

## FINDING THE OPTIMAL PATH IN AN ENVIRONMENT WITH STATIC AND DYNAMIC OBSTACLES

Pham Thi Lien\*, Tran Tuan Viet, Nguyen Quang Hiep

TNU - University of Information and Communication Technology

ARTICLE INFO		ABSTRACT
<b>Received:</b>	<b>19/8/2024</b>	The problem of transport routing in dynamically changing environments has been studied for many years. The construction of the optimal path-finding problem is essential in reality. Especially, when the delivery cost tends to increase steadily and is often equal to the cost of goods. The study highlights that the minimum delivery time is considered the optimization criterion, not the travel distance as in most previous research works. We have used the optical-geometric method proposed by the authors A.L.Kazakov and A.A.Lempert to develop the application, based on the similarity between light propagation in optically heterogeneous environments. This paper proposes an algorithm for constructing routes that avoid static and dynamic obstacles in environments with many changes. Several computational test models have been implemented, showing the effectiveness of the proposed modeling tools and algorithms.
<b>Revised:</b>	<b>13/11/2024</b>	
<b>Published:</b>	<b>14/11/2024</b>	
<b>KEYWORDS</b>		
Routing problems		
Optimization		
Optical geometry methods		
Optimal path		
Eikonal equations		

## TÌM ĐƯỜNG ĐI TỐI ƯU TRONG MÔI TRƯỜNG CÓ VẬT CẢN TĨNH VÀ VẬT CẢN ĐỘNG

Phạm Thị Liên\*, Trần Tuấn Việt, Nguyễn Quang Hiệp

Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông – ĐH Thái Nguyên

THÔNG TIN BÀI BÁO	TÓM TẮT
<b>Ngày nhận bài:</b> 19/8/2024	Bài toán định tuyến vận tải di chuyển trong môi trường có đặc tính thay đổi linh hoạt đã được nghiên cứu trong nhiều năm. Việc xây dựng bài toán tìm đường đi tối ưu rất cần thiết trong thực tế. Đặc biệt, khi chi phí giao hàng có xu hướng tăng ổn định và thường ngang bằng với giá thành của hàng hóa. Điểm nổi bật của nghiên cứu là thời gian giao hàng tối thiểu được coi là tiêu chí tối ưu chứ không phải là khoảng cách di chuyển như trong hầu hết các công trình nghiên cứu trước đây. Chúng tôi đã sử dụng phương pháp quang học - hình học được đề xuất bởi các tác giả A.L.Kazakov và A.A.Lempert để phát triển ứng dụng, dựa trên sự tương đồng giữa sự truyền ánh sáng trong môi trường không đồng nhất về mặt quang học. Trong bài báo này chúng tôi đề xuất Thuật toán xây dựng tuyến đường đi tránh vật cản tĩnh và vật cản động trong môi trường có nhiều thay đổi. Một số mô hình thử nghiệm tính toán đã được thực hiện, cho thấy tính hiệu quả của các công cụ mô hình hóa và thuật toán được đề xuất.
<b>Ngày hoàn thiện:</b> 13/11/2024	
<b>Ngày đăng:</b> 14/11/2024	
<b>TỪ KHÓA</b>	
Bài toán định tuyến	
Tối ưu hóa	
Phương pháp hình học quang học	
Tìm đường đi tối ưu	
Phương trình Eikonal	

DOI: <https://doi.org/10.34238/tnu-jst.10970>

\* Corresponding author. Email: [ptlien@ictu.edu.vn](mailto:ptlien@ictu.edu.vn)

