PULLBACK ATTRACTOR OF STOCHASTIC NAVIER-STOKES EQUATIONS WITH RANDOM DENSITY

Pham Tri Nguyen
Electric Power University

ARTICLE INFO

Received:	**10/01/2025**
Revised:	**17/02/2025**
Published:	**19/02/2025**

KEYWORDS

Stochastic Navier-Stokes equations
Pullback attractor
Random density
Bounded domain
Additive noise

ABSTRACT

This paper studies the two dimensional Navier Stokes equations driven by random density, additive white noise and time dependent forces on bounded domain. The result shows that when the noise is zero and the random density is identical to one, the system becomes the classical incompressible Navier Stokes equation system. In addition, for the bounded domain, the Poincaré inequality is satisfied. By applying the Ornstein Uhlenbeck process, the stochastic system is transformed into a deterministic one with random parameters. Then, using the Faedo Galerkin approximations method we obtain the existence and unique weak solution for the system as well as the continuity of the solution with respect to its initial data. Next, a continuous cocycle for the equations is defined, the existence and unique pullback attractor of the system is proven. Noteworthy, for bounded domains, the use of the Sobolev embedding theorem helps to obtain the asymptotic compactness of the solution.

TẬP HÚT LÙI CỦA HỆ NAVIER-STOKES NGẪU NHIÊN VỚI MẬT ĐỘ NGẪU NHIÊN

Phạm Trí Nguyễn
Trường Đại học Điện lực

THÔNG TIN BÀI BÁO

Ngày nhận bài:	**10/01/2025**
Ngày hoàn thiện:	**17/02/2025**
Ngày đăng:	**19/02/2025**

TỪ KHÓA

Hệ Navier-Stokes ngẫu nhiên
Tập hút lùi
Mật độ ngẫu nhiên
Miền bị chặn
Nhiễu cộng tính

TÓM TẮT

Bài báo này nghiên cứu hệ phương trình Navier Stokes hai chiều được điều khiển bởi mật độ ngẫu nhiên, nhiễu ngẫu nhiên cộng tính và ngoại lực phụ thuộc thời gian trong miền bị chặn. Kết quả cho thấy rằng khi nhiễu bằng không và mật độ ngẫu nhiên đồng nhất bằng một thì hệ trở thành hệ phương trình Navier Stokes không nén được cổ điển. Ngoài ra, đối với miền bị chặn, bất đẳng thức Poincaré được thỏa mãn. Bằng cách áp dụng quá trình Ornstein Uhlenbeck, hệ ngẫu nhiên được chuyển thành hệ tất định với các tham số ngẫu nhiên. Từ đó, sử dụng phương pháp xấp xỉ Faedo Galerkin chúng tôi thu được sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của hệ cũng như tính liên tục của nghiệm đối với dữ liệu ban đầu của nó. Tiếp theo, một đối chu trình liên tục cho hệ phương trình được định nghĩa, sự tồn tại và duy nhất tập hút lùi của hệ được chứng minh. Đáng chú ý, đối với miền bị chặn, việc sử dụng định lý nhúng Sobolev giúp thu được tính compact tiệm cận của nghiệm.

DOI: https://doi.org/10.34238/tnu-jst.11859

Email: nguyench13@gmail.com

1. Mở đầu

Việc nghiên cứu sự tồn tại tập hút của các lớp hệ phương trình đạo hàm riêng nói chung trong đó có lớp hệ Navier Stokes là một vấn đề rất quan trọng và đã được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu. Chẳng hạn, đối với các hệ phương trình tất định ta có thể tham khảo [1] - [6] và đối với các hệ phương trình ngẫu nhiên ta có thể tham khảo [7] - [10]. Tiếp nối hướng nghiên cứu gần đây về sự tồn tại và các tính chất của tập hút ngẫu nhiên cho lớp hệ Navier Stokes (xem [8], [9]), bài báo này xét hệ Navier Stokes hai chiều với nhiễu ngẫu nhiên cộng tính và mật độ ngẫu nhiên, từ đó chứng minh sự tồn tại và duy nhất tập hút lùi của hệ.

Cho $\Xi \subset \mathbb{R}^2$ là miền bị chặn, $\tau \in \mathbb{R}$, $t > \tau$. Xét hệ phương trình

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + \alpha(\theta_t\omega)(u\cdot\nabla)u + \nabla p = f(x,t) + \beta g(x)\dfrac{dW(t)}{dt}, x \in \Xi, \\ \text{div } u = 0, x \in \Xi, \\ u(x,t) = 0, x \in \partial\Xi, \\ u(x,\tau) = u_\tau(x), x \in \Xi. \end{cases} \tag{1}$$

Trong đó $u = u(x,t) = (u_1, u_2)$ là hàm vận tốc chưa biết của dòng chất lỏng, u_τ là điều kiện đầu, $p = p\left(x,t\right)$ là hàm áp suất, $\nu > 0$ là hệ số nhớt của chất lỏng, $\alpha(\theta_t\omega)$ là mật độ ngẫu nhiên, $f\left(x,t\right)$ là hàm ngoại lực, $W(t)$ là quá trình Wiener thực, $\beta \in \mathbb{R}$, $g \in D(A)$.

