = \{U_1, \ldots, U_p\}$ của $(M(\mathcal{B}_{n-1}))^k$ sao cho tồn tại một nhát cắt của $e_k^{M(\mathcal{B}_{n-1})}$ trên mỗi tập mở $U_i$. Đặt

$$C_i = \{(A_1, \ldots, A_k) \in (M(\mathcal{B}_n))^k \mid (\pi(A_1), \ldots, \pi(A_k)) \in U_i\}.$$

Dễ thấy, $C = \{C_1, \ldots, C_p\}$ là một phủ mở của $(M(\mathcal{B}_n))^k$.

Giả sử $TC_k(X_{n-1}) = q$. Khi đó tồn tại một phủ mở $V = \{V_1, \ldots, V_q\}$ của $(X_{n-1})^k$ thỏa mãn trên mỗi tập mở $V_j$ tồn tại nhát cắt của $e_k^{X_{n-1}}$. Đặt

$$D_j = \{(A_1, \ldots, A_k) \in (M(\mathcal{B}_n))^k \mid (h_{\pi(A_1)}(A_i), \ldots, h_{\pi(A_k)}(A_k)) \in V_j\}.$$

Khi đó, $D = \{D_1, \ldots, D_q\}$ là một phủ mở của $(M(\mathcal{B}_n))^k$.

Ta sẽ xây dựng một nhát cắt của $e_k^{M(\mathcal{B}_n)}$ trên mỗi tập mở có dạng $C_i \cap D_j$, $i = 1, \ldots, p$, $j = 1, \ldots, q$. Với hai điểm $A, B$ trong $M(\mathcal{B}_n)$, kí hiệu $[A, B]$ là đường $\gamma_1 * \gamma_2 * \gamma_3$, trong đó

- $\gamma_1$ là nghịch ảnh của đường nối $h_{\pi(A)}(A)$ với $P$ trong $X_{n-1}$ qua tương đương đồng luân $h_{\pi(A)}$.
- $\gamma_2$ ảnh của đường nối $\pi(A)$ với $\pi(B)$ trong $M(\mathcal{B}_{n-1})$ qua $\sigma$.
- $\gamma_3$ là nghịch ảnh của đường nối $P$ với $h_{\pi(B)}(B)$ trong $X_{n-1}$ qua tương đương đồng luân $h_{\pi(B)}$

Với bất kì $(A_1, A_2, \ldots, A_k) \in (M(\mathcal{B}_n))^k$. Sử dụng cách xây dựng như trên, ta xác định ánh xạ $f$ bởi $f(A_1, A_2, \ldots, A_k) = ([A_1, A_1], [A_1, A_2], \ldots, [A_1, A_k])$. Khi đó, hạn chế của $f$ trên các tập dạng $C_i \cap D_j$ là liên tục và cũng là nhát cắt của $e_k^{M(\mathcal{B}_n)}$.

Áp dụng Bổ đề 2 ta có $TC_k(\mathcal{B}_n) \le p + q - 1 = TC_k(\mathcal{B}_{n-1}) + TC_k(X_{n-1}) - 1$.

Bằng quy nạp theo $n$ ta suy ra

$$TC_k(\mathcal{B}_n) \le TC_k(X_{n-1}) + \cdots + TC_k(X_2) + TC_k(\mathcal{B}_2) - (n-2).$$

Hơn nữa, (xem [3]) với $d \ge 2$ thì $TC_k(X_d) = k + 1$. Mặt khác, $TC_k(\mathcal{B}_2) = TC_k(\mathbb{C}^*) = k$.

Do đó, $TC_k(M(\mathcal{B}_n)) \le (n-2)(k+1) + k - (n-2) = (n-1)k$.

Vậy định lý được chứng minh.

Áp dụng vào không gian cấu hình ta được kết quả sau.

**Hệ quả**: Xét không gian cấu hình $n$ điểm trên mặt phẳng thực $\mathbb{R}^2$ là

$$F(\mathbb{R}^2, n) = \{(x_1, ..., x_n) \in (\mathbb{R}^2)^n \mid x_i \neq x_j, i \neq j\}.$$

Khi đó, $TC_k(F(\mathbb{R}^2, n)) = (n-1)k$.

*Chứng minh.* Xét đồng phôi $h: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ biến mỗi điểm $x = (a, b)$ thành số phức $z = a + bi$. Khi đó anh xạ $\bar{h}: F(\mathbb{R}^2, n) \to M(\mathcal{B}_n)$, xác định bởi $\bar{h}(x_1, ..., x_n) = (h(x_1), ..., h(x_n))$ cũng là một đồng phôi. Do đó, $TC_k(F(\mathbb{R}^2, n)) = TC_k(\mathcal{B}_n) = (n-1)k.$

## 4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi tính được độ phức tạp tô pô bậc cao của phần bù một sắp xếp Braid. Khi tìm chặn dưới chúng tôi sử dụng sự đẳng cấu của đối đồng điều của phần bù với đại số Orlik-Solomon của sắp xếp siêu phẳng đó. Khi tìm chặn trên, bằng việc sử dụng tính chất của phép chiếu từ không gian $\mathbb{C}^n$ xuống $\mathbb{C}^{n-1}$ và tính chất đặc biệt của phần bù lớp sắp xếp Braid là tồn tại nhát cắt của phép chiếu này trên phần bù, chúng tôi đưa ra chặn trên của $TC_k(M(\mathcal{B}_n))$ thông qua $TC_k(M(\mathcal{B}_{n-1}))$. Kết quả này chỉ ra rằng độ phức tạp tô pô bậc cao của phần bù sắp xếp Braid phụ thuộc tổ hợp, cụ thể chỉ phụ thuộc vào số chiều không gian và dãy exponend của nó. Cuối cùng, chúng tôi đưa ra một áp dụng cho không gian cấu hình trên mặt phẳng thực.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/REFERENCES


[1] M. Faber, “Topological complexity of motion planning,” *Discrete Comput. Geom.*, vol. 29, pp. 211 - 221, 2003.

[2] A. S. Schwarz, “The genus of fiber space,” *Amer. Math. Sci, Transl.*, vol. 55, pp. 49 - 140, 1966.

[3] Y. B. Rudyak, “On higher analogs of topological complexity,” *Topology and its Application*, vol. 157, pp. 916 - 920, 2010.

[4] I. Basabe, J. González, Y. B. Rudyak, and D. Tamaki, “Higher topological complexity and homotopy dimension of configuration spaces on spheres,” *Algebr. Geom. Topol.*, vol. 14, pp. 2103 - 2124, 2014.

[5] J. González and B. Gutiérrez, “Topological complexity of collision-free multi- tasking motion planning on orientable surfaces,” in *Topological Complexity and Related Topics*, American Mathematical Society, 2018, pp.151-163, doi: 10.1090/conm/702/14102.

[6] H. M. Tran and V.N. Nguyen, “The higher topological complexity of a complement of complex lines arrangement,” *TNU Journal of Science and Technology*, vol. 225, no. 06, pp. 255 - 257, 2020.

[7] V. D. Nguyen and V. N. Nguyen, “The Higher Topological Complexity of Complement of Fiber Type Arrangement,” *Acta Mathematica Vietnamica*, vol. 42, pp. 249 - 256, 2017.

[8] P.Orlik and H.Terao, *Arrangements of hyperplanes*, Springer - Verlag, 1992.

[9] A. Hattori, “Topology of $\mathbb{C}^n$ minus a finite number of affine hyperplanes in general position,” *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, vol. 22, pp. 205 - 219, 1975.