## 1. Giới thiệu

Trước đây, nhiều thuật toán tìm đường đi đã được đề xuất nhằm xác định đường đi tối ưu và nâng cao hiệu quả trong các điều kiện khác nhau. Ví dụ: thuật toán tìm đường đi A\* được phát triển để tìm đường đi ngắn nhất, trong khi D\* tìm đường đi bao phủ hoàn chỉnh từ điểm nguồn đến điểm đích. Mặc dù các thuật toán này đã cải thiện hiệu quả trong việc tìm đường đi, nhưng trở ngại động (vật cản động) có thể tồn tại trong môi trường đã không được xem xét. Tuy nhiên, trong một số trường hợp không thể bỏ qua những thay đổi, ảnh hưởng của môi trường [1], [2]. Khi giải bài toán định tuyến trong môi trường động, chiến lược tìm kiếm heuristic thường được sử dụng để đưa ra giải pháp trong hầu hết các trường hợp của bài toán. Khaili [3] đã trình bày thuật toán tìm đường đi trong môi trường động có chướng ngại vật sử dụng thuật toán A\*. Trong [4], vấn đề điều hướng tự động của máy bay không người lái được xem xét và một thuật toán đã được đề xuất cho phép xây dựng quỹ đạo di chuyển mà không va chạm với các vật thể khác. Trong [5], [6], các tác giả cũng sử dụng thuật toán A\* tiếp cận theo chiều hướng thích ứng để xây dựng tuyến đường trong môi trường có chướng ngại vật. Cũng trong [7], [8], với môi trường được phân tách thành biểu đồ điểm tham chiếu trước khi áp dụng thuật toán A\*, giải pháp lọc điểm tham chiếu và phân vùng ranh giới được sử dụng để giảm kích thước của biểu đồ. Một lớp riêng biệt của các bài toán xây dựng tuyến đường linh động cho robot bao gồm các bài toán trong đó có xuất hiện chướng ngại vật không được biết trước [9] – [11]. Trong [12], để phát triển quy trình điều hướng robot chuyển động trong môi trường thay đổi đặc tính, các tác giả đã đề xuất một cách tiếp cận dựa trên cây ngẫu nhiên khám phá nhanh. Cách tiếp cận này cho phép tìm đường đi nhanh chóng, nhưng không đảm bảo tính tối ưu của nó. Trong [13], vấn đề thay đổi lộ trình dự kiến khi vị trí của chướng ngại vật thay đổi hoặc khi xuất hiện chướng ngại vật mới được xem xét. Các tác giả đã đề xuất một phương pháp làm thay đổi đường đi đã hoạch định để robot vượt qua các chướng ngại vật. Khi nghiên cứu các bài toán định tuyến cho robot tự hành dưới nước, các tác giả trong các công trình nghiên cứu [14], [15] đã trình bày một cách tiếp cận hai cấp độ để giải quyết bài toán định tuyến động của một nhóm robot dưới nước.

Ngoài ra, dựa vào phương pháp hình học quang học được đề xuất bởi các tác giả A.L.Kazakov và A.A.Lempert năm 2011 [16], dựa trên sự tương tự giữa sự truyền ánh sáng trong môi trường không đồng nhất về mặt quang học và giảm thiểu chức năng tích phân, được sử dụng như một công cụ nghiên cứu. Vì vậy, chúng tôi xem xét bài toán xây dựng một tuyến đường tối ưu trong một môi trường động, thay đổi trạng thái của nó theo những khoảng thời gian nhất định. Mục đích là để xây dựng tuyến đường nhanh nhất giữa hai điểm với việc vượt qua các rào cản và tránh các chướng ngại vật. Các thuật toán được đề xuất dựa trên phương pháp quang-hình học và việc tìm giá trị cực tiểu của hàm tích phân [16].

## 2. Đặt vấn đề và phương pháp giải quyết

Cho các điểm  $A(x_a, y_a)$  và  $B(x_b, y_b)$  thuộc miền  $X \subset \mathbb{R}^2$  và hàm  $f(t, x, y) > 0$  là tốc độ chuyển động tức thời tại mỗi điểm  $(x, y) \in X$  và nếu  $f(t, x, y) = 0$  thì việc đi qua điểm này bị cấm. Hàm  $f(t, x, y)$  liên tục từng phần trong các biến không gian  $x, y$  và hằng số từng phần trong  $t$  với các điểm chuyển tiếp đã biết  $t_i, i = 1, \dots, N$ . Chúng ta cần tìm một tuyến đường mang lại hàm cực tiểu:

$$\rho(a, b) = \min_{\Gamma \in G(a, b)} \int_{\Gamma} \frac{d\Gamma}{f(t, x, y)}, \quad (1)$$

Ở đây  $G(a, b)$  là tập hợp các đường cong liên tục, thuộc về không gian  $X$  và kết nối các điểm  $A$  và  $B$ .