2. Phương pháp nghiên cứu

Bằng cách áp dụng phép đổi biến thích hợp, hệ ngẫu nhiên được chuyển thành hệ tất định với các tham số ngẫu nhiên. Sau đó áp dụng các công cụ của giải tích và các phương pháp của lý thuyết hệ động lực tiêu hao vô hạn chiều, bài báo chứng minh được sự tồn tại và duy nhất tập hút lùi của hệ.

3. Kết quả và bàn luận

3.1. Kiến thức chuẩn bị

Cho $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{P})$ là không gian xác suất, với $\Omega = C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}) = \{\omega \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) : \omega(0) = 0\}$, $\mathbb{F}$ là sigma đại số Borel, $\mathcal{P}$ là độ đo Wiener trên $(\Omega, \mathbb{F})$, $W(t,\omega) = \omega(t)$, $\{\theta_t : t \in \mathbb{R}\}$ là dịch chuyển Wiener trên $(\Omega, \mathbb{F}, \mathcal{P})$ cho bởi: $\theta_t\omega(\cdot) = \omega(t+\cdot) - \omega(t)$. Đặt $\mathcal{V} = \{u \in [C_0^\infty(\mathcal{O})]^2 : \text{div} u = 0\}$ và xét các không gian Hilbert $[L^2(\Xi)]^2$, $[H_0^1(\Xi)]^2$ với các tích vô hướng tương ứng:

$$(u,v) = \sum_{i=1}^{3} \int_\Xi u_i v_i dx \ , \ \forall u,v \in [L^2(\Xi)]^2,$$

$$((u,v)) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_\Xi \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx \ , \ \forall u,v \in [H_0^1(\Xi)]^2,$$

và các chuẩn $|u| = (u,u)^{1/2}$, $\|u\| = ((u,u))^{1/2}$. Đặt $H = \overline{\mathcal{V}}^{[L^2(\Xi)]^2}$ và $V = \overline{\mathcal{V}}^{[H_0^1(\Xi)]^2}$ (trong đó $\overline{\Gamma}^X$ là ký hiệu bao đóng của Γ trong X), V' là không gian đối ngẫu của V, $\langle \cdot,\cdot \rangle$ là ký hiệu đối ngẫu giữa V và V'. Định nghĩa toán tử Stokes $A : V \to V'$ xác định bởi

$$\langle Au, v\rangle = ((u,v)), \ \forall u,v \in V, \ D(A) = [H_0^1(\Xi)]^2 \cap V.$$

Xét dạng ba tuyến tính b cho bởi $b(u,v,w) = \sum_{i,j=1}^{2} \int_{\Xi} u_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} w_j dx,\ \forall u,v,w \in V$. Định nghĩa toán tử $B: V \times V \to V'$, $\langle B(u,v), w\rangle = b(u,v,w)$. Khi đó hệ (1) được viết lại dưới dạng phương trình toán tử

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + \alpha(\theta_t\omega)B(u,u) = f + \beta g\frac{dW(t)}{dt}. \tag{2}$$

Định nghĩa 3.1. Giả sử $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H), \tau \in \mathbb{R}$, $\omega \in \Omega$ và $u_\tau \in H$. Ánh xạ $u(\cdot,\tau,\omega,u_\tau): [\tau,+\infty) \to H$ được gọi là nghiệm yếu của phương trình (2) nếu với mỗi $T > 0$ thì

$$u(\cdot,\tau,\omega,u_\tau) \in C([\tau,+\infty); H) \cap L^2([\tau,\tau+T]; V),$$

$$\frac{du}{dt} + \nu Au + \alpha(\theta_t\omega)B(u,u) = f + \beta g\frac{dW(t)}{dt} \text{ trong } V'.$$

Bổ đề 3.2. (xem [10]) *Với C là một hằng số dương ta có*

(i) $b(u,v,w) = -b(u,w,v),\ b(u,v,v) = 0,\ \forall u,v,w \in V$,

(ii) $|b(u,v,w)| \le C|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\||w|^{\frac{1}{2}}\|w\|^{\frac{1}{2}},\ \forall u,v,w \in V$,

(iii) $|b(u,v,w)| \le C|u|^{\frac{1}{2}}\|u\|^{\frac{1}{2}}\|v\|^{\frac{1}{2}}|Av|^{\frac{1}{2}}|w|,\ \forall u \in V, v \in D(A), w \in H$.

Giả thiết: $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}, H)$, g và hàm mật độ ngẫu nhiên thỏa mãn các điều kiện sau

(**A₁**) Với $\eta > 0$ thì $\|f\|_{\tau,\eta} = \left(\sup_{s\le\tau}\int_{-\infty}^{0} e^{\eta r}|f(r+s)|^2\,dr\right)^{1/2} < +\infty, \forall \tau \in \mathbb{R}.$

(**A₂**) Tồn tại $k > 0$ sao cho $b(u,g,u) \le k|u|^2, \forall u \in H$.