Từ quan điểm của quang học và hình học, tích phân (1) xác định thời gian trong đó ánh sáng thoát ra từ điểm  $A$  đến điểm  $B$ , chuyển động trong một môi trường không đồng nhất về mặt quang học [16]. Theo nguyên lý Huygens, bất kỳ điểm nào trong vùng  $X$  mà ánh sáng đã tới đều có thể được coi là nguồn sáng độc lập [17]. Do đó, bằng cách giải phóng một sóng ánh sáng từ điểm  $A$ , chúng ta có thể xây dựng quỹ đạo chuyển động của nó và ghi lại photon sẽ là hạt đầu

tiên chạm tới điểm B. Sau đó, di chuyển theo hướng ngược lại của thời gian, chúng ta có thể khôi phục quỹ đạo của các điểm photon, đó sẽ là đường cong mong muốn.

Vì môi trường không đổi theo thời gian nên điểm mấu chốt ở đây là cấu trúc của mặt sóng ánh sáng tại thời điểm thay đổi trạng thái. Các mặt sóng này được xác định từ nghiệm của phương trình Eikonal [18], đây là phương trình vi phân từng phần không đồng nhất phi tuyến bậc nhất

$$\|\nabla u(x)\| = 1/f(x), \quad (2)$$

Trong đó,  $\nabla$  là toán tử gradient,  $\|\cdot\|$  là chuẩn Euclide.

Các đường mức của hàm mong muốn  $u(x) = \text{const}$  xác định vị trí của mặt sóng tại các thời điểm khác nhau.

Giải phương trình (2) là chúng ta có một nghiệm riêng. Lưu ý rằng đối với một lớp nhất định của hàm  $f(x)$ , nghiệm là chính xác.

### 3. Thuật toán và thực nghiệm tính toán

#### 3.1. Thuật toán

Xét  $X \in R^2$  là vùng diện tích giới hạn và  $f(t, x, y)$  là tốc độ tức thời của sóng ánh sáng tại một điểm  $(x, y) \in X$  ở thời điểm  $t$ . Trong quá trình di chuyển, đối tượng sẽ bị ảnh hưởng bởi các vật cản tác động  $H(t) = \bigcup_{i=1, n} H_i = \bigcup_{i=1, n} \{(x, y) : f(t, x, y) = -1\}$ .

#### **Thuật toán 1: Thuật toán lan truyền sóng ánh sáng**

Chúng ta hãy xem xét thuật toán lan truyền sóng từ một điểm  $A(x_a, y_a) \in X \setminus H(t_0)$  ở thời điểm  $t = t_0$ .

Dữ liệu đầu vào:

$U = \{A\}$  - Là mảng lưu trữ các điểm truyền sóng ánh sáng thứ cấp,

$T_p$  - Thời gian di chuyển của sóng ánh sáng từ một điểm  $A$  đến điểm thứ cấp của sóng ánh sáng  $p$ ,

$S_p$  - Là nguồn thứ cấp của sóng ánh sáng tới điểm  $p$

**Bước 1.** Ánh sáng truyền từ nguồn sáng  $A$  theo 8 hướng trong môi trường quang học. Chúng ta xác định được các mặt trước của sóng sau khoảng thời gian  $t$ . Thời gian di chuyển từ nguồn sáng  $A$  tới các mặt trước của sóng  $(x_p, y_p)$  được tính như sau:

$$T_{V_j} = T_p + t_{pV_j}, \text{ ở đây } t_{pV_j} = 2 \frac{\sqrt{(x_p - x_{V_j})^2 + (y_p - y_{V_j})^2}}{g(t_0, x_p, y_p) + g(t_0, x_{V_j}, y_{V_j})},$$

**Bước 2.** Nếu giá trị  $T_{V_j}$  tìm thấy nhỏ hơn giá trị trước đó trong nút được đề cập và sẽ được lưu vào  $S_{V_j} = p$ .