(**A₃**) Hàm mật độ ngẫu nhiên $\alpha(\cdot): \Omega \to \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$t \to \alpha(\theta_t\omega) \text{ là liên tục, } \lim_{t\to\pm\infty}\frac{\alpha(\theta_t\omega)}{t} = 0,\ E|\alpha|^p < +\infty \text{ với } p \ge 1.$$

Gọi $\mathcal{D} = \{\mathcal{D}(\tau,\omega): \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ là tập hai tham số trong H, $\mathcal{D}$ được gọi là tăng chậm toàn cục nếu với mọi $\tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega, \gamma > 0$ thì

$$\lim_{t\to+\infty} e^{-\gamma t}\sup_{s\le\tau}|\mathcal{D}(s-t,\theta_{-t}\omega)| = 0,$$

trong đó $|\mathcal{D}| = \sup_{u\in\mathcal{D}}|u|$ và gọi $\mathfrak{D}$ là tập hợp các tập con trong H xác định bởi

$$\mathfrak{D} = \{\mathcal{D} = \{\mathcal{D}(\tau,\omega): \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}\},\ \mathcal{D} \text{ tăng chậm toàn cục.}$$

3.2. Kết quả chính

Xét phương trình Ornstein Uhlenbeck: $dz(\theta_t\omega) + z(\theta_t\omega)dt = dW(t)$. Khi đó tồn tại tập θ_t bất biến $\hat{\Omega} \subset \Omega$ sao cho $\mathcal{P}(\hat{\Omega}) = 1$ đồng thời $z(\theta_t\omega)$ liên tục theo t với mọi $\omega \in \hat{\Omega}$ và $\lim_{t\to\pm\infty}\frac{z(\theta_t\omega)}{t} = 0$. Ngoài ra, $E|z|^q < +\infty$ với mọi $q \ge 1$. Do đó, theo bất đẳng thức Holder ta có

$$E|\alpha z| \le \left(E|\alpha|^p\right)^{1/p}\left(E|z|^q\right)^{1/q} < +\infty, \text{ với } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Từ giờ trở đi ta giả thiết rằng hằng số β thỏa mãn: $\beta < \beta_0 = \dfrac{\nu\lambda}{16k(1+E\,|\,\alpha z\,|)}$, với λ là hằng số dương trong bất đẳng thức Poincaré. C là hằng số dương nào đó và nó có thể khác nhau trong mỗi lần xuất hiện. Ta đưa vào phép đổi biến

$$v(t,\tau,\omega,v_\tau) = u(t,\tau,\omega,u_\tau) - \beta g z(\theta_t\omega),\;\; v_\tau = u_\tau - \beta g z(\theta_\tau\omega). \tag{3}$$

Kết hợp (2) và (3), ta nhận được phương trình

$$\frac{dv}{dt} + \nu A v + \alpha(\theta_t\omega)B(v+\beta g z) = f + \beta g z(\theta_t\omega) - \nu\beta A g z(\theta_t\omega). \tag{4}$$

Do (4) là phương trình tất định với các tham số ngẫu nhiên nên bằng phương pháp xấp xỉ Faedo Galerkin (xem [11]), ta thu được kết quả sau.

Bổ đề 3.3. *Giả sử* $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},H), \tau\in\mathbb{R}$, $\omega\in\Omega$ *và* $v_\tau \in H$. *Phương trình (4) có duy nhất nghiệm yếu* $v \in C([\tau,+\infty);H)\cap L^2([\tau,+\infty);V)$ *sao cho* $v_\tau = u_\tau - \beta g z(\theta_\tau\omega)$. *Ngoài ra, nghiệm* $v(t,\tau,\omega,v_\tau)$ *liên tục theo* v_τ.

Từ Bổ đề 3.1, ta định nghĩa đối chu trình $\Phi:\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}\times\Omega\times H\to H$ xác định bởi

$$\Phi(t,\tau,\omega,u_\tau) = u(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,u_\tau) = v(t+\tau,\tau,\theta_{-\tau}\omega,u_\tau) + \beta g z(\theta_t\omega).$$

Sau đây ta đưa ra một số ước lượng đối với nghiệm của phương trình (4).

Bổ đề 3.4. *Với mỗi* $\tau\in\mathbb{R},\omega\in\Omega,\mathcal{D}\in\mathfrak{D}$, *tồn tại* $T=T(\tau,\omega,\mathcal{D})>0$ *sao cho với mọi* $t\ge T, s\le\tau$ *và* $u_{s-t}\in\mathcal{D}(s-t,\theta_{-t}\omega)$ *thì*

$$\sup_{s\le\tau} |\,u(s,s-t,\theta_{-s}\omega,u_{s-t})\,|^2 \le C_1 R(\tau,\omega), \tag{5}$$

$$\sup_{s\le\tau}\int_{-t}^0 e^{\nu\lambda r + 4\tilde{k}\int_r^0 |z(\theta_\rho\omega)|d\rho}\,\|\,v(r+s,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})\,\|^2\,dr \le C_2 R(\tau,\omega), \tag{6}$$

trong đó $C_1,C_2>0$ và $R(\tau,\omega) = Q_1(\tau,\omega)+Q_2(\omega)+|\,z(\omega)\,|^2$,

$$Q_1(\tau,\omega) = \sup_{s\le\tau}\int_{-\infty}^0 e^{\nu\lambda r + 4k|\beta|\int_r^0 |z(\theta_\rho\omega)\alpha(\theta_\rho\omega)|d\rho}\,|\,f(r+s)\,|^2\,dr,$$

$$Q_2(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{\nu\lambda r + 4k|\beta|\int_r^0 |z(\theta_\rho\omega)\alpha(\theta_\rho\omega)|d\rho}\,\xi(\theta_r\omega)dr,$$

$$\begin{aligned}\xi(\theta_r\omega) = {}& 4\nu\beta^2\,\|\,g\,\|^2|\,z(\theta_r\omega)\,|^2 + \frac{4\beta^2}{\nu\lambda}\,|\,g\,|^2|\,z(\theta_r\omega)\,|^2\\ &+4k\,|\,\beta\,||\,g\,|^2|\,z(\theta_r\omega)\,|^3|\,\alpha(\theta_r\omega)\,|.\end{aligned}$$

Chứng minh. Sử dụng phương trình (4) cho $v(r) = v(r,s-t,\theta_{-s}\omega,v_{s-t})$ ta nhận được

$$\begin{aligned}\frac{d}{dr}|\,v\,|^2 + 2\nu\,\|\,v\,\|^2 = {}& -2\alpha(\theta_{r-s}\omega)b(v+\beta g z(\theta_{r-s}\omega),v+\beta g z(\theta_{r-s}\omega),v)\\ &+2(f,v)+2z(\theta_{r-s}\omega)(\beta g-\nu\beta A g,v).\end{aligned} \tag{7}$$

Ta đánh giá các số hạng trong vế phải của (7). Áp dụng bất đẳng thức Young ta có

$$2\,|\,z(\theta_{r-s}\omega)(\beta g-\nu\beta A g,v)\,| \le \frac{\nu}{2}\,\|\,v\,\|^2 + 4\nu\beta^2\,\|\,g\,\|^2|\,z(\theta_{r-s}\omega)\,|^2 + \frac{4\beta^2}{\nu\lambda}\,|\,g\,|^2|\,z(\theta_{r-s}\omega)\,|^2.$$

Mặt khác, bởi Bổ đề 3.1 và giả thiết (**A₂**) ta có đánh giá

$$\begin{aligned}&2\,|\,\alpha(\theta_{r-s}\omega)b(v+\beta g z(\theta_{r-s}\omega),v+\beta g z(\theta_{r-s}\omega),v)\,|\\ &\le 2\,|\,\alpha(\theta_{r-s}\omega)b(v+\beta g z(\theta_{r-s}\omega),v+\beta g z(\theta_{r-s}\omega),v)\,|\end{aligned}$$

$$= 2|\beta||z(\theta_{r-s}\omega)\alpha(\theta_{r-s}\omega)||b(v+\beta gz(\theta_{r-s}\omega), g, v+\beta gz(\theta_{r-s}\omega))|$$
$$\le 2k|\beta||z(\theta_{r-s}\omega)\alpha(\theta_{r-s}\omega)||v+\beta gz(\theta_{r-s}\omega)|^2$$
$$\le 4k|\beta||z(\theta_{r-s}\omega)\alpha(\theta_{r-s}\omega)|(|v|^2+|g|^2|z(\theta_{r-s}\omega)|^2).$$

Thay các đánh giá trên vào (7) ta được

$$\frac{d}{dr}|v|^2 + (\nu\lambda - 4k|\beta||z(\theta_{r-s}\omega)\alpha(\theta_{r-s}\omega)|)|v|^2 + \frac{\nu}{4}\|v\|^2 \le \frac{4}{\nu\lambda}|f|^2 + \xi(\theta_{r-s}\omega). \quad (8)$$

Tiếp theo ta nhân (6) với $e^{\int_{s-t}^{r}(\nu\lambda - 4k|\beta||z(\theta_{\rho-s}\omega)\alpha(\theta_{\rho-s}\omega)|)d\rho}$ rồi lấy tích phân trên $[s-t,\sigma]$ ta được

$$\begin{aligned}
&|v(\sigma, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t})|^2 + \frac{\nu}{4}\int_{s-t}^{\sigma} e^{\nu\lambda(r-\sigma)+4k|\beta|\int_r^{\sigma}|z(\theta_{\rho-s}\omega)\alpha(\theta_{\rho-s}\omega)|d\rho}\|v(r, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t})\|^2\,dr\\
&\le e^{-\nu\lambda(\sigma-s+t)+4k|\beta|\int_{s-t}^{\sigma}|z(\theta_{\rho-s}\omega)\alpha(\theta_{\rho-s}\omega)|d\rho}|v_{s-t}|^2 + \frac{4}{\nu\lambda}\int_{s-t}^{\sigma} e^{\nu\lambda(r-\sigma)+4k|\beta|\int_r^{\sigma}|z(\theta_{\rho-s}\omega)\alpha(\theta_{\rho-s}\omega)|d\rho}|f(r)|^2\,dr\\
&+\int_{s-t}^{\sigma} e^{\nu\lambda(r-\sigma)+4k|\beta|\int_r^{\sigma}|z(\theta_{\rho-s}\omega)\alpha(\theta_{\rho-s}\omega)|d\rho}\xi(\theta_{r-s}\omega)dr,
\end{aligned}\quad (9)$$

Lấy $\sigma = s$ trong (9) rồi thực hiện đổi biến trong tích phân, ta suy ra

$$\begin{aligned}
&|v(s, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t})|^2 + \frac{\nu}{4}\int_{-t}^{0} e^{\nu\lambda r+4k|\beta|\int_r^{0}|z(\theta_{\rho}\omega)\alpha(\theta_{\rho}\omega)|d\rho}\|v(r+s, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t})\|^2\,dr\\
&\le e^{-\nu\lambda t+4k|\beta|\int_{-t}^{0}|z(\theta_{\rho}\omega)\alpha(\theta_{\rho}\omega)|d\rho}|v_{s-t}|^2 + \frac{4}{\nu\lambda}\int_{-t}^{0} e^{\nu\lambda r+4k|\beta|\int_r^{0}|z(\theta_{\rho}\omega)\alpha(\theta_{\rho}\omega)|d\rho}|f(r+s)|^2\,dr\\
&+\int_{-t}^{0} e^{\nu\lambda r+4k|\beta|\int_r^{0}|z(\theta_{\rho}\omega)\alpha(\theta_{\rho}\omega)|d\rho}\xi(\theta_{r}\omega)dr.
\end{aligned}\quad (10)$$