Thực hiện bước 1 và 2 đối với tất cả các phần tử sóng thứ cấp.

Kết quả của thuật toán này là thời gian nhỏ nhất để một sóng ánh sáng phát ra từ một điểm đến được từng phần tử của tập hợp.

#### **Thuật toán 2. Tìm đường đi từ một điểm đến một điểm**

Tìm đường đi từ điểm  $A$  đến điểm  $B$  với thời gian ban đầu  $t_0$ ,  $A, B \in X \setminus H(t_0)$ . Giả sử  $L(A; B)$  - lưu danh sách các điểm trên đường đi từ điểm  $A$  tới điểm  $B$ . Ban đầu  $L(A; B) = \{B\}$ .

**Bước 1.** Từ điểm  $A$  thực hiện lan truyền sóng ánh sáng theo thuật toán 1, với thời gian  $T_p$  xác định tới tất cả các điểm  $p \in X \setminus H(t_0)$  và nguồn sóng ánh sáng thứ cấp  $S_p$ .

Bước 2. Từ điểm đích B tìm điểm nguồn  $S_B$  truyền tới nó và lưu trữ  $S_B$  vào danh sách  $L(A; B)$

$$L(A; B) = L(A; B) \cup \{S_B\},$$

Bước 3. Nếu  $S_B$  trùng với điểm A thì thuật toán kết thúc. Trường hợp ngược lại, gán  $B = S_B$  và thực hiện lại bước 2.

Bước 4. Các phần tử được lưu trong danh sách  $L(A; B)$  chính là các điểm sẽ phải đi qua khi đi từ A đến B.

### 3.2. Mô hình thực nghiệm

Thực nghiệm 1. Khảo sát bài toán tìm đường đi của đối tượng từ điểm ban đầu  $A_1(0;0)$  tới điểm đích  $A(50;50)$  trong môi trường có nhiều vật cản.

Hàm số  $f(t, x, y)$  được định nghĩa  $f(t, x, y) = \begin{cases} 1; (t, x, y) \notin H \\ -1; (t, x, y) \in H \end{cases}$ , ở đây  $H$  - Là tập hợp

các vật cản. Trong thực nghiệm này sử dụng 4 vật cản tĩnh  $H_i, i = \overline{1,4}$  và một vật cản di chuyển  $V(t)$ . Vật cản di chuyển là khối hình vuông có độ dài cạnh là 5 (m) và di chuyển thẳng từ điểm  $V_1(2.5;37.5)$  tới điểm  $V_4(47.5;37.5)$  trong khoảng thời gian  $t = 5$  (s). Ở đây  $h_1, h_4$  là vật cản tĩnh khối hình vuông có độ dài cạnh lần lượt là 5 (m), 10(m) và có tọa độ là  $h_1(7.5;7.5), h_4(2;19.5)$ .  $h_2, h_3$  là vật cản khối hình chữ nhật có độ dài các cạnh lần lượt là 4 (m) và 5(m), và tọa độ là  $h_2(25;20), h_3(20;2.5)$ . Các vật cản này được biểu diễn như sau:

$$H(t) = H_1 \cup H_2 \cup H_3 \cup H_4 \cup V(t).$$

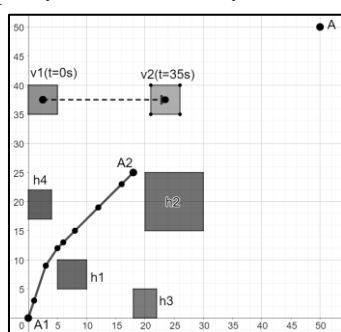
$$H_1 = \{(x, y) : |x - 5| \leq 5; |y - 5| \leq 5\};$$