Sử dụng (3) và (10) ta nhận được

$$\begin{aligned}
|u(s, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t})|^2 &\le 2|v(s, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t})|^2 + 2\beta^2|g|^2|z(\omega)|^2\\
&\le 4e^{-\nu\lambda t+4k|\beta|\int_{-t}^{0}|z(\theta_{\rho}\omega)\alpha(\theta_{\rho}\omega)|d\rho}(|u_{s-t}|^2 + \beta^2|g|^2|z(\theta_{-t}\omega)|^2)\\
&+\frac{8}{\nu\lambda}\int_{-t}^{0} e^{\nu\lambda r+4k|\beta|\int_r^{0}|z(\theta_{\rho}\omega)\alpha(\theta_{\rho}\omega)|d\rho}|f(r+s)|^2\,dr\\
&+2\int_{-t}^{0} e^{\nu\lambda r+4k|\beta|\int_r^{0}|z(\theta_{\rho}\omega)\alpha(\theta_{\rho}\omega)|d\rho}\xi(\theta_{r}\omega)dr + 2\beta^2|g|^2|z(\omega)|^2.
\end{aligned}\quad (11)$$

Áp dụng định lý ergodic: $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{-t}\int_0^{-t}|z(\theta_{\rho}\omega)\alpha(\theta_{\rho}\omega)|d\rho = E|z\alpha| < +\infty,$ điều này cùng với giả thiết (**A**$_3$) suy ra tồn tại $t_0 = t_0(\omega) > 0$ sao cho với mọi $t \ge t_0$ thì

$$4k|\beta|\int_{-t}^{0}|z(\theta_{\rho}\omega)\alpha(\theta_{\rho}\omega)|d\rho \le 4k\beta_0\int_{-t}^{0}|z(\theta_{\rho}\omega)\alpha(\theta_{\rho}\omega)|d\rho \le 4k\beta_0(1+E|z\alpha|)t = \frac{\nu\lambda}{4}t. \quad (12)$$

Vì $u_{s-t} \in \mathcal{D}(s-t, \theta_{-t}\omega), \mathcal{D} \in \mathfrak{D}$ và (10), tồn tại $T = T(\tau, \omega, \mathcal{D}) \ge t_0$ sao cho với mọi $t \ge T$ ta có

$$\sup_{s\le\tau} e^{-\nu\lambda t+4k|\beta|\int_{-t}^{0}|z(\theta_{\rho}\omega)||\alpha(\theta_{\rho}\omega)|d\rho}|u_{s-t}|^2 \le \sup_{s\le\tau} e^{-\frac{3\nu\lambda}{4}t}|\mathcal{D}(s-t, \theta_{-t}\omega)|^2 \le Q_2(\omega). \quad (13)$$

Bởi (12) ta có

$$e^{-\nu\lambda t+4k|\beta|\int_{-t}^{0}|z(\theta_{\rho}\omega)||\alpha(\theta_{\rho}\omega)|d\rho}|z(\theta_{-t}\omega)|^2 \le e^{-\frac{3\nu\lambda}{4}t}|z(\theta_{-t}\omega)|^2 \to 0,\ t \to +\infty. \quad (14)$$

Từ (10, (11), (13), (14) ta suy ra (5) và (6). □

Kết quả tiếp theo chứng minh sự tồn tại tập $\mathfrak{D}$-hấp thu lùi trong H đối với đối chu trình Φ liên kết với nghiệm của bài toán (2).

Bổ đề 3.5. *Đối chu trình Φ có một tập $\mathfrak{D}$-hấp thu lùi $\mathcal{K} = \{\mathcal{K}(\tau,\omega) : \tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega\}$ trong H cho bởi*

$$\mathcal{K}(\tau,\omega) = \{u \in H : |u|^2 \le C_1 R(\tau,\omega)\}, \tag{15}$$

với $R(\tau,\omega)$ xác định trong Bổ đề 3.4.

Chứng minh. Với $\tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega$ ta có các đánh giá

$$Q_1(\tau,\omega) = \sup_{s\le\tau}\int_{-\infty}^0 e^{\nu\lambda r + 4k|\beta|\int_r^0 |z(\theta_\rho\omega)\alpha(\theta_\rho\omega)|d\rho} |f(r+s)|^2\, dr \le \sup_{s\le\tau}\int_{-\infty}^0 e^{\frac{3\nu\lambda}{4}r} |f(r+s)|^2\, dr \le \| f\|^2_{\tau,\nu\lambda/4},$$

$$Q_2(\omega) = \int_{-\infty}^0 e^{\nu\lambda r + 4k|\beta|\int_r^0 |z(\theta_\rho\omega)\alpha(\theta_\rho\omega)|d\rho} \xi(\theta_r\omega)dr \le \int_{-\infty}^0 e^{\frac{3\nu\lambda}{4}r}\xi(\theta_r\omega)dr < +\infty.$$

Từ các đánh giá trên ta suy ra $R(\tau,\omega) < +\infty$. Mặt khác với $\mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, bởi (5) và (15) ta có

$$\Phi(t,\tau-t,\theta_{-t}\omega,\mathcal{D}(\tau-t,\theta_{-t}\omega)) = u(\tau,\tau-t,\theta_{-\tau}\omega,\mathcal{D}(\tau-t,\theta_{-t}\omega)) \subset \mathcal{K}(\tau,\omega).$$

Tiếp theo ta sẽ chứng minh $\mathcal{K} \in \mathfrak{D}$. Gọi γ là số dương bất kỳ, từ (15) ta có

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} e^{-\gamma t}\sup_{s\le\tau} |\mathcal{K}(s-t,\theta_{-t}\omega)|^2 &= \lim_{t\to+\infty} C_1 e^{-\gamma t}\sup_{s\le\tau} |R(s-t,\theta_{-t}\omega)|^2 \\ &= \lim_{t\to+\infty} C_1 e^{-\gamma t}\sup_{s\le\tau}[Q_1(s-t,\theta_{-t}\omega) + Q_2(\theta_{-t}\omega)].\end{aligned} \tag{16}$$

Vì $\tau \to Q_1(\tau,\omega)$ tăng nên với $\tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega, t \ge 0$ thì

$$e^{-\gamma t}\sup_{s\le\tau} Q_1(s-t,\theta_{-t}\omega) = e^{-\gamma t}Q_1(\tau-t,\theta_{-t}\omega) = e^{-\gamma t}\sup_{s\le\tau-t}\int_{-\infty}^0 e^{\nu\lambda r + 4k|\beta|\int_r^0 |z(\theta_{\rho-t}\omega)\alpha(\theta_{\rho-t}\omega)|d\rho} |f(r+s)|^2\, dr$$

$$= e^{-\gamma t}\sup_{s\le\tau-t}\int_{-\infty}^0 e^{\nu\lambda r + 4k|\beta|\int_{r-t}^{-t} |z(\theta_\rho\omega)\alpha(\theta_\rho\omega)|d\rho} |f(r+s)|^2\, dr$$

$$= e^{-\gamma t}\sup_{\hat{s}\le\tau}\int_{-\infty}^0 e^{\nu\lambda r + 4k|\beta|\int_{r-t}^{-t} |z(\theta_\rho\omega)\alpha(\theta_\rho\omega)|d\rho} |f(r+\hat{s}-t)|^2\, dr$$

$$= e^{-\gamma t}\sup_{\hat{s}\le\tau}\int_{-\infty}^{-t} e^{\nu\lambda r + 4k|\beta|\int_r^{-t} |z(\theta_\rho\omega)\alpha(\theta_\rho\omega)|d\rho} |f(r+\hat{s})|^2\, dr$$

$$\le e^{-\gamma t}\sup_{\hat{s}\le\tau}\int_{-\infty}^{-t} e^{\nu\lambda r + 4k|\beta|\int_r^0 |z(\theta_\rho\omega)\alpha(\theta_\rho\omega)|d\rho} |f(r+\hat{s})|^2\, dr \le e^{-\gamma t}\sup_{\hat{s}\le\tau}\int_{-\infty}^{-t} e^{\frac{3\nu\lambda}{4}r} |f(r+\hat{s})|^2\, dr. \tag{17}$$

Ngoài ra, với $t \ge |\tau|$ thì

$$\begin{aligned}\sup_{\hat{s}\le\tau}\int_{-\infty}^{-t} e^{\frac{3\nu\lambda}{4}r} |f(r+\hat{s})|^2\, dr &= \sup_{\hat{s}\le\tau}\int_{-\infty}^0 e^{\frac{3\nu\lambda}{4}(r-t)} |f(r+\hat{s}-t)|^2\, dr \\ &\le \sup_{\hat{s}\le\tau}\int_{-\infty}^0 e^{\frac{3\nu\lambda}{4}r} |f(r+\hat{s}-t)|^2\, dr \le \sup_{\tilde{s}\le 0}\int_{-\infty}^0 e^{\frac{3\nu\lambda}{4}r} |f(r+\tilde{s})|^2\, dr = \| f\|^2_{0,3\nu\lambda/4}.\end{aligned} \tag{18}$$

Từ (17) và (18), với $t \ge |\tau|$ ta suy ra

$$e^{-\gamma t}\sup_{s\le\tau} Q_1(s-t,\theta_{-t}\omega) \le e^{-\gamma t}\, \| f\|^2_{0,3\nu\lambda/4} \to 0,\ t \to +\infty. \tag{19}$$

Bởi (12) ta cũng có

$$e^{-\gamma t}Q_2(\theta_{-t}\omega) \to 0,\ t \to +\infty. \tag{20}$$

Kết hợp (16), (19) và (20) ta suy ra $\mathcal{K} \in \mathfrak{D}$. □

Bổ đề 3.6. *Với mỗi $\tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega, \mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, tồn tại $T = T(\tau,\omega,\mathcal{D}) > 0$ sao cho với mọi $t \ge T, s \le \tau$ và $u_{s-t} \in D(s-t,\theta_{-t}\omega)$ thì*

$$\sup_{s\le\tau} \| u(s,s-t,\theta_{-s}\omega,u_{s-t})\|^2 \le \delta(\omega)(1 + \| f\|^2_{\tau,\nu\lambda/4})e^{\delta(\omega)}. \tag{21}$$