$$H_2 = \{(x, y) : |x - 20| \leq 10; |y - 15| \leq 10\};$$

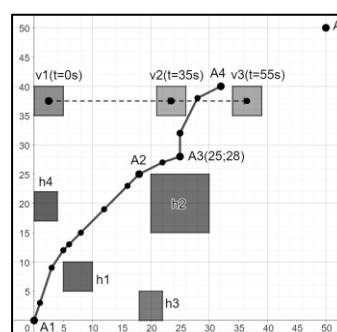
$$H_3 = \{(x, y) : |x - 18| \leq 4; |y| \leq 5\};$$

$$H_4 = \{(x, y) : |x| \leq 4; |y - 17| \leq 5\};$$

$$V = \{(x, y) : |x - 5| \leq 5; |y - t - 35| \leq 5\}$$



Hình 1a. Đối tượng di chuyển trong khoảng thời gian 0 - 35 (s)



Hình 1b. Đối tượng di chuyển trong khoảng thời gian 35 - 55 (s)

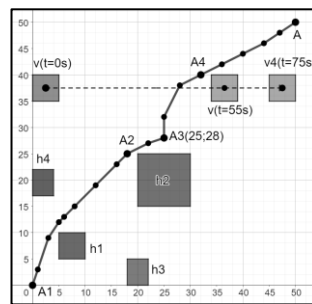
Sử dụng thuật toán 2 để tìm đường đi từ điểm  $A_1$  tới điểm  $A$  với thời gian ban đầu  $t = 0$  (s) và  $\Delta t = 5$  (s).

Ban đầu, trong khoảng thời gian 0 - 35 (s), đối tượng di chuyển và tránh các vật cản cố định  $h_1$  và  $h_4$ . Ở thời điểm  $t = 35$  (s) đối tượng đã di chuyển tới điểm  $A_2(18;25)$ , ở thời điểm này

vật cản di chuyển  $V(t)$  đã di chuyển tới điểm  $V_2(23.5;37.5)$  và tiếp tục di chuyển về phía trước. Vì đối tượng và vật cản di chuyển có cùng tốc độ di chuyển, vì vậy đối tượng đã thay đổi hướng di chuyển (Hình 1a).

Ở khoảng thời gian tiếp theo 35 - 55 (s), vật cản di chuyển  $V(t)$  tiếp tục di chuyển thẳng và tới điểm  $V_3(36.5;37.5)$  ở thời điểm  $t = 55$  (s). Đối tượng di chuyển từ điểm  $A_2$  tới điểm  $A_4(32;40)$  (Hình 1b).

Ở khoảng thời gian tiếp theo, vật cản di chuyển  $V(t)$  tiếp tục di chuyển thẳng và đi tới điểm  $V_4(47.5;37.5)$  ở thời điểm  $t = 75$  (s), tất cả các vật cản không làm ảnh hưởng tới đường đi của đối tượng. Vì vậy đối tượng tiếp tục di chuyển từ điểm  $A_4$  tới điểm  $A$ . Đối tượng đã di chuyển tới điểm  $A$  ở thời điểm  $t = 75$  (s) (Hình 2).



**Hình 2.** Quá trình di chuyển của đối tượng từ điểm ban đầu đến điểm đích

Trong thực nghiệm này, chúng ta thấy đối tượng đã di chuyển trong môi trường có vật cản tĩnh và vật cản động. Trong quá trình di chuyển từ điểm ban đầu đến điểm đích, đối tượng có thể tránh được các vật cản đó.