Chứng minh. Nhân phương trình (4) với Av, $v(r) = v(r, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t})$ ta được

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\| v \|^2 + 2\nu |Av|^2 = -2\alpha(\theta_{r-s}\omega) b(v + \beta gz(\theta_{r-s}\omega), v + \beta gz(\theta_{r-s}\omega), Av) \\ + 2(f + \beta gz(\theta_{r-s}\omega) - \nu\beta Agz(\theta_{r-s}\omega), Av).\end{aligned} \tag{22}$$

Ta đánh giá các số hạng ở vế phải của (22)

$$2|(f, Av)| \le \frac{\nu}{4}|Av|^2 + \frac{4}{\nu}|f|^2,$$

$$2|(\beta gz(\theta_{r-s}\omega) - \nu\beta Agz(\theta_{r-s}\omega), Av)| \le \frac{\nu}{2}|Av|^2 + c|z(\theta_{r-s}\omega)|^2,$$

$$2|\alpha(\theta_{r-s}\omega) b(v + \beta gz(\theta_{r-s}\omega), v + \beta gz(\theta_{r-s}\omega), Av)|$$

$$\le \frac{\nu}{4}|Av|^2 + C(|\alpha(\theta_{r-s}\omega)|^4 + |\alpha(\theta_{r-s}\omega)|^2 |z(\theta_{r-s}\omega)|)\| v \|^2 + C|\alpha(\theta_{r-s}\omega)|^2 |z(\theta_{r-s}\omega)|^2 .$$

Thay các đánh giá trên vào (22) ta được

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\| v \|^2 + \nu |Av|^2 \le C(|\alpha(\theta_{r-s}\omega)|^4 + |\alpha(\theta_{r-s}\omega)|^2 |z(\theta_{r-s}\omega)|)\| v \|^2 \\ + C(1 + |\alpha(\theta_{r-s}\omega)|^2)|z(\theta_{r-s}\omega)|^2 + C|f|^2 .\end{aligned} \tag{23}$$

Bỏ qua số hạng thứ hai trong vế trái của (23) sau đó áp dụng bất đẳng thức Gronwall đều trên $[s-1, s]$ ta thu được

$$\| v(s, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t}) \|^2 \le \left[L_1(s) + L_2(s,t)\right] e^{L_3(s)}, \tag{24}$$

trong đó

$$L_1(s) = C\int_{s-1}^{s} (1 + |\alpha(\theta_{r-s}\omega)|^2)|z(\theta_{r-s}\omega)|^2\, dr + C\int_{s-1}^{s} |f(r)|^2\, dr := L_1^{(1)}(s) + L_1^{(2)}(s),$$

$$L_2(s,t) = \int_{s-1}^{s} \| v(r, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t}) \|^2\, dr,$$

$$L_3(s) = C\int_{s-1}^{s} (|\alpha(\theta_{r-s}\omega)|^4 + |\alpha(\theta_{r-s}\omega)|^2 |z(\theta_{r-s}\omega)|) dr.$$

Ta có các đánh giá

$$\begin{aligned}\sup_{s\le\tau} L_1^{(1)}(s) &= C\sup_{s\le\tau}\int_{s-1}^{s} (1 + |\alpha(\theta_{r-s}\omega)|^2)|z(\theta_{r-s}\omega)|^2\, dr = C\int_{-1}^{0} (1 + |\alpha(\theta_r\omega)|^2)|z(\theta_r\omega)|^2\, dr \\ &\le \delta(\omega),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{s\le\tau} L_1^{(2)}(s) &= C\sup_{s\le\tau}\int_{s-1}^{s} |f(r)|^2\, dr = C\int_{-1}^{0} |f(r+s)|^2\, dr \le C\sup_{s\le\tau}\int_{-1}^{0} e^{3\nu\lambda/4}|f(r+s)|^2\, dr \\ &= C\| f \|^2_{\tau, 3\nu\lambda/4} \le C\| f \|^2_{\tau, \nu\lambda/4},\end{aligned}$$

tương tự ta cũng có $\sup_{s\le\tau} L_3(s) \le \delta(\omega)$.

$$\begin{aligned}\sup_{s\le\tau} L_2(s,t) &= \sup_{s\le\tau}\int_{s-1}^{s} \| v(r, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t}) \|^2\, dr = \sup_{s\le\tau}\int_{-1}^{0} \| v(r+s, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t}) \|^2\, dr \\ &\le C\sup_{s\le\tau}\int_{-t}^{0} e^{\nu\lambda r + 4\tilde{k}|\beta|\int_r^0 |z(\theta_\rho\omega)\alpha(\theta_\rho\omega)| d\rho} \| v(r+s, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t}) \|^2\, dr \le CR(\tau, \omega).\end{aligned}$$

Mặt khác $R(\tau,\omega) = Q_1(\tau,\omega) + Q_2(\omega) + |z(\omega)|^2$, $Q_1(\tau,\omega) \le \| f \|^2_{\tau,\nu\lambda/4}$, nên

$$R(\tau,\omega) \le \delta(\omega)\left(1 + \| f \|^2_{\tau,\nu\lambda/4}\right). \tag{25}$$

Kết hợp các đánh giá trên cùng với (24) và (25) ta được

$$\sup_{s\le\tau} \| v(s, s-t, \theta_{-s}\omega, v_{s-t}) \|^2 \le \delta(\omega)(1 + \| f \|^2_{\tau,\nu\lambda/4}) e^{\delta(\omega)}. \tag{26}$$

Từ phép đổi biến (3) và (26) ta suy ra (21). □

Bây giờ ta phát biểu kết quả chính của mục này, đó là sự tồn tại và duy nhất tập $\mathfrak{D}$-hút lùi đối với Φ trong H.

Định lý 3.7. *Đối chu trình Φ có duy nhất một tập $\mathfrak{D}$-hút lùi ngẫu nhiên $\mathcal{A}$ trong H.*

Chứng minh. Theo Bổ đề 3.5, Φ có một tập $\mathfrak{D}$-hấp thu lùi $\mathcal{K}$ trong H. Mặt khác, theo Bổ đề 3.6, với mỗi $\tau \in \mathbb{R}, \omega \in \Omega, \mathcal{D} \in \mathfrak{D}$, tồn tại $T = T(\tau, \omega, \mathcal{D}) > 0$ sao cho với mọi $t \geq T$ thì

$$\| \bigcup_{t \geq T} \bigcup_{s \leq \tau} \Phi_f(t, s-t, \theta_{-t}\omega, \mathcal{D}(s-t, \theta_{-t}\omega)) \|^2 \leq \delta(\omega)(1 + \| f \|^2_{\tau, \nu\lambda/4}) e^{\delta(\omega)} < +\infty. \quad (27)$$

Từ (27), cho $s = \tau$ và sử dụng định lý nhúng compact Sobolev nhúng V vào H, ta có Φ là $\mathfrak{D}$-compact tiệm cận lùi. Áp dụng [10, Mệnh đề 2.10], ta suy ra Φ có duy nhất một tập $\mathfrak{D}$-hút lùi ngẫu nhiên $\mathcal{A}$ trong H. □

4. Kết luận

Trong nghiên cứu này, sau khi đưa ra kết quả về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu của hệ Navier-Stokes hai chiều với nhiễu ngẫu nhiên cộng tính và mật độ ngẫu nhiên, chúng tôi đã chứng minh được kết quả chính của nghiên cứu đó là sự tồn tại và duy nhất của tập hút lùi ngẫu nhiên. Đây là một tính chất quan trọng của nghiệm, có nhiều ý nghĩa trong việc nghiên cứu các lớp phương trình đạo hàm riêng.

TÀI LIỆU THAM KHẢO/ REFERENCES

[1] J. M. Ball, “Continuity properties and global attractors of generalized semiflows and the Navier-Stokes equations,” *J. Nonl. Sci.*, no. 7, pp. 475-502, 1997.

[2] T. Caraballo, J. Real, and P. E. Kloeden, “Unique strong solutions and *V*-attractor of a three dimensional system of globally modifed Navier-Stokes equations,” *Adv. Nonlinear Stud*., no. 6, pp. 411-436, 2006.

[3] T. Caraballo, G. Lukaszewicz, and J. Real, “Pullback attractors for non-autonomous 2D-NavierStokes equations in some unbounded domains,” *C. R. Acad. Sci. Paris I*, no. 342, pp. 263-268, 2006.

[4] P. E. Kloeden, J. A. Langa, and J. Real, “Pullback *V*-attractors of the three dimensional system of nonautonomous globally modified Navier-Stokes equations: existence and finite fractal dimension,” *Commun. Pure Appl. Anal.*, no. 6, pp. 937-955, 2007.

[5] R. Rosa, “The global attractor for the 2D Navier-Stokes flow on some unbounded domains,” *Nonlinear Analysis, TMA*, no. 32, pp. 71-85, 1998.

[6] P. Marín-Rubio, A. M. Márquez-Durán, and J. Real, “Pullback attractors for globally modified Navier-Stokes equations with infinite delays,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser-A*, no. 31, pp. 779-796, 2011.

[7] F. Flandoli and B. Schmalfuß, “Random attractors for the 3D stochastic Navier-Stokes equations with multiplicative noise,” *Stoch. Stoch. Rep.*, no. 59, pp. 21-45, 1996.

[8] T. H. Ho, K. M. Bui, and T. N. Pham, “Wong-Zakai approximation and attractors for stochastic three-dimensional globally modified Navier-Stokes equations driven by nonlinear noise,” *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, vol. 29, no. 2, pp. 1069-1104, 2024.

[9] T. H. Ho and T. N. Pham, “Random attractors for three-dimensional stochastic globally modified Navier-Stokes equations driven by additive noise on unbounded domains,” *Random Oper. Stoch. Equ.*, vol. 32, no. 3, pp. 223-239, 2024.

[10] B. Wang, “Periodic random attractors for stochastic Navier-Stokes equations on unbounded domains,” *Electronic Journal of Differential Equations*, vol. 2012, no. 59, pp. 1-18, 2012.

[11] J. C. Robinson, *Infinite-Dimensional Dynamical Systems: An Introduction to Dissipative Parabolic PDEs and the Theory of Global Attractors*, (*Cambridge Texts in Applied Mathematics, Series Number 28)*, Cambridge University Press, 2001.