*Thực nghiệm 2.* Khảo sát bài toán tìm đường đi cho đối tượng di chuyển từ điểm ban đầu  $A_1(25;0)$  đến điểm đích  $A(25;50)$  trong môi trường được biểu diễn bởi hàm số  $f(t, x, y)$  và có

nhiều vật cản di chuyển. Hàm số  $f(t, x, y)$  được định nghĩa  $f(t, x, y) = \begin{cases} 1; (t, x, y) \notin H \\ -1; (t, x, y) \in H \end{cases}$ , ở đây

$H$  - là các vật cản di chuyển. Trong thực nghiệm này, 3 vật cản di chuyển  $H_i(t), i = 1, 3$  được biểu diễn bởi hàm hình vuông với các cạnh là 5 (m) và 3 (m). Chúng di chuyển thẳng với tốc độ khác nhau và theo các hướng khác nhau. Vật cản  $H_1(t)$  di chuyển với tốc độ 5 (m/s),  $H_2(t)$  di chuyển với tốc độ 4 (m/s),  $H_3(t)$  là 3 (m/s). Vật cản  $H_1(t)$  và  $H_3(t)$  di chuyển từ trái qua phải. Vật cản  $H_2(t)$  di chuyển từ phải qua trái. Ở đây  $H_1(t)$  bắt đầu từ tọa độ  $Z_1(2.5;16.5)$ ,  $H_2(t)$  là  $V_1(47.5;31.5)$ ,  $H_3(t)$  là  $U_1(2.5;41.5)$ . Các vật cản được biểu diễn như sau:

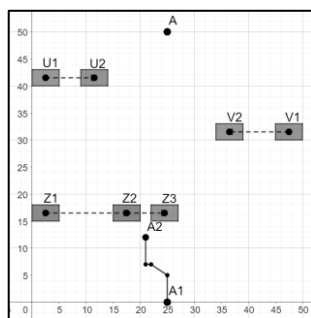
$$H(t) = H_1(t) \cup H_2(t) \cup H_3(t)$$

$$H_1(t) = \{(x, y) : |x - t| \leq 5; |y - t - 15| \leq 3\}$$

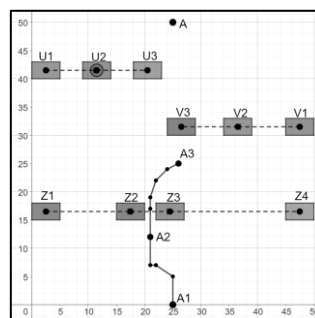
$$H_2(t) = \{(x, y) : |x - t - 45| \leq 5; |y - t - 30| \leq 3\}$$

$$H_3(t) = \{(x, y) : |x - t| \leq 5; |y - t - 40| \leq 3\}$$

Sử dụng thuật toán 2 để tìm đường đi từ điểm  $A_1$  đến điểm  $A$  với thời gian ban đầu  $t = 0$  (s) và  $\Delta t = 5$  (s).



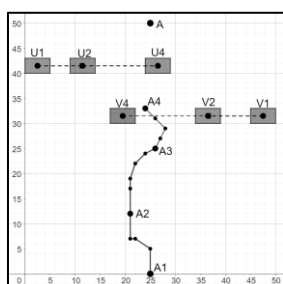
**Hình 3a.** Mô tả chuyển động của đối tượng trong khoảng thời gian 0 - 15 (s)



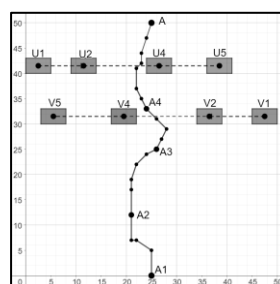
**Hình 3b.** Mô tả chuyển động của đối tượng trong khoảng thời gian 15 - 30 (s)

Ban đầu, trong khoảng thời gian 0 - 15 (s), vật cản  $H_1(t)$  di chuyển thẳng từ điểm  $Z_1$  đến điểm  $Z_2(17.5;16.5)$ . Cùng khoảng thời gian này, đối tượng di chuyển từ điểm  $A_1$  và nhận ra có khả năng xảy ra va chạm với vật cản. Vì vậy đối tượng đã thay đổi hướng di chuyển sang trái. Khi vật cản di chuyển tới điểm  $Z_3(24.5;16.5)$ , đối tượng di chuyển tới điểm  $A_2(21;12)$  (hình 3a).

Trong khoảng thời gian tiếp theo 15 - 30 (s), vật cản  $H_1(t)$  tiếp tục di chuyển thẳng tới điểm  $Z_4(47.5;16.5)$  và tiếp theo vật cản không làm ảnh hưởng tới đường di chuyển của đối tượng. Nhưng vật cản  $H_2(t)$  di chuyển tới điểm  $V_3(26.5;31.5)$ . Nếu đối tượng di chuyển thẳng, có thể va chạm với vật cản  $H_2(t)$ , vì vậy đối tượng đã di chuyển sang phải từ điểm  $A_2$  đến điểm  $A_3(26;25)$  (hình 3b).



**Hình 4a.** Mô tả chuyển động của đối tượng trong khoảng thời gian 30 - 40 (s)



**Hình 4b.** Mô tả chuyển động của đối tượng từ điểm đầu đến điểm đích

Trong khoảng thời gian tiếp theo 30 - 40 (s), vật cản  $H_2(t)$  di chuyển tới điểm  $V_4(19.5;31.5)$  và tiếp theo vật cản không gây ảnh hưởng tới đường di chuyển của đối tượng. Vì vậy đối tượng đã di chuyển từ điểm  $A_3$  đến điểm  $A_4(24;33)$ . Cùng thời gian, vật cản  $H_3(t)$  đã di chuyển tới điểm  $U_4(26.5;41.5)$  (hình 4a).

Trong khoảng thời gian tiếp theo 40 - 60 (s), ở thời điểm 40(s) vật cản  $H_3(t)$  sẽ va chạm nếu đối tượng di chuyển thẳng, vì vậy đối tượng đã di chuyển sang trái, và di chuyển tới điểm A. Trong khi đó, vật cản  $H_2(t)$  di chuyển tới điểm  $V_5(5.5;31.5)$  (hình 4b).

Trong thực nghiệm này, chúng ta thấy rằng đối tượng có thể di chuyển trong môi trường có vật cản di chuyển và tránh được các vật cản đó.

**4. Kết luận**

Trong quá trình nghiên cứu, chúng tôi đã đưa ra các vấn đề trong bài toán xây dựng tuyến đường đi tối ưu giữa hai điểm trong môi trường có vật cản động và vật cản tĩnh. Điểm nổi bật của

nghiên cứu này giúp phân biệt nó với hầu hết các nghiên cứu tương tự là thời gian tối thiểu cần thiết để di chuyển giữa chúng được coi là khoảng cách giữa các điểm. Ngoài ra, khi xây dựng các tuyến đường, chúng tôi đã sử dụng nghiệm của phương trình Eikonal trong quá trình tính toán giá trị thời gian (bước 1 trong thuật toán 1) tới các điểm trong môi trường đang được xem xét, điều này giúp loại bỏ việc xem xét bài toán trên đồ thị.

Để xây dựng giải pháp, chúng tôi đã sử dụng thuật toán dựa trên phương pháp hình học quang học, cho phép xây dựng các tuyến đường không chỉ trong môi trường bình thường mà còn trong môi trường động với số liệu phi Euclide. Trong trường hợp này, thuật toán đã cung cấp giải pháp tối ưu. Kết quả của thuật toán là thời gian ngắn nhất để di chuyển từ một điểm tới một điểm đồng thời có thể tránh được các vật cản (động và tĩnh) có trên đường. Thông tin quãng đường luôn được cập nhật sau khoảng thời gian cố định, điều này cho phép tránh được các vật cản động. Trong quá trình thử nghiệm tính toán, thuật toán này đã thể hiện hiệu quả của chúng trong nhiều trường hợp khác nhau. Hơn nữa khi giải bài toán này, cách tiếp cận được đề xuất trong một số trường hợp cho thấy ưu điểm so với các cách tiếp cận đã biết. Mục tiêu chính của nghiên cứu là đưa ra giải pháp tìm đường đi cho đối tượng trong môi trường thay đổi và có vật cản tĩnh, vật cản di chuyển.

### Lời cảm ơn

Bài báo là sản phẩm của đề tài có mã số T2024-07-02, được tài trợ bởi kinh phí của trường Đại học Công nghệ Thông tin và Truyền thông – Đại học Thái Nguyên. Nhóm tác giả xin chân thành cảm ơn sự tài trợ của nhà trường.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

- [1] T. Kunz, U. Reiser, M. Stilman, and A. Verl, "Real-time path planning for a robot arm in changing environments," *2010 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2010, pp. 5906-5911.
- [2] E. I. Veremei and M. V. Sotnikova, "Optimal Routing Based on Weather Forecast," *International Journal of Open Information Technologies*, vol. 4, no. 3, pp. 55-61, 2016.
- [3] M. El Khaili, "Path planning in a dynamic environment," *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*, vol. 5, no. 8, pp. 86-92, 2014.
- [4] A. V. Sarapulov, "Methods for solving the problem of constructing a trajectory for an unmanned aerial vehicle in a dynamic environment," *Rocket and Space Technology*, vol. 1, no. 2, pp. 92-99, 2017.
- [5] A. Vemula, K. Muelling, and J. Oh, "Path planning in dynamic environments with adaptive dimensionality," *arXiv: 1605.06853 [cs.RO]*, 2016.
- [6] K. Gochev, B. Cohen, J. Butzke, A. Safonova, and M. Likhachev, "Path planning with adaptive dimensionality," *The Fourth International Symposium on Combinatorial Search (SoCS-2011)*, vol. 2, no. 1, pp. 52-59, 2011.
- [7] D. Jia, C. Hu, K. Qin, and X. Cui, "Planar waypoint generation and path finding in dynamic environment," *International Conference on Identification, Information and Knowledge in the Internet of Things*, 2014, pp. 206-211.
- [8] W. Zhu, D. Jia, H. Wan, T. Yang, C. Hu, K. Qin, and X. Cui, "Waypoint graph based fast pathfinding in dynamic environment," *International Journal of Distributed Sensor Networks*, vol. 11, no. 8, 2015, Art. no. 238727.
- [9] M.-K. Ng, Y.-W. Chong, K.-M. Ko, Y.-H. Park, and Y.-B. Leau, "Adaptive path finding algorithm in dynamic environment for warehouse robot," *Neural Computing and Applications*, vol. 32, pp. 13155-13171, 2020.
- [10] E. Masehian and Y. Katebi, "Robot motion planning in dynamic environments with moving obstacles and target," *World Academy of Science, Engineering and Technology*, vol. 29, pp. 107-112, 2007.
- [11] N. E. D. Toit and J. W. Burdick, "Robot motion planning in dynamic, uncertain environments," *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 28, no. 1, pp. 101-115, 2012.
- [12] R. H. Abiyev, N. Akkaya, and E. Aytac, "Navigation of mobile robot in dynamic environments," *IEEE International Conference on Computer Science and Automation Engineering (CSAE)*, 2012, pp. 480-484.

- 
- [13] R. F. Gilimyanov and L. B. Rapoport, "Path deformation method in robot motion planning problems in the presence of obstacles," *Management Issues*, vol. 1, pp. 70-76, 2012.
- [14] I. V. Bychkov, M. Yu. Kenzin, and N. N. Maksimkin, "A Two-Level Evolutionary Approach to Routing a Group of Underwater Robots under Periodic Rotation of the Composition," *Proceedings of SPIRAS*, vol. 18, no. 2, pp. 267-301, 2019.
- [15] S. Ulyanov, I. Bychkov, and N. Maksimkin, "Event-based path-planning and path-following in unknown environments for underactuated autonomous underwater vehicles," *Applied Sciences*, vol. 10, no. 21, p. 7894, 2020.
- [16] A. Kazakov and A. Lempert, "An approach to optimization in transport logistics," *Automation and Remote Control*, vol. 72, no. 7, pp. 1398-1404, 2011.
- [17] R. P. Feynman, R. B. Leighton, and M. Sands, *Feynman lectures on physics, vol. 3, Quantum mechanics*, Addison Wesley, 1971.
- [18] K. W. Cassel, *Variational methods with applications in science and engineering*, Cambridge: Cambridge University Press, 2